Capitolul 3

Procese stochastice și teoria filtrării

1. Variabile aleatoare

1.1. Noțiunea de probabilitate

Fie E o mulțime nevidă și $\mathcal{K}$ o familie nevidă de părți ale mulțimii E.

<u>Definiția 1</u> de părți ale mulț. E

$\mathcal{K}$ se numește corp dacă:

1° $\forall A \in \mathcal{K}$, atunci $CA \in \mathcal{K}$ (CA – complementara lui A);

2° dacă $A, B \in \mathcal{K}$, atunci $A \cup B \in \mathcal{K}$;

3° dacă $A, B \in \mathcal{K}$, atunci $A \cap B \in \mathcal{K}$.

<u>Definiția 2</u> de părți ale mulț. E

$\mathcal{K}$ se numește corp borelian dacă:

1° $\forall A \in \mathcal{K}$, atunci $CA \in \mathcal{K}$;

2° $A_i \in \mathcal{K}$; $i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$;

3° $A_i \in \mathcal{K}$; $i \in I$, atunci $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$,

unde I este o familie numărabilă de indici.

<u>Propoziția 1</u>

$\mathcal{K}$ este corp (borelian) de părți ale mulțimii E, dacă satisface axioma 1° și una din axiomele 2°, 3° din definiția 1 (2). Demonstrația se face utilizând formulele lui Morgan.

<u>Definiția 3</u>

Dacă $\mathcal{K}$ este un corp (borelian) de părți ale mulțimii E, cuplul $(E, \mathcal{K})$ se numește câmp (borelian) de evenimente.

<u>Definiția 4</u> (Kolmogorov)

Funcția $P: \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ se numește probabilitate pe corpul (borelian) $\mathcal{K}$ dacă:

1° $P(A) \geq 0$;

2° $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, unde $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$, $i, j \in I$; I - familie finită (numărabilă) de indici și $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{K}$;

3° $P(E) = 1$.

X.1 Mulțimile A, E, $\emptyset$ în acest context se numesc eveniment, eveniment sigur, eveniment imposibil.

Definiția 5

Dacă $\mathcal{K}$ este corp (borelian) atunci tripletul $(E, \mathcal{K}, P)$ se numește cîmp (borelian) de probabilitate.

Propoziția 2

Dacă P este probabilitate pe corpul $\mathcal{K}$, atunci:

a) $P(\emptyset)=0$;

b) $P(A)=1-P(CA)$; $A\in\mathcal{K}$;

c) $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$; $A,B\in\mathcal{K}$, $A\subset B$;

d) $P(A)\leq P(B)$, dacă $A\subset B$; $A,B\in\mathcal{K}$;

e) $0\leq P(A)\leq 1$, $\forall A\in\mathcal{K}$;

f) $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$, $\forall A,B\in\mathcal{K}$.

O demonstrație a acestei propoziții se găsește în [12].

Definiția 6

Fie P o probabilitate pe $\mathcal{K}$ și $B\in\mathcal{K}$, cu $P(B)>0$.

Se numește probabilitatea condiționată de B a evenimentului A, notată $P_B(A)$ sau $P(A/B)$, raportul

(1) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \qquad \text{(Bayes)}. \quad B\neq\emptyset$$

Se poate arăta că $P(A/B)$ este o probabilitate.

Dacă A este independent de B, atunci

$$P(A/B)=P(A)$$

și din relația (1) se obține:

(2) $$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Acest fapt conduce la următoarea definiție mai generală:

Definiția 7

Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt statistic independente în totalitatea lor, dacă pentru orice șir

$$1\leq i_1<i_2<\ldots\ldots<i_r\leq n,$$

avem:

(3) $$P\left(\bigcap_{j=1}^{r} B_{i_j}\right)=\prod_{j=1}^{r} P(B_{i_j}),$$

unde:

$$B_k=A_k \quad \text{sau} \quad B_k=CA_k \quad ; \quad k=\overline{1,n}.$$

x.4 165

1.2. Definiția variabilei aleatoare

Definiția 8

Funcția $\xi : E \to X \subset R$ notată $x = \xi(e)$; $e \in E$, $x \in X$, se numește variabilă aleatoare discretă, dacă codomeniul $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este finit sau numărabil (n-natural finit sau $n \in N$) și

(4) $\{e \mid e \in E,\ x = \xi(e) = x_i\} \in \mathcal{K}$; $i = \overline{1,n}$.

Aceasta înseamnă că fiecărei valori $x_i \in X$ îi este asociat cel puțin un eveniment din corpul $\mathcal{K}$.

Cunoașterea valorilor $x_i \in X$, pe care le poate lua variabila aleatoare x, și a mulțimii evenimentelor E nu este suficientă pentru precizarea variabilei aleatoare x deoarece realizarea unui anumit eveniment $A \in E$ are loc cu o anumită probabilitate $P(A)$. Ținînd seama de definiția 8 putem afirma că fiecărei valori $x_k \in X$ îi este asociată o anumită probabilitate

$$p_k = P(x = x_k).$$

Prin această notație se înțelege probabilitatea evenimentului „$x = x_k$".

Pentru a vedea modul în care se precizează concret o variabilă aleatoare vom considera un cîmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$, cu $A_i \in \mathcal{K}$; $i = \overline{1,n}$, disjuncte două cîte două, și $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. O variabilă aleatoare $x : E \to X$ se dă prin tabloul de repartiție

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots & p_n \end{pmatrix}. \quad \xi_X$$

unde:

(5) $p_k = P(x = x_k)$; $i = \overline{1,n}$,

cu proprietatea:

(6) $$\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} P(x = x_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (x = x_k)\right) = P(E) = 1.$$

Definiția 9

O aplicație $\xi : E \to R$ notată $x = \xi(e)$; $e \in E$, $x \in R$, se numește variabilă aleatoare continuă dacă codomeniul $\xi(E)$ este o mulțime ~~nenumărabilă~~ de puterea continuului și pentru orice $u \in R$ are loc

Propoz 4.

a) $P(u_1 \le x < u_2) = \mathcal{P}_x(u_2) - \mathcal{P}_x(u_1)$

$$P(u_1 \le x < u_2) = P\big((u_1 \le x) \cap (x < u_2)\big) =$$

$$= P(u_1 \le x) + P(x < u_2) - \underbrace{P\big((u_1 \le x) \cup (x < u_2)\big)}_{=1} =$$

$$= P(u_1 \le x) + \mathcal{P}_x(u_2) - 1.$$

$$P\big((x < u_1) \cup (u_1 \le x)\big) = 1$$

$$P(x_1 < u_1) + P(u_1 \le x) = 1$$

$$P(u_1 \le x) = 1 - \mathcal{P}_x(u_1)$$

$$P(u_1 \le x < u_2) = 1 - \mathcal{P}_x(u_1) + \mathcal{P}_x(u_2) - 1.$$

$$P(u_1 \le x) - P\big((u_1 \le x) \cup (x < u_2)\big) =$$

$$= P(u_1 \le x) - P\big((u_1 \le x) \cup (x < u_1)\big) =$$

$$= P(u_1 \le x) - P((u_1 \le x) - P(x < u_1) = -\underline{P(x < u_1)}$$

166

(7) $\{e \mid e \in E,\ x = \xi(e) < u\} \in \mathcal{K}$.

Ca și în cazul variabilei aleatoare discrete se poate afirma că fiecărui interval $[u, u+du)$ îi este asociată o anumită probabilitate $p_x du$. Prin aceasta se înțelege că $p_x du$ este probabilitatea ca $x \in [u, u+du)$, pentru $x, u \in \mathcal{R}$.

Definiția 10

Se numește funcție de repartiție a variabilei aleatoare $x = \xi(e)$ o funcție de forma

(8) $\mathcal{P}_x(u) = P(x < u)$; $x, u \in \mathcal{R}$.

Propoziția 3

Funcția de repartiție are proprietățile:

a) $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{R}$, $u_2 \geq u_1$, atunci $\mathcal{P}_x(u_2) \geq \mathcal{P}_x(u_1)$;

b) $0 \leq \mathcal{P}_x(u) \leq 1$;

c) $\lim\limits_{u \to -\infty} \mathcal{P}_x(u) = 0$; $\lim\limits_{u \to +\infty} \mathcal{P}_x(u) = 1$.

Întrucît funcția de repartiție este de forma (8), proprietățile de mai sus rezultă din propoziția 2.

Funcția de repartiție este o funcție monoton crescătoare și mărginită, care are cel mult o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate de prima speță.

Propoziția 4

Dacă variabila aleatoare $x = \xi(e)$ are funcția de repartiție $\mathcal{P}_x(u)$, atunci, oricare ar fi $u_1 < u_2$, avem

a) $P(u_1 \leq x < u_2) = \mathcal{P}_x(u_2) - \mathcal{P}_x(u_1)$;

b) $P(u_1 < x < u_2) = \mathcal{P}_x(u_2) - \mathcal{P}_x(u_1) - P(x = u_1)$;

c) $P(u_1 < x \leq u_2) = \mathcal{P}_x(u_2) - \mathcal{P}_x(u_1) - P(x = u_1) + P(x = u_2)$;

d) $P(u_1 \leq x \leq u_2) = \mathcal{P}_x(u_2) - \mathcal{P}_x(u_1) + P(x = u_2)$.

Demonstrația este imediată pe baza definiției 10.

Propoziția 5

Dacă $u = a$ este un punct de continuitate al funcției de repartiție a variabilei aleatoare $x = \xi(e)$, atunci

(9) $P(x = a) = 0$.

D. Avem

$$P(x = a) = \lim_{n \to \infty} P\left(a \leq x < a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left[\mathcal{P}_x\left(a + \frac{1}{n}\right) - \mathcal{P}_x(a)\right] = 0. \quad \text{Q.e.d.}$$

Din această propoziție rezultă că $P(x=a)>0$ numai dacă $u=a$ este un punct de discontinuitate al funcției de repartiție.

Definiția 11

Dacă există o funcție reală $p_x(u)$, integrabilă pe $\mathcal{R}$, astfel încît

(10) $$\mathcal{P}_x(u) = \int_{-\infty}^{u} p_x(u)\,du\,,$$

atunci $p_x(u)$ se numește densitate de repartiție a variabilei aleatoare $x = \xi(e)$.

În cazul în care $x=\xi(e)$ este o variabilă aleatoare discretă integrala din (10) se înlocuiește cu o sumă.

Dacă $p_x(u)$ este continuă, atunci

(11) $$p_x(u) = \frac{d}{du}\mathcal{P}_x(u)\,.$$

Ținînd seama de proprietățile funcției de repartiție, rezultă

(12) $$p_x(u) \geq 0\ ;\quad u \in \mathcal{R}\,,$$

(13) $$P(a \leq x < b) = \int_a^b p_x(u)\,du\ ;\quad \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(u)\,du = 1\,.$$

În aplicații apar frecvent situații cînd intervin mai multe variabile aleatoare între care există sau nu anumite relații. Vom introduce în cele ce urmează o serie de noțiuni în cazul unui sistem de două variabile aleatoare.

Fie un cîmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$ și două variabile aleatoare $\xi : E \to \mathcal{R}$ și $\eta : E \to \mathcal{R}$, notate $x = \xi(e)$ și $y = \eta(e)$.

Definiția 12

Se numește funcție de repartiție bidimensională a variabilelor aleatoare $x = \xi(e)$, $y = \eta(e)$ o funcție de probabilitate de forma:

(14) $$\mathcal{P}_{x,y}(u,v) = P(x<u \text{ și } y<v)\ ;\quad x,y,u,v \in \mathcal{R}\,.$$

Propoziția 6

Funcția de repartiție bidimensională are proprietățile:

a) $\forall u_1, u_2 \in \mathcal{R}$, $u_2 > u_1$, atunci $\mathcal{P}_{x,y}(u_2,v) > \mathcal{P}_{x,y}(u_1,v)$;

x1 $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{R}$, $v_2 > v_1$ atunci $\mathcal{P}_{x,y}(u, v_2) > \mathcal{P}_{x,y}(u, v_1)$

b) $0 \leq \mathcal{P}_{x,y}(u,v) \leq 1$;

c) $\lim\limits_{u \to -\infty} \mathcal{P}_{x,y}(u,v) = 0$, $\lim\limits_{v \to -\infty} \mathcal{P}_{x,y}(u,v) = 0$;

$\lim\limits_{u \to \infty} \mathcal{P}_{x,y}(u,v) = \mathcal{P}_y(v)$, $\lim\limits_{v \to \infty} \mathcal{P}_{x,y}(u,v) = \mathcal{P}_x(u)$;

$\lim\limits_{u \to \infty} \lim\limits_{v \to \infty} \mathcal{P}_{x,y}(u,v) = 1$.

Funcția de repartiție bidimensională (în spațiul tridimensional - o suprafață) este: pentru orice u fixat, respectiv pentru orice v fixat, o funcție monoton crescătoare de v, respectiv de u, care are cel mult o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate de prima speță.

Ținînd seama de definiția 12, proprietățile 4, 5 se pot extinde, mutatis mutandis, și pentru cazul funcției de repartiție bidimensionale.

Definiția 13

Dacă există o funcție reală $p_{x,y}(u,v)$, integrabilă pe $\mathcal{R}^2$, astfel încît:

(15) $$\mathcal{P}_{x,y}(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} p_{x,y}(u,v)\,du\,dv,$$

atunci $p_{x,y}(u,v)$ se numește densitate de repartiție bidimensională a variabilelor aleatoare $x = \xi(e)$, $y = \eta(e)$.

Dacă $p_{x,y}(u,v)$ este continuă, atunci

(16) $$p_{x,y}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathcal{P}_{x,y}(u,v).$$

De asemenea ținînd seama de proprietățile funcției de repartiție, rezultă că:

(17) $p_{x,y}(u,v) \geq 0$; $u, v \in \mathcal{R}$;

(18) $$P(a \leq x < b \text{ și } c \leq y < d) = \int_a^b\int_c^d p_{x,y}(u,v)\,du\,dv;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(u,v)\,du\,dv = 1;$$

(19) $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(u,v)\,du = p_y(v) = \cancel{\lim_{u \to \infty}} \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{P}_y(v);$$

de 7 de 9

1.1 169

(20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x,y}(u,v)\,dv = p_x(u) = \cancel{\lim_{v\to\infty}} \frac{\partial}{\partial u}\mathcal{P}_x(u).$$

def def

Definiția 14

Variabilele aleatoare $x = \xi(e)$ și $y = \eta(e)$ se numesc statistic independente dacă:

(21) $$\mathcal{P}_{x,y}(u,v) = \mathcal{P}_x(u)\cdot\mathcal{P}_y(v),$$ sau

(22) $$p_{x,y}(u,v) = p_x(u)\cdot p_y(v).$$

Este evident că această definiție decurge din relația (2), respectiv definiția 7 de la 1.1.

Noțiunile de funcție de repartiție și densitate de repartiție se pot extinde și la vectori aleatori, considerați ca sisteme de n variabile aleatoare.

1.3 Valori medii pe mulțime

Pentru caracterizarea globală a unei variabile aleatoare și pentru evidențierea și a altor legități, în afară de funcția de repartiție, se utilizează valorile medii ale variabilelor aleatoare. Valorile medii, se știe, au origine intuitiv-concretă (de exemplu media aritmetică ponderată etc). În cele ce urmează vom da o definiție mai generală a valorii medii, pe care o vom particulariza după necesități:

Definiția 15

Fie o funcție $f: R \to R$. Numărul

(23) $$\mathcal{M}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, p_x(u)\,du,$$

în ipoteza că integrala este convergentă, este valoarea medie (pe mulțime) a funcției f în raport cu variabila aleatoare $x = \xi(e)$; $\xi: E \to R$.

Din această definiție rezultă imediat că valoarea medie pe mulțime se bucură de proprietatea de liniaritate pe mulțimea funcțiilor reale f.

Conform definiției 15 $\mathcal{M}\{f(x)\}$ este o medie ponderată, motiv pentru care se mai numește și valoare așteptată a funcției $f(x) = f[\xi(e)]$.

1.1 În cazul în care $x = \xi(e)$ este o variabilă aleatoare discretă integrala din (23) se înlocuiește cu o sumă.

<u>Definiția 16</u>

Pentru $f(u) = u^n$, n - număr natural, valoarea medie se numește moment de ordinul n al variabilei aleatoare ξ, și se notează

(24) $$\widetilde{x^n} = \mathcal{M}(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p_x(u)\,du.$$

Numărul

(25) $$m_{x^n} = \sqrt[n]{\widetilde{x^n}}$$

se numește medie de ordinul n a variabilei aleatoare ξ.

Pentru $n=1$ se obține media liniară

(26) $$\widetilde{x} = \mathcal{M}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u\, p_x(u)\,du = m_x.$$

Pentru $n=2$ se obține momentul de ordinul 2

(27) $$\widetilde{x^2} = \mathcal{M}(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p_x(u)\,du$$

și valoarea medie pătratică

(28) $$m_{x^2} = \sqrt{\widetilde{x^2}}.$$

<u>Definiția 17</u>

Pentru $f(u) = (u - m_x)^n$ valoarea medie se numește moment centrat de ordinul n al variabilei aleatoare ξ, și se notează

(29) $$\widetilde{\mathring{x}^n} = \mathcal{M}[(x - m_x)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_x)^n p_x(u)\,du.$$

Pentru $n=1$ se obține $\widetilde{\mathring{x}} = 0$.

Pentru $n=2$ se obține <u>varianța</u> variabilei aleatoare ξ

(30) $$Var(x) = \widetilde{\mathring{x}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_x)^2 p_x(u)\,du$$

(sau <u>dispersia</u> variabilei aleatoare ξ) și abaterea medie pătratică

(31) $$\sigma_x = \sqrt{Var(x)}.$$

Evident între varianță și momentul de ordinul 2 există relația:

(32) $$Var(x) = \widetilde{x^2} - m_x^2,$$

care se obține imediat efectuînd calculele în (30).

Definiția 18

Fie o funcție $f : R \times R \to R$. Numărul

(33) $$\mathcal{M}(f(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\, p_{x,y}(u,v)\, du\, dv,$$

în ipoteza că integrala este convergentă, este valoarea medie (pe mulțime) a funcției f în raport cu variabilele aleatoare $x = \xi(e)$ și $y = \eta(e)$; $\xi : E \to R$ și $\eta : E \to R$

Definiția 19

Pentru $f(u,v) = u^{n_1} v^{n_2}$ valoarea medie se numește moment mixt de ordinul n_1, n_2 al variabilelor aleatoare ξ, η și se notează

(34) $$\widetilde{x^{n_1} y^{n_2}} = \mathcal{M}(x^{n_1} y^{n_2}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u^{n_1} v^{n_2}\, p_{x,y}(u,v)\, du\, dv.$$

Pentru $n_1 = 1$; $n_2 = 0$, respectiv $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ se obțin mediile aritmetice m_x , m_y , iar pentru $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, respectiv $n_1 = 0$, $n_2 = 2$ momentele $\widetilde{x^2}$, $\widetilde{y^2}$.

Pentru $n_1 = n_2 = 1$ se obține intercorelația variabilelor aleatoare ξ, η care se notează

(35) $$\varphi_{x,y} = \widetilde{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot v\, p_{x,y}(u,v)\, du\, dv.$$

Definiția 20

Pentru $f(u,v) = (u - m_x)^{n_1} (v - m_y)^{n_2}$ valoarea medie se numește moment centrat mixt de ordinul n_1, n_2 al variabilelor aleatoare ξ, η și se notează :

(36) $$\widetilde{\mathring{x}^{n_1} \mathring{y}^{n_2}} = \mathcal{M}\left[(x - m_x)^{n_1} (y - m_y)^{n_2}\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_x)^{n_1} (v - m_y)^{n_2}\, p_{x,y}(u,v)\, du\, dv.$$

Pentru $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, respectiv $n_1 = 0$, $n_2 = 2$ se obțin $Var(x)$ și $Var(y)$.

Pentru $n_1 = n_2 = 1$ se obține covarianța variabilelor aleatoare ξ, η și se notează

(37) $$c_{x,y} = Cov(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (u - m_x)(v - m_y)\, p_{x,y}(u,v)\, du\, dv.$$

Efectuînd calculele în integrandul din (37) și ținînd seama de (19),(20) și de definiția (35) rezultă imediat .

(38) $\qquad \rho_{x,y} = \varphi_{x,y} - m_x m_y$.

<u>Definiția 21</u>

Variabile aleatoare $x = \xi(e)$, $y = \eta(e)$ se numesc necorelate dacă și numai dacă

(39) $\qquad \rho_{x,y} = 0$.

Din (37), (38) urmează că pentru variabilele aleatoare necorelate se poate scrie

(40) $\qquad \varphi_{x,y} = m_x \cdot m_y$.

<u>Propoziția 7</u>

Dacă variabilele aleatoare $x = \xi(e)$, $y = \eta(e)$ sînt statistic independente atunci sînt necorelate.

D. Într-adevăr ținînd seama de (22), relația (37) devine

$$\rho_{x,y} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u-m_x)(v-m_y)\,p_x(u)\,p_y(v)\,du\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(u-m_x)p_x(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}(v-m_y)\,p_y(v)dv = 0. \quad \text{Q.e.d.}$$

Reciproca nu are loc în general. Se spune că independența statistică este mai tare ca necorelația .

2. Procese stochastice

2.1. Definiția procesului stochastic

<u>Definiția 1</u>

Prin proces stochastic (semnal stochastic, semnal aleator), vom înțelege o variabilă aleatoare dependentă de timp $\xi : E \times T \to \mathcal{R}$, unde $T \subseteq \mathcal{R}$ este mulțimea de timp, și notată $x_t = \xi(e,t)$.

Pentru t fixat $x_t = \xi(e,t)$ este o variabilă aleatoare numită <u>eșantion</u> al procesului stochastic

Pentru e fixat $x(t) = \xi(e,t)$ este o funcție de timp numită <u>realizare</u> a procesului stochastic.

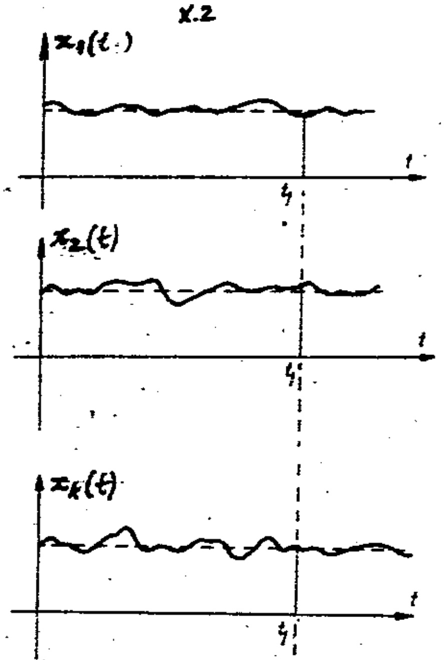

fig.1. Exemplu de proces stochastic

Exemplu

Fie o infinitate de termocupluri de acelaşi tip, situate în condiţii identice. Tensiunile electromotoare x_k, $k \in N$, sînt reprezentate grafic în fig.1. Pentru k fixat, $x_k(t)$ este o realizare a procesului stochastic.
Mulţimea realizărilor constituie procesul stochastic.
Pentru $t = t_1$ fixat, valorile $x_k(t_1)$, $k \in N$, reprezintă un eşantion.
Mulţimea eşantioanelor constituie procesul stochastic.

Definiţia 2

Pentru un t fixat se defineşte funcţia de repartiţie a procesului stochastic $x_t = \xi(e,t)$.

(1) $\mathcal{P}_x(u,t) = P(x_t < u)$; $x_t, u \in \mathcal{R}$; $t \in \mathcal{R}$

Dacă există o funcţie reală $p_x(u,t)$, integrabilă pentru $u \in \mathcal{R}$, astfel încît

(2) $\mathcal{P}_x(u,t) = \int_{-\infty}^{u} p_x(u,t)\,du$,

atunci $p_x(u,t)$ se numeşte densitate de repartiţie a procesului stochastic x_t.

Definiţia 3

Un proces stochastic se numeşte determinist dacă orice realizare a sa se produce cu probabilitate

(3) $P = 1$

Definiţia 4

Un proces stochastic se numeşte staţionar în sens restrîns dacă funcţia de repartiţie a procesului stochastic $x_t = \xi(e,t)$

este identică cu cea a procesului stochastic $x_{t+\tau} = \xi(e, t+\tau)$, pentru orice $t, \tau \in \mathcal{R}$, adică dacă

(4) $\mathcal{P}_x(u,t) = \mathcal{P}_x(u, t+\tau)$; $\forall t, \tau \in \mathcal{R}$; $u \in \mathcal{R}$

sau dacă

(5) $p_x(u,t) = p_x(u, t+\tau)$; $\forall t, \tau \in \mathcal{R}$; $u \in \mathcal{R}$.

<u>Propoziția 1</u>

Dacă un proces stochastic este staționar în sens restrîns atunci funcția de repartiție sau densitatea de repartiție sînt independente de timp.

D. Într-adevăr din (4), (5), pentru $\tau = -t$, se obțin

(6) $\mathcal{P}_x(u,t) = \mathcal{P}_x(u,0) \equiv \mathcal{P}_x(u)$; $\forall t \in \mathcal{R}$,

(7) $p_x(u,t) = p_x(u,0) = p_x(u)$; $\forall t \in \mathcal{R}$. Q.e.d.

Ca urmare orice valoare medie pe mulțime a unui proces stochastic staționar în sens restrîns nu depinde de timp.

De exemplu pentru momentul de ordinul n rezultă

(8) $\widetilde{x^n_t} = \mathcal{M}(x^n(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n p_x(u)\, du$ = constant.

Pentru două momente oarecare $t_1, t_2 \in \mathcal{R}$, pentru variabilele aleatoare $x_{t_1} = \xi(e,t_1)$, $x_{t_2} = \xi(e,t_2)$ se poate introduce noțiunea de repartiție bidimensională a procesului stochastic $x_t = \xi(e,t)$.

<u>Definiția 5</u> În cazul a două proc. aleat

Funcția de repartiție bidimensională a procesului stochastic $x_t = \xi(e,t)$ este o funcție de probabilitate, de forma

(9) $\mathcal{P}_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2) = P(x_{t_1} < u_1$ și $x_{t_2} < u_2)$.

Dacă există o funcție reală $p_{x,x}(u_1,u_2;t_1,t_2)$ integrabilă pentru $u_1, u_2 \in \mathcal{R}$, astfel încît

(10) $\mathcal{P}_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{u_1}\int_{-\infty}^{u_2} p_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2)\, du_1\, du_2$,

atunci $p_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2)$ se numește densitate de repartiție bidimensională a procesului stochastic.

În aceeași manieră se pot introduce funcțiile de repartiție și densitățile de repartiție de ordin superior.

$\mathcal{P}_{x,y}(u,v,t_1,t_2) = P(x_{t_1} < u \cap y_{t_2} < v)$

$\mathcal{P}_{x,y}(u,v,t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} p_{x,y}(u,v,t_1,t_2)\, du\, dv$

x.2

<u>Propoziția 2</u> și cazul 175 a două proc. aleat

Dacă procesul stochastic $x_t = \xi(e,t)$ este staționar în sens restrîns, atunci funcția de repartiție bidimensională, respectiv densitatea de repartiție bidimensională depind de $t_1 - t_2 = \tau$.

D. Conform definiției (4), care se extinde în mod corespunzător, pentru orice $t, \theta \in \mathbb{R}$ se pot scrie relațiile

$$\mathcal{P}_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = \mathcal{P}_{x,x}(u_1, u_2, t_1+\theta, t_2+\theta).$$

$$p_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = p_{x,x}(u_1, u_2, t_1+\theta, t_2+\theta).$$

Pentru $\theta = -t_2$ și $\tau = t_1 - t_2$ rezultă

(11) $$\mathcal{P}_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = \mathcal{P}_{x,x}(u_1, u_2, t_1 - t_2, 0) = \mathcal{P}_{x,x}(u_1, u_2, \tau),$$

(12) $$p_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = p_{x,x}(u_1, u_2, t_1 - t_2, 0) = p_{x,x}(u_1, u_2, \tau).$$

Q.e.d.

Indep. stat.

2.2. Valori medii pe mulțime și temporale

Valorile medii pe mulțime, în general funcții de timp, se introduc ca și în cazul variabilelor aleatoare.

În cele ce urmează ne vom opri numai la valorile medii care joacă un rol deosebit în descrierea transferului proceselor stochastice prin sistemele dinamice.

Auto corelatie

<u>Definiția 6</u>

Funcția de autocovarianță $c_{x,x}(t_1,t_2)$ a procesului stochastic $x_t = \xi(e,t)$ se definește ca valoarea medie pe mulțime, de forma

(13) $$c_{x,x}(t_1,t_2) = \overline{\overset{\circ}{x}_{t_1}\overset{\circ}{x}_{t_2}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_1 - \overline{x_{t_1}})(u_2 - \overline{x_{t_2}})\,p_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2)\,du_1\,du_2.$$

Intercorelatie

<u>Definiția 7</u>

Funcția de inter covarianță $c_{x,y}(t_1,t_2)$ a proceselor stochastice $x_t = \xi(e,t)$ și $y_t = \eta(e,t)$ se definește ca valoarea medie pe mulțime de forma

(14) $$c_{x,y}(t_1,t_2) = \overline{\overset{\circ}{x}_{t}\overset{\circ}{y}_{t}} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u - \overline{x_t})(v - \overline{y_t})\,p_{x,y}(u,v,t_1,t_2)\,du\,dv.$$

– Staționaritate în sens restrâns.

$$P_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = P_{x,x}(u_1, u_2, t_1+\theta, t_2+\theta)$$

$$P_{x,y}(u, v; t_1, t_2) = P_{x,y}(u, v; t_1+\theta, t_2+\theta)$$

– Independența statistică

$$P_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2) = P_x(u_1, t_1)\, P_x(u_2, t_2)$$

$$P_{x,y}(u, v; t_1, t_2) = P_x(u, t_1)\, P_y(v, t_2)$$

– Funcția de autocorelație

$$\varphi_{x,x}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2\, p_{x,x}(u_1, u_2, t_1, t_2)\, du_1\, du_2$$

– Funcția de intercorelație

$$\varphi_{x,y}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u v\, p_{x,y}(u, v; t_1, t_2)\, du\, dv$$

Evident, ținînd seama de (1.38) putem scrie și în aceste cazuri: Necorelate

(15) $\quad C_{x,x}(t_1,t_2)=\varphi_{x,x}(t_1,t_2)-\widetilde{x_{t_1}}\cdot\widetilde{x_{t_2}}$,

(16) $\quad C_{x,y}(t_1,t_2)=\varphi_{x,y}(t_1,t_2)-\widetilde{x_{t_1}}\cdot\widetilde{y_{t_2}}$,

în care $\varphi_{x,x}(t_1,t_2)$ și $\varphi_{x,y}(t_1,t_2)$ sînt funcțiile de auto- și intercorelație ale proceselor $x_t=\xi(e,t)$ și $y_t=\eta(e,t)$, v.(1.35).

Propoziția 3

Dacă procesele stochastice $x_t=\xi(e,t)$, $y_t=\eta(e,t)$ sînt staționare în sens restrîns, atunci funcțiile de auto- și intercorelație depind de $\tau=t_1-t_2$.

D. Într-adevăr, din (12), (13), (14) rezultă

(17) $\quad \varphi_{x,x}(t_1,t_2)=\varphi_{x,x}(t_1-t_2,0)=\varphi_{x,x}(\tau)$,

(18) $\quad \varphi_{x,y}(t_1,t_2)=\varphi_{x,y}(t_1-t_2,0)=\varphi_{x,y}(\tau)$. Q.e.d.

Definiția 8

Un proces stochastic $x_t=\xi(e,t)$ se numește staționar în sens larg dacă

(19) $\quad \widetilde{x_t}=\text{constant}$

(20) $\quad \varphi_{x,x}(t_1,t_2)=\varphi_{x,x}(\tau)\quad;\quad \tau=t_1-t_2$.

Propoziția 4

Dacă un proces stochastic $x_t=\xi(t)$ este staționar în sens restrîns, atunci este staționar în sens larg.

D. Într-adevăr din (8), pentru $n=1$ se obține (19), iar conform propoziției 3 relația (20) are loc. Q.e.d.

Reciproca acestei propoziții nu are loc în general. Se spune că staționaritatea în sens restrîns este mai tare ca staționaritatea în sens larg.

În afara valorilor medii pe mulțime, pentru caracterizarea oricărei realizări a unui proces stochastic se utilizează mediile temporale.

Definiția 9

Media temporală de ordinul n a realizării $x(t)$ se definește prin

(21) $\quad \overline{x^n(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^n(t)\,dt$,

Definiția 10 (ipoteza ergodică)

Un proces stochastic staționar $x_t = \xi(e,t)$ se numește ergodic dacă evenimentul

(22) $\qquad \widetilde{x_t^n} = \overline{x^n(t)}$

are loc cu probabilitate $P=1$ (eveniment sigur).

În virtutea ipotezei ergodice rezultă că orice realizare $x(t)$; $t\in\mathbb{R}$, a unui proces stochastic staționar și ergodic, poate fi utilizat pentru caracterizarea procesului însuși.

Ipoteza ergodică are o deosebită însemnătate practică deoarece cunoscînd o singură realizare a unui proces stochastic pe o durată de timp suficient de mare se pot trage concluzii asupra procesului în întregime. Verificarea practică a ipotezei ergodice este dificilă deoarece atît la media pe mulțime cît și la media temporală, limitele de integrare, în condiții concrete nu pot fi decît finite.

Aplic

2.3. Procesul stochastic gaussian

Un proces stochastic gaussian, staționar în sens restrîns are densitatea de repartiție de forma

$$p_x(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \cdot e^{-\frac{(u-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad ; \ m_x, \sigma_x \text{ - constante.}$$

Media liniară a procesului este

$$\widetilde{x(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{-\frac{(u-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, du = m_x .$$

Varianța procesului este

$$\widetilde{(x(t)-m_x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{+\infty} (u-m_x)^2 \cdot e^{-\frac{(u-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\, du = \sigma_x^2$$

După cum se poate observa, un proces stochastic staționar normal este complet caracterizat de media liniară m_x și dispersia σ_x^2. Aceste două valori se pot determina relativ ușor și pe cale experimentală.

Un proces stochastic normal, dacă este staționar în sens larg este staționar și în sens restrîns. Verificarea acestei afirmații este imediată. Așadar în acest caz are loc reciproca propoziției 4

Densitatea de repartiție bidimensională a unui proces stochastic staționar normal, de medie aritmetică nulă, are expresia:

$$p_{x,x}(u_1,u_2,\tau)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2(\tau))}\left[u_1^2-2\rho^2(\tau)u_1u_2+u_2^2\right]},$$

unde

$$\rho(\tau)=\frac{1}{\sigma_x^2}\,Cov\left[x(t),x(t+\tau)\right]=\frac{1}{\sigma_x^2}\left[\varphi_{x,x}(\tau)-m_x^2\right]=\frac{\varphi_{x,x}(\tau)}{\sigma_x^2}$$

este covarianța normată. În ipoteza că procesul este ergodic m_x, σ_x, $\varphi_{x,x}(\tau)$, respectiv $\rho(\tau)$ se pot determina utilizînd o singură realizare a procesului cu ajutorul mediilor temporale.

Foarte multe procese stochastice care se întîlnesc în aplicații se încadrează în categoria proceselor gaussiene.

3. Corelația temporală

3.1. Funcția de autocorelație temporală

Definiția 1

Funcția de autocorelație temporală a unei realizări $x(t)$ a unui proces stochastic se definește prin

(1) $$r_{x,x}(\tau)=\overline{x(t)\,x(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,x(t\pm\tau)\,dt.$$

Această funcție pune în evidență dependența dintre $x(t)$ și varianta ei decalată în timp $x(t\pm\tau)$ - fig 2.- pentru orice $t,\tau\in\mathcal{R}$.

Funcția de autocorelație temporală este o noțiune deosebit de utilă, atît în studiul teoretic cît și în studiul experimental al proceselor stochastice, în special în cazul proceselor staționare ergodice. Totuși pentru funcția de autocorelație temporală a unei realizări oarecare $x(t)$ nu se poate preciza o expresie analitică, deoarece $x(t)$ nu este apriorie cunoscut.

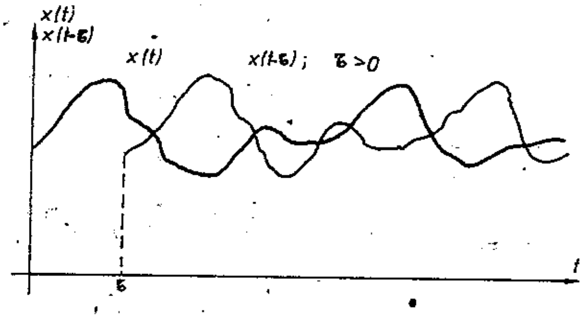

fig 2 - Exemplu de realizare a unui proces stochastic și o variantă întîrziată

După producerea realizării x(t) funcția de autocorelație temporală poate fi măsurată, utilizînd corelatoare, a căror funcționare se bazează pe relația (1).

Măsurare

Spre deosebire de funcția de autocorelație temporală, funcția de autocorelație obținută ca medie pe mulțime se poate determina analitic, dacă se cunoaște densitatea de repartiție a procesului.

Dacă se admite ipoteza ergodică, atunci avem

(2) $k_{x,x}(\tau) = \gamma_{x,x}(\tau) \quad ; \quad \tau \in \mathcal{R}.$

Este evident că ipoteza ergodică aduce o serie de simplificări. Din punct de vedere teoretic există o singură funcție de autocorelație $k_{x,x}(\tau)$ care poate fi definită în două moduri : ca medie pe mulțime și ca medie temporală; în funcție de necesități și de tratarea matematică se utilizează oricare din cele două definiții.

Din punct de vedere experimental, se poate investiga un proces stochastic prin analiza pe o durată suficient de mare de timp a unui număr redus de realizări ale procesului stochastic. Rezultatele obținute caracterizează întregul proces stochastic.

Teorema 1

Funcția de autocorelație temporală are următoarele proprietăți

(3) $k_{x,x}(\tau) = k_{x,x}(-\tau) \quad ; \quad \forall \tau \in \mathcal{R} ;$

(4) $k_{x,x}(0) = \overline{x^2(t)} \quad ;$

(5) $$\lim_{\tau\to\infty} k_{x,x}(\tau) = \left(\overline{x(t)}\right)^2;$$

(6) $$|k_{x,x}(\tau)| \le k_{x,x}(0)\ ; \quad \forall \tau \in \mathcal{R}.$$

D. Proprietatea (3) rezultă imediat din (1) dacă se schimbă τ cu $-\tau$. Proprietatea (4) se obține din (1) pentru $\tau=0$. Pentru a demonstra relația (5) vom ține seama de faptul că pentru τ foarte mare $x(t)$ și $x(t+\tau)$ sînt statistic independente. În aceste condiții

$$p_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2) = p_x(u_1,t_1)\,p_x(u_2,t_2)\ ;\quad t_1-t_2=\tau,$$

și deci

$$\lim_{\tau\to\infty} k_{x,x}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \varphi_{x,x}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u_1 u_2\, p_{x,x}(u_1,u_2,t_1,t_2)\,du_1 du_2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u_1 p_x(u_1,t_1)\,du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} u_2 p_x(u_2,t_2)\,du_2 = \left(\overline{x(t_1)}\right)^2.$$

Pentru a demonstra relația (6) se pornește de la inegalitatea evidentă

$$[x(t) \mp x(t\pm\tau)]^2 \ge 0.$$

Dezvoltînd și trecînd la medii temporale se scriu succesiv inegalitățile:

$$-x^2(t) - x^2(t\pm\tau) \le 2x(t)x(t\pm\tau) \le x^2(t) + x^2(t\pm\tau)$$
$$-\overline{x^2(t)} - \overline{x^2(t\pm\tau)} \le 2\,\overline{x(t)x(t\pm\tau)} \le \overline{x^2(t)} + \overline{x^2(t\pm\tau)}$$
$$-2\,\overline{x^2(t)} \le 2\,k_{x,x}(\tau) \le 2\,\overline{x^2(t)}.$$

Din ultima relație rezultă imediat inegalitatea (6). Q.e.d.

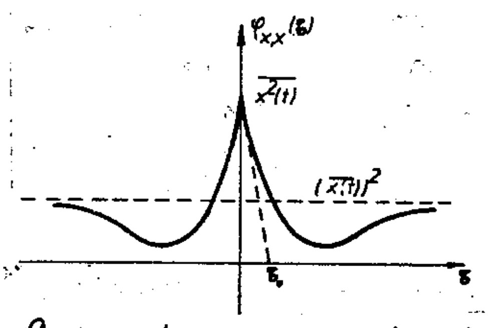

fig 3 - Exemplu de funcție de autocorelație.

Ca exemplu s-a considerat graficul unei funcții de autocorelație în fig 3.

Panta $\left.\dfrac{dk_{x,x}(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}$ este o măsură a coerenței interne a procesului stochastic. Timpul τ_0 (subtangenta la $\tau=0$) - fig 3 - se numește timp de coerență. Valori τ_0 mari indică dependențe între $x(t)$ și $x(t\pm\tau)$, respectiv o tendință de conservare. Valori τ_0 mici indică o slabă coerență, respectiv o slabă dependență între $x(t)$ și $x(t\pm\tau)$.

Din forma și valorile funcției de autocorelație nu se pot trage concluzii asupra desfășurării în timp a realizării $x(t)$, deoarece funcția de autocorelație este o medie pe mulțime sau medie temporală și ca atare are un caracter global.

3.2. Funcția de intercorelație temporală

Definiția 2

Funcția de intercorelație temporală a realizărilor $x(t)$ și $y(t)$ ale proceselor stochastice $x(t)=\xi(e,t)$ și $y(t)=\eta(e,t)$ se definește prin:

(7) $$k_{x,y}(\tau)=\overline{x(t)y(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)\,y(t+\tau)\,dt,$$

sau

(8) $$k_{x,y}(\tau)=\overline{x(t-\tau)y(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t-\tau)\,y(t)\,dt,$$

respectiv

(9) $$k_{y,x}(\tau)=\overline{y(t)x(t+\tau)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)\,x(t+\tau)\,dt,$$

sau

(10) $$k_{y,x}(\tau)=\overline{y(t-\tau)x(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t-\tau)\,x(t)\,dt.$$

Funcția de intercorelație temporală a realizărilor $x(t)$ și $y(t)$ este o măsură a dependenței statistice dintre acestea. Dacă se admite ipoteza ergodică atunci

(11) $$k_{x,y}(\tau)=\varphi_{x,y}(\tau)\quad;\quad\tau\in\mathcal{R}.$$

Teorema 2

Funcția de intercorelație temporală are următoarele proprietăți:

(12) $$k_{x,y}(\tau)=k_{y,x}(-\tau)\quad;\quad\forall\,\tau\in\mathcal{R};$$

(13) $$k_{x,y}(0)=\overline{x(t)y(t)}\quad;$$

(14) $\lim_{\tau \to \infty} k_{x,y}(\tau) = \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}$;

(15) $|k_{x,y}(\tau)| \le \frac{1}{2}\left(\overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)}\right)$; $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

Demonstrația relațiilor (12)-(15) se face ca la teorema 1.

3.3 Cazul semnalelor deterministe

Aplic

Funcția de autocorelație sau de intercorelație se poate utiliza și în cazul semnalelor deterministe, a căror evoluție în timp este aprioric cunoscută.

Pentru un semnal $x(t)$, periodic, funcția de autocorelație se definește prin

(16) $$k_{x,x}(\tau) = \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x(t)\, x(t \pm \tau)\, dt ,$$

unde T_0 este perioada semnalului.

Pentru un semnal sinusoidal

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad , \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

putem scrie

$$k_{x,x}(\tau) = \frac{X_m^2}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} \sin(\omega_0 t - \varphi)\sin(\omega_0 t \pm \omega_0 \tau - \varphi)\, dt =$$

$$= \frac{X_m^2}{4\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin(\omega_0 t - \varphi)\sin(\omega_0 t \pm \omega_0\tau - \varphi)\, d(\omega_0 t) = \frac{1}{2} X_m^2 \cos\omega_0\tau .$$

Se remarcă faptul că funcția de autocorelație conține informații asupra amplitudinii și frecvenței semnalului $x(t)$ prin faptul că $k_{x,x}(\tau)$ este periodică de aceeași perioadă cu $x(t)$, dar nu conține informații privitoare la fază.

Funcția de intercorelație a două semnale de aceeași perioadă T_0

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \alpha),$$
$$y(t) = Y_m \sin(\omega_0 t - \beta)$$

este

$$k_{x,y}(\tau) = \frac{X_m Y_m}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} \sin(\omega_0 t - \alpha)\sin[\omega_0(t+\tau) - \beta]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} X_m Y_m \cos(\omega_0\tau - \varphi) \quad ; \quad \varphi = \alpha - \beta .$$

În acest caz funcția de intercorelație conține informații asupra defazajului între semnalele $x(t)$ şi $y(t)$.

Faptul că periodicitatea semnalelor $x(t)$ şi $y(t)$ se conservă în funcţiile de auto- şi intercorelaţie ne permite să tragem următoarea concluzie foarte importantă: dacă procesele stochastice x_t, y_t conţin şi funcţii periodice deterministe, atunci acest fenomen de periodicitate se regăseşte şi în funcţiile de auto- şi intercorelaţie.

Pentru un semnal determinist aperiodic $x(t)$, funcţia de autocorelaţie se defineşte prin

(17) $$k_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t \pm \tau)\, dt \,,$$

cu condiţia ca $x(t)$ să fie absolut integrabilă.

Se remarcă faptul că în timp ce funcţia de autocorelaţie a proceselor stochastice şi a funcţiilor periodice, dimensional, reprezintă o „putere", cea a funcţiilor deterministe aperiodice reprezintă o „energie".

Pentru

$$x(t) = X_0\, e^{-\alpha t}\, \sigma(t) \,,$$

avem

$$k_{x,x}(\tau) = X_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t}\, \sigma(t) \cdot e^{-\alpha(t-\tau)}\, \sigma(t-\tau)\, dt =$$

$$= X_0^2\, e^{\alpha\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2\alpha t}\, dt = \frac{X_0^2}{2\alpha}\, e^{-\alpha\tau} \quad ; \quad \tau \geq 0 .$$

3.4. Relaţii „intrare-ieşire"

Ultima problemă pe care o vom examina în acest subcapitol este aceea a transferului proceselor stochastice staţionare ergodice prin elemente raţionale de transfer.

Teorema 3

Dacă pentru realizările $x(t), y(t), z(t)$ avem

(18) $$z(t) = x(t) \pm y(t) \,,$$

atunci

(19) $$\overline{z(t)} = \overline{x(t)} \pm \overline{y(t)} \,,$$

(20) $$k_{z,z}(\tau) = k_{x,x}(\tau) + k_{y,y}(\tau) \pm k_{x,y}(\tau) \pm k_{y,x}(\tau) .$$

D. Relația (19) rezultă imediat în virtutea liniarității mediei pe mulțime sau temporale.

Pentru a demonstra relația (20) se scrie:

$$k_{z,z}(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)} = \overline{[x(t)\pm y(t)][x(t+\tau)\pm y(t+\tau)]} =$$

$$= \overline{x(t)x(t+\tau)} \pm \overline{y(t)x(t+\tau)} \pm \overline{x(t)y(t+\tau)} + \overline{y(t)y(t+\tau)} =$$

$$= k_{x,x}(\tau) + k_{y,y}(\tau) \pm k_{x,y}(\tau) \pm k_{y,x}(\tau). \quad \text{Q.e.d.}$$

Dacă procesele stochastice $x_t = \xi(e,t)$ și $y_t = \eta(e,t)$ sînt statistic independente sau necorelate, atunci

(21) $\quad Cov\,(x_t, y_t) = 0$

și

(22) $\quad k_{x,y}(\tau) = k_{y,x}(\tau) = \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}.$

În aceste condiții relația (20) devine

(23) $\quad k_{z,z}(\tau) = k_{x,x}(\tau) + k_{y,y}(\tau) \pm 2\,\overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}.$

Dacă cel puțin unul din procese are valoare medie nulă, adică

(24) $\quad \overline{x(t)} = 0 \quad$ sau $\quad \overline{y(t)} = 0,$

atunci relația (23) devine

(25) $\quad k_{z,z}(\tau) = k_{x,x}(\tau) + k_{y,y}(\tau).$

În cazul unui amestec de semnale - unul determinist periodic de valoare medie nulă și celălalt stochastic, în ipoteza că sînt statistic independente, relația (25) rămîne valabilă.

Pentru

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

și y - stochastic, avem

$$k_{z,z}(\tau) = \frac{1}{2} X_m^2 \cos\omega_0\tau + k_{y,y}(\tau).$$

Ținînd seama de proprietățile funcției de autocorelație $k_{y,y}(\tau)$ și anume că pentru $\tau \to \infty$, $k_{y,y}(\tau) \to \left(\overline{y(t)}\right)^2$, rezultă că pentru τ suficient de mare avem

$$k_{z,z}(\tau) \cong \frac{1}{2} X_m^2 \cos\omega_0\tau + \left(\overline{y(t)}\right)^2.$$

Se trage concluzia că dacă un semnal stochastic conține o componentă periodică deterministă, aceasta este scoasă în evidență de funcția sa de autocorelație.

Fie un R-element descris de produsul de convoluție

(26) $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,u(t-\theta)\,d\theta=\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\theta)\,u(\theta)\,d\theta,$$

unde $g(t)$ este răspunsul la impuls al R-elementului, considerat pentru generalitate necauzal.

Vom presupune că $u(t)$ este o realizare al unui proces stochastic. Se poate arăta că în acest caz și $y(t)$ este o realizare a unui proces stochastic.

<u>Teorema 4</u>

Între realizările $u(t)$ și $y(t)$ ale intrării și ieșirii unui R-element există următoarele relații

(27) $$\overline{y(t)}=\overline{u(t)}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,d\theta,$$

(28) $$k_{u,y}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-\theta)\,k_{u,u}(\theta)\,d\theta=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,k_{u,u}(\tau-\theta)\,d\theta,$$

(29) $$k_{y,y}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\,k_{u,u}(\tau+\theta-\eta)\,d\eta\,d\theta,$$

(30) $$k_{y,y}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-\theta)\,k_{y,u}(\theta)\,d\theta=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,k_{y,u}(\tau-\theta)\,d\theta.$$

D. Pentru a demonstra relația (27) se scrie

$$\overline{y(t)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,u(t-\theta)\,d\theta=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\theta)\,dt\right)d\theta=\overline{u(t)}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,d\theta.$$

Vom demonstra acum relațiile (28),(29).

$$k_{u,y}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau)\,y(t)\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta')\,u(t-\theta')\,d\theta'\,dt=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-\theta)\,u(t-\tau)\,u(t-\tau+\theta)\,d\theta\,dt=$$

$(\tau-\theta'=\theta\ ,\ \ \theta'=\tau-\theta,\ d\theta'=-d\theta\ ,\ \ \theta'=-\infty,\ \theta=+\infty,\ \theta'=\infty,\ \theta=-\infty)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{g(\tau-\theta)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T-\tau}^{T-\tau} u(t')\,u(t'+\theta)\,dt'\right\}d\theta=$$

$(t-\tau=t',\ dt=dt',\ t=-T,\ t'=-T-\tau,\ t=T,\ t'=T-\tau)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau-\theta)\, k_{u,u}(\theta)\, d\theta .$$

$$k_{y,y}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t-\tau)\,y(t)\,dt =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\,u(t-\tau-\theta)\,d\theta\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\,u(t-\eta)\,d\eta\right\}dt =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau-\theta)\,u(t-\eta)\,dt\,d\eta\,d\theta =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, k_{u,u}(\tau+\theta-\eta)\,d\eta\,d\theta .$$

Pentru a demonstra (30) vom pune relația (28) sub forma

$$k_{u,y}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, k_{u,u}(\tau-\eta)\,d\eta ,$$

sau

$$k_{u,y}(\tau+\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, k_{u,u}(\tau+\theta-\eta)\,d\eta ; \quad \forall\theta\in\mathcal{R}.$$

Ținînd seama de ultima ecuație, (29) devine

$$k_{y,y}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\, k_{u,y}(\tau+\theta)\,d\theta . \tag{31}$$

Dar $k_{u,y}(\tau)=k_{y,u}(-\tau)$ și $k_{y,y}(\tau)=k_{y,y}(-\tau)$ astfel că din (31) rezultă imediat (30). Q.e.d.

În cazul în care semnalele $u(t)$ și $y(t)$ sînt cauzale, iar R-elementul realist, ecuațiile (27)–(30) rămîn valabile, cu modificările adecvate ale limitelor de integrare.

4. Metoda frecvențială

Studiul proceselor stochastice în domeniul frecvențelor este practic o necesitate avînd în vedere larga utilizare a metodei frecvențiale în teoria sistemelor. La aplicarea metodei frecvențiale trebuie să se aibă în vedere faptul că nu se dispune de o expresie analitică pentru o realizare $x(t)$ a unui proces stochastic. Ca urmare nu se poate determina densitatea spectrală $X(j\omega)$ sau densitatea de amplitudine $|X(j\omega)|$, ca în cazul semnalelor deterministe. Se poate utiliza însă transformata Fourier a functiei de autocorelație pentru caracterizarea spectrală a realizării $x(t)$. Este clar de la bun început că cu ajutorul acestei transformate nu se pot face aprecieri asupra spectrului de amplitudine a realizării $x(t)$, deoarece funcția de autocorelație are caracter global (este o valoare medie).

Pentru ca transformata Fourier a realizarii $x(t)$ să existe trebuie ca $x(t)$ să fie absolut integrabil. Avînd în vedere faptul că în general $\overline{x(t)} \neq 0$, rezultă că $x(t)$ nu admite o transformată Fourier. O posibilitate de abordare matematică a acestei probleme o constituie ipoteza lui Wiener că media pătratică temporală

(1) $$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$$

există și este finită. Aceasta revine la ipoteza că $x(t)$ este de pătrat integrabil. Această ipoteză este mai slabă ca absoluta integrabilitate, iar transformata care se poate obține se numește transformată Fourier-Plancherel (vezi anexa C.6).

4.1. Densitatea spectrală de putere

Pentru a introduce această noțiune vom considera o realizare $x(t)$ a unui proces stochastic și funcția trunchiată temporal

(2) $$x_T(t) = x(t)[\sigma(t+T) - \sigma(t-T)]\ ; \quad T \in \mathcal{R}.$$

unde $\sigma(t)$ este funcția treaptă unitară.

Transformata Fourier a funcției (2) este

(3) $$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\ ;\quad x_T(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Pentru a calcula media pătratică temporală - relația (1), procedăm după cum urmează

(4) $$\overline{x^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(j\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega\right] dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_T(j\omega)\int_{-T}^{T} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt\, d\omega =$$

x'4.

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(j\omega)\, X_T(-j\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{X_T(j\omega) X_T(-j\omega)}{2T}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{2T}\, d\omega .$$

Definiția 1

Funcția

(5) $$S_{x,x}(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{2T}$$

se numește densitate spectrală de putere a procesului stochastic staționar și ergodic $x_t = \xi(e,t)$.

Denumirea este justificată prin faptul că $S_{x,x}(j\omega)$ depinde de densitatea spectrală $X_T(j\omega)$ și din punct de vedere dimensional $S_{x,x}(j\omega)$ este o „putere".

Teorema 1 (Wiener - Hincin)

Densitatea spectrală de putere $S_{x,x}(j\omega)$ este transformata Fourier - Plancherel a funcției de autocorelație $k_{x,x}(\tau)$.

D. Așadar trebuie demonstrat că

(6) $$S_{x,x}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{x,x}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

în ipoteza că $\overline{x^2(t)}$ există și este finită.

În conformitate cu definiția (5) putem scrie

$$S_{x,x}(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t_1)\, e^{-j\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^{T} x(t_2)\, e^{j\omega t_2} dt_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t_1)\, x(t_2)\, e^{-j\omega(t_1-t_2)} dt_2 \right\} dt_1 =$$

$(t_1 - t_2 = \tau\ ,\ dt_1 = d\tau)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t_2)\, x(t_2+\tau)\, dt_2 \right\} e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} k_{x,x}(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau . \qquad \text{Q.e.d.}$$

Teorema 2

Densitatea spectrală de putere are următoarele proprietăți

a) $S_{x,x}(j\omega)$ este funcție reală de argument ω^2 ;

b) $S_{x,x}(j\omega)$ este funcție pară și nenegativă ;

x-4. 189.

c) $r_{x,x}(0) = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,x}(j\omega)d\omega.$

D. Faptul că $S_{x,x}(j\omega)$ este o funcție reală de argument ω^2 rezultă imediat din definiția (5). Într-adevăr, presupunînd că $X_T(j\omega)$ este o fracție rațională de forma

(7) $$X_T(j\omega) = K\frac{\prod_{1}^{m}(j\omega - z_i)}{\prod_{1}^{n}(j\omega - p_k)} \; ; \quad m,n \in N,$$

unde z_i și p_k sînt zerourile și polii reali sau complex conjugați ai funcției $X_T(j\omega)$, putem scrie

(8) $$X_T(j\omega)X_T(-j\omega) = K^2\frac{\prod_{1}^{m}(j\omega - z_i)(-j\omega - z_i)}{\prod_{1}^{n}(j\omega - p_k)(-j\omega - p_k)} = K^2\frac{\prod_{1}^{m}(\omega^2 + z_i^2)}{\prod_{1}^{n}(\omega^2 + p_k^2)}.$$

Tot din definiția (5) rezultă că $S_{x,x}(j\omega)$ este funcție pară. În conformitate cu teorema 1, are loc

(9) $$r_{x,x}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,x}(j\omega)\cdot e^{j\omega\tau}d\omega.$$

Pentru $\tau = 0$ se obține proprietatea c). Q.e.d.

4.2 Densitatea interspectrală de putere

Definiția 2

Funcția

(10) $$S_{x,y}(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{X_T(j\omega)Y_T(-j\omega)}{2T}$$

se numește densitate interspectrală de putere a proceselor stochastice staționare și ergodice $x_t = \xi(e,t)$, $y_t = \eta(e,t)$.

În această definiție

(11) $$y_T(t) = y(t)[\sigma(t+T) - \sigma(t-T)],$$

(12) $$Y_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_T(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} y(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Teorema 3 (Wiener - Hincin)

Densitatea interspectrală de putere $S_{x,y}(j\omega)$ este transformata Fourier-Plancherel a funcției de intercorelație $r_{x,y}(\tau)$.

Demonstrația este analoagă cu cea de la teorema 1.

Așadar

(13) $$S_{x,y}(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} k_{x,y}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad ,$$

(14) $$k_{x,y}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,y}(j\omega)\,e^{j\omega\tau}d\omega \; .$$

Teorema 4

Densitatea interspectrală de putere are următoarele proprietăți

a) $S_{x,y}(j\omega)$ este o funcție complexă care satisface identitatea

(15) $S_{x,y}(j\omega) = S_{y,x}(-j\omega)$;

b) $k_{x,y}(0) = \overline{x(t)y(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,y}(j\omega)\,d\omega$.

D. În general $S_{x,y}(j\omega)$ este o funcție complexă. Acest lucru rezultă din definiția (10) și implică faptul că $S_{x,y}(j\omega)$ conține informații despre defazajul dintre $x(t)$ și $y(t)$. Identitatea (15) rezultă imediat din relațiile (3.12) și (13). În fine proprietatea b se obține pentru $\tau=0$ din (14). Q.e.d.

4.3 Clasificarea semnalelor stochastice

După extinderea spectrului de frecvențe în densitatea spectrală de putere, semnalele stochastice pot fi de următoarele tipuri:

a. Zgomot „alb". Aceste semnale conțin în mod uniform toate frecvențele spectrului – fig 4. Așadar

$$S_{x,x}(j\omega)=1 \quad ; \quad k_{x,x}(\tau)=\delta(\tau).$$

Timpul de coerență a zgomotului alb este nul. Rezultă de aici că nu există nici o corelație între realizările $x(t)$ și $x(t\pm\tau)$ pentru orice $\tau\neq t$. Din acest motiv zgomotul alb se mai numește proces stochastic pur.

b. Zgomot de „bandă largă" (numit și zgomot alb de bandă limitată). Aceste semnale au un spectru de frecvențe aproximativ uniform într-un interval de frecvențe $[-\omega_0, \omega_0]$. Ca exemplu, fig 5, se poate aminti

$$S_{x,x}(j\omega)=\frac{2K\omega_0}{\omega^2+\omega_0^2} \quad ; \quad k_{x,x}(\tau)=Ke^{-\omega_0|\tau|} \; ; \; \omega_0>0 .$$

Un astfel de semnal se poate obține filtrînd un zgomot alb cu ajutorul unui filtru „trece-jos".

c. Zgomot „colorat". Aceste semnale au un spectru de frecvențe de bandă largă, limitat inferior și superior la un interval de frecvențe $|\omega_1| \le |\omega| \le |\omega_2|$ – fig 6.

d. Zgomot de „bandă îngustă". Aceste semnale au un spectru de frecvențe într-o bandă foarte îngustă – fig 7.

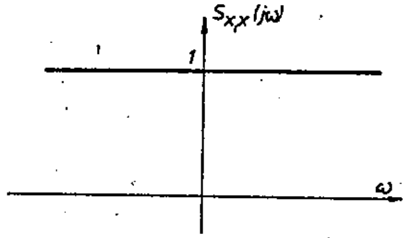

fig 4. Zgomot alb

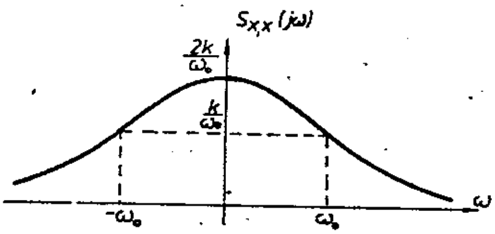

fig 5. Zgomot alb de bandă limitată

4.4 Exemple de calcul a densității spectrale de putere

a. Semnal determinist periodic. Pentru

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

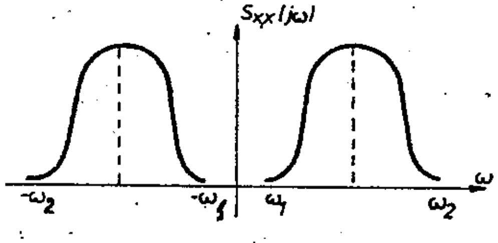

fig 6. Zgomot colorat

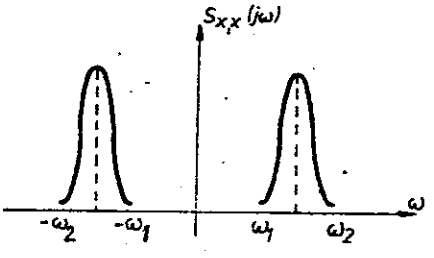

fig 7. Zgomot de bandă îngustă

s-a obținut

$$k_{x,x}(\tau) = \frac{1}{2} X_m^2 \cos \omega_0 \tau .$$

După cum se știe transformata Fourier-Plancherel a acestei funcții este (vezi anexa D.3.4)

$$S_{x,x}(j\omega) = \frac{1}{2} \pi X_m^2 \left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right] ,$$

ceea ce înseamnă că în spectru există numai frecvențele $\pm\omega_0$. Pentru

$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \alpha)$, $y(t) = Y_m \sin(\omega_0 t - \beta)$

avem

$$R_{x,y}(\tau) = \frac{1}{2} X_m Y_m \cos(\omega_0 \tau - \varphi) \; ; \quad \varphi = \alpha - \beta$$
$$S_{x,y}(j\omega) = \frac{1}{2} \pi X_m Y_m \left[e^{j\varphi} \delta(\omega + \omega_0) + e^{-j\varphi} \delta(\omega - \omega_0) \right],$$

ceea ce înseamnă că $S_{x,y}(j\omega)$ este o funcție complexă care conține informații asupra defazajului φ dintre $x(t)$ și $y(t)$.

b. Proces stochastic de valoare medie nenulă

Fie o realizare $x(t)$ a cărei valoare medie este $\overline{x(t)}$. Se poate defini semnalul centrat

$$y(t) = x(t) - \overline{x(t)} \quad \text{cu} \quad \overline{y(t)} = 0.$$

Funcția de autocorelație a semnalului $x(t)$ este

$$R_{x,x}(\tau) = R_{y,y}(\tau) + \left(\overline{x(t)}\right)^2,$$

iar densitatea spectrală de putere are expresia

$$S_{x,x}(j\omega) = S_{y,y}(j\omega) + 2\pi \left(\overline{x(t)}\right)^2 \delta(\omega).$$

Se deduce din ultima relație că procesele stochastice de medie nenulă au în densitatea spectrală de putere un impuls Dirac de amplitudine $2\pi\left(\overline{x(t)}\right)^2$ la $\omega = 0$.

c. Semnal telegrafic. Un astfel de semnal este constant pe porțiuni, variind prin salt între două limite fixe a și $-a$ (semnal binar) – fig 8.

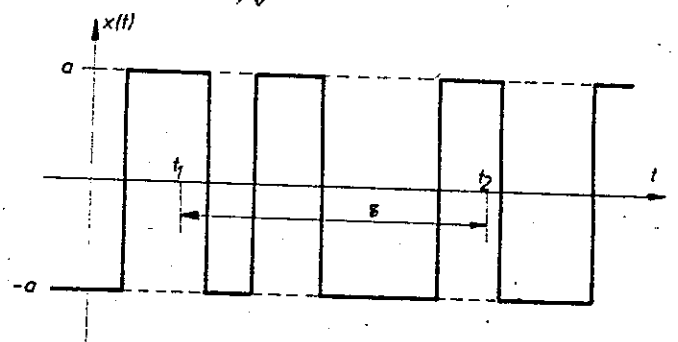

fig.8. Semnal telegrafic

Acest semnal este frecvent utilizat în studiul experimental al sistemelor dinamice deoarece poate fi relativ ușor generat sub formă numerică (pe calculator numeric) sau sub formă analogică utilizînd registre de deplasare.

Vom porni de la ipoteza că numărul de schimbări de semn a semnalului într-un interval (t_1,t_2) este aleator şi independent de ceea ce se întîmplă în afara intervalului (t_1,t_2). Fie A_n evenimentul producerii a exact n variaţii de semn pe durata $\tau=t_2-t_1$ şi λ numărul mediu de variaţii de semn în unitatea de timp. Studiile experimentale au dat la iveală faptul că probabilitatea evenimentului A_n este dată de legea lui Poisson

$$P(A_n)=\frac{1}{n!}(\lambda|\tau|)^n e^{-\lambda|\tau|}.$$

Funcţia de autocorelaţie a semnalului telegrafic, considerat staţionar şi ergodic, de valoare medie nulă, este dată de media pe mulţime

$$r_{x,x}(\tau)=\varphi_{x,x}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_1u_2\,p_{x,x}(u_1,u_2;\tau)\,du_1du_2.$$

Pentru produsul u_1u_2 putem scrie

$$u_1u_2=\begin{cases}a^2 & \text{pentru } n \text{ par},\\ -a^2 & \text{pentru } n \text{ impar}.\end{cases}$$

Probabilitatea totală a evenimentului care constă în producerea unui număr par de schimbări de semn este

$$P(A_0)+P(A_2)+P(A_4)+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_{2n}).$$

Probabilitatea totală a evenimentului care constă în producerea unui număr impar de schimbări de semn este

$$P(A_1)+P(A_3)+P(A_5)+\ldots\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P(A_{2n+1}).$$

În aceste condiţii avem

$$r_{x,x}(\tau)=a^2\sum_{n=0}^{\infty}P(A_{2n})-a^2\sum_{n=0}^{\infty}P(A_{2n+1})=$$

$$=a^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nP(A_n)=a^2e^{-\lambda|\tau|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\lambda|\tau|)^n=a^2e^{-2\lambda|\tau|}.$$

Densitatea spectrală de putere corespunzătoare este

$$S_{x,x}(j\omega)=\frac{4a^2\lambda}{\omega^2+4\lambda^2}.$$

Graficul acestei funcţii este reprezentat în fig.5 pentru

$k = a^2$ și $\omega_0 = 2\lambda$. Se remarcă faptul că pentru λ suficient de ridicat, la limită $\lambda \to \infty$, semnalul telegrafic poate aproxima în condiții acceptabile zgomotul „alb".

4.5. Relații „intrare-ieșire"

În cele ce urmează ne vom ocupa de transferul proceselor stochastice staționare ergodice prin elemente raționale de transfer, sub aspect frecvențial.

<u>Teorema 5</u>

Dacă pentru realizările $x(t), y(t), z(t)$ avem

(16) $z(t) = x(t) \pm y(t)$,

atunci

(17) $S_{z,z}(j\omega) = S_{x,x}(j\omega) + S_{y,y}(j\omega) \pm S_{x,y}(j\omega) \pm S_{y,x}(j\omega)$.

Această teoremă rezultă imediat din teorema 3 de la 3.4.

În cazul în care procesele stochastice $x_t = \xi(e,t)$ și $y_t = \eta(e,t)$ sînt statistic independente sau necorelate, atunci, ținînd seama de (3.22), avem

(18) $S_{x,y}(j\omega) = 2\pi\, \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}\, \delta(\omega)$

și relația (17) devine

(19) $S_{z,z}(j\omega) = S_{x,x}(j\omega) + S_{y,y}(j\omega) \pm 4\pi\, \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}\, \delta(\omega)$.

Dacă cel puțin un proces este de valoare medie nulă, adică $\overline{x(t)} = 0$ sau $\overline{y(t)} = 0$, atunci

(20) $S_{z,z}(j\omega) = S_{x,x}(j\omega) + S_{y,y}(j\omega)$.

În cazul unui amestec de semnale, unul determinist periodic de valoare medie nulă și celălalt stochastic staționar ergodic, în ipoteza că sînt statistic independente, relația (20) rămîne valabilă.

De exemplu pentru

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t - \varphi)$$

relația (20) devine

$$S_{z,z}(j\omega) = \frac{1}{2}\pi X_m^2 [\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] + S_{y,y}(j\omega).$$

Concluzia care se trage din acest rezultat este aceea că dacă un semnal conține componente periodice, atunci acestea se vor manifesta sub formă de impulsuri Dirac în densitatea spectrală de putere.

Fie un R-element descris de produsul de convoluție (3.26).

Teorema 6

Între realizările u(t) și y(t) ale intrării și ieșirii unui R-element există următoarele relații

(21) $S_{u,y}(j\omega) = G(j\omega) S_{u,u}(j\omega)$,

(22) $S_{y,y}(j\omega) = G(j\omega) S_{y,u}(j\omega)$,

(23) $S_{y,y}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{u,u}(j\omega)$,

unde $G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ este răspunsul la frecvență al R-elementului.

D. Relațiile (21), (22) se obțin imediat aplicînd transformarea Fourier-Plancherel relațiilor (3.28), (3.30), ținînd seama de teorema produsului de convoluție (vezi anexa C.6.1). Pentru a demonstra (23) se înlocuiește (21) în (22) ținînd seama de faptul că $S_{y,u}(j\omega) = S_{u,y}(-j\omega)$. Q.e.d.

Relația (23) pune în evidență caracterul de filtrare al R-elementului. Utilizînd un R-element adecvat și o sursă de zgomot „alb" se poate obține orice tip de zgomot. Într-adevăr, pentru $S_{u,u}(j\omega) = 1$ din (23) se obține $S_{y,y}(j\omega) = |G(j\omega)|^2$. În acest caz R-elementul se numește filtru de formare.

Generare zgomot

4.6 Măsurarea semnalelor stochastice

Corelatorul temporal

Pentru măsurarea funcției de auto- sau intercorelație se folosesc corelatoare. Pentru două semnale u(t) și y(t), corelatorul trebuie să funcționeze conform relației

(24) $$r_{u,y}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T u(t-\tau)\, y(t)\, dt \; ; \quad \tau \in [0, \infty).$$

în care T este o durată de timp suficient de mare. Schema bloc a unui astfel de dispozitiv este reprezentată în fig. 9. Pentru obținerea funcției $r_{u,y}(\tau)$ se prelucrează semnalul x(t) conform schemei bloc, pe o durată T suficient de mare, pentru diverse valori ale întîrzierii τ a elementului cu „timp mort".

Pentru măsurarea funcției de autocorelație $r_{u,u}(\tau)$ se înlocuiește $y(t)$ cu $u(t)$.

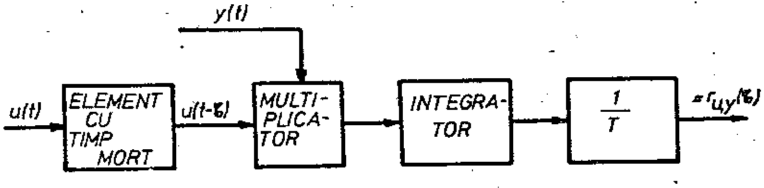

fig.9. Schema bloc a unui corelator

Întrucît practic nu este posibil ca $T \to \infty$, rezultă că funcția de intercorelație măsurată depinde și de T. Se trage concluzia că funcția de intercorelație măsurată va fi afectată de erori de natură statistică. În legătură cu această problemă se pot consulta [2], [11].

Spectrometrul de putere

Pentru realizarea unui dispozitiv pentru măsurarea densității spectrale de putere se pornește de la egalitatea

$$(25)\qquad S_{x,x}(j\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} S_{x,x}(j\omega)\,d\omega}{\Delta\omega} \; ; \quad \omega \in [0,\infty).$$

def. adaptată la interv. [0,T]

Ținînd seama de definiția (5), reformulată pentru semnalul $x(t)$ trunchiat temporal pe intervalul $[0,T]$, relația (25) devine

$$(26)\qquad S_{x,x}(j\omega) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{T}\,d\omega.$$

În aceste condiții pentru $\Delta\omega$ suficient de mic și T suficient de mare, expresia

$$(27)\qquad \tilde{S}_{x,x}(j\omega) = \frac{1}{\Delta\omega T} \int_{\omega-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega+\frac{\Delta\omega}{2}} |X_T(j\omega)|^2\,d\omega$$

este o măsură a densității spectrale de putere a semnalului $x(t)$. Introducînd funcția trunchiată frecvențial pe intervalul $[\omega - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega + \frac{\Delta\omega}{2}]$

(28) $$X_{T,\Delta\omega}(j\omega) = X_T(j\omega)\left[\sigma\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right) - \sigma\left(\omega-\frac{\Delta\omega}{2}\right)\right],$$

în care $\sigma(\omega)$ este funcția treaptă unitară, și ținînd seama de teorema lui Parseval (anexa C.6.1) relația (27) devine.

(29) $$\tilde{S}_{x,x}(j\omega) = \frac{1}{\Delta\omega T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X_{T,\Delta\omega}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{2\pi}{\Delta\omega T}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2_{T,\Delta\omega}(t)\,dt = \frac{2\pi}{\Delta\omega T}\int_0^T x^2(t)\,dt .$$

În această relație $x_{T,\Delta\omega}(t)$ este un semnal care se obține din $x(t)$ prin trunchiere temporală și trunchiere frecvențială. Concret aceasta înseamnă că semnalul $x(t)$ este observat pe o durată finită T și este filtrat cu un filtru ideal „trece-bandă", cu caracteristica amplitudine-frecvență

$$M(\omega) = \sigma\left(\omega+\frac{\Delta\omega}{2}\right) - \sigma\left(\omega-\frac{\Delta\omega}{2}\right).$$

Schema bloc a unui spectrometru de putere este dată în fig. 10.

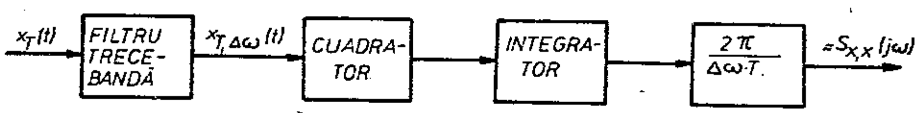

fig. 10. Spectrometrul de putere

Pentru obținerea funcției $S_{x,x}(j\omega)$ se prelucrează semnalul $x(t)$ conform schemei bloc pe o durată T suficient de mare, pentru diverse valori ale frecvenței medii ω a filtrului de bandă $\Delta\omega$. Din relația (29) rezultă că densitatea spectrală de putere măsurată depinde și de T și de $\Delta\omega$. Ca atare și această funcție va fi afectată de erori de natură statistică, [2], [11].

Utilizînd relațiile derivînd din noțiunile de funcție de autocorelație și de densitate spectrală de putere se poate trage concluzia falsă că se pot obține tot mai multe detalii analizînd un număr tot mai mare de date și că teoretic nu există nici o limită a acurateții măsurătorilor. Din fericire o astfel de limită există. În cazul analizei frecvențiale a semnalelor acest fapt se datorează dualității durată - frecvență. O determinare precisă a unei anumite frecvențe în spectrul unui semnal cere o durată de observație foarte mare. Aceste fapte sînt bine cunoscute din fizică (principiul incertitudinii) și pentru cazul analizei frecvențiale a semnalelor pot fi demonstrate și matematic, [2].

5. Filtre Wiener

5.1. Punerea problemei

Problema filtrării optimale a unui semnal stochastic staționar pornește de la necesitatea transformării unui semnal $u(t)$ într-un semnal $d(t)$ (dorit) prin aplicarea lui $u(t)$ unui sistem cauzal și stabil. Întrucît în condiții reale mărimea de ieșire $y(t)$ este diferită de $d(t)$, datorită faptului că $g(t)$ este realist în timp ce $g_i(t)$ poate fi ideal - fig 11, problema care se pune este de a găsi acea structură și acei parametri ai sistemului, care asigură ca eroarea

(1) $$\varepsilon(t) = d(t) - y(t),$$

în medie pătratică, să fie minimă. $g_i(t)$ este răspunsul la impuls al unui sistem ideal care transformă pe $u(t)$ în $d(t)$.

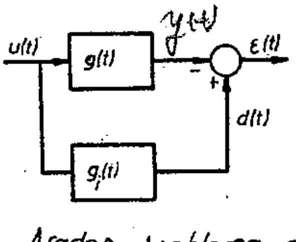

fig. 11. Problema filtrării optimale

Așadar problema sintezei sistemului cu răspunsul la impuls $g(t)$ este o problemă variațională. Indicele de calitate în acest caz este

(2) $$\mathcal{J} = \overline{\varepsilon^2(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varepsilon^2(t)\,dt.$$

În ceea ce privește semnalul de ieșire dorit $d(t)$, acesta poate fi considerat, în general, de argument $t+T_0$, adică $d(t+T_0)$, unde T_0 este o constantă reală. Eroarea în acest caz este

(3) $$\varepsilon(t) = d(t+T_0) - y(t) .$$

În funcție de valoarea lui T_0, cu indicele de calitate (2) se poate sintetiza un sistem din următoarele 3 categorii:

pentru $T_0 = 0$ – filtru pur,
pentru $T_0 < 0$ – filtru de întîrziere (netezire),
pentru $T_0 > 0$ – filtru de predicție.

5.2. Ecuația Wiener-Hopf

Ținînd seama că sistemul $g(t)$ este descris de produsul de convoluție

(4) $$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\, u(t-\theta)\, d\theta ,$$

eroarea definită prin (3) are expresia

(5) $$\varepsilon(t) = d(t+T_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) u(t-\theta)\, d\theta .$$

Problema de rezolvat este de a găsi $g(t)$ astfel încît să fie satisfăcut indicele de calitate (2). Pentru evaluarea erorii pătratice medii se poate scrie

(6) $$r_{\varepsilon,\varepsilon}(\tau) = \overline{d(t+T_0)d(t+T_0+\tau)} + \overline{y(t)y(t+\tau)} - \overline{d(t+T_0)y(t+\tau)} - \overline{y(t)d(t+T_0+\tau)} .$$

Pentru $\tau = 0$ din (6) se obține

(7) $$\overline{\varepsilon^2(t)} = \overline{d^2(t+T_0)} + \overline{y^2(t)} - 2\,\overline{d(t+T_0)y(t)} .$$

În ipoteza staționarității avem

(8) $$\overline{d^2(t+T_0)} = \overline{d^2(t)} = r_{d,d}(0) .$$

În conformitate cu relația (4) mai putem calcula

(9) $$\overline{d(t+T_0)y(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} d(t+T_0) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) u(t-\theta)\, d\theta\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} u(t-\theta) d(t+T_0)\, dt\, d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) r_{u,d}(\theta+T_0)\, d\theta ;$$

(10) $$\overline{y^2(t)} = r_{y,y}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, r_{u,u}(\tau+\theta-\eta)\, d\eta\, d\theta \Big|_{\tau=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, r_{u,u}(\theta-\eta)\, d\eta\, d\theta .$$

Cu acestea expresia (7) devine

(11) $$\overline{\varepsilon^2(t)} = r_{d,d}(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\, r_{u,d}(\theta+T_0)\,d\theta + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta)\, r_{u,u}(\theta-\eta)\, d\eta\, d\theta .$$

Se observă că indicele de calitate nu depinde de semnalele $u(t)$, $y(t)$, $d(t)$, ci de mediile temporale $r_{u,u}(\tau)$, $r_{u,d}(\tau)$, $r_{d,d}(0)$. Acest fapt prezintă o importanță deosebită deoarece o funcție de auto- sau intercorelație reprezintă o clasă largă de semnale și ca urmare filtrul $g(t)$ va asigura eroarea pătratică medie minimă pentru acea clasă de semnale.

Dintre toate sistemele $g(t)$ care minimizează funcționala (11), din punct de vedere practic prezintă un deosebit interes sistemele realiste și stabile IMEM, adică care satisfac condițiile:

(12) $$g(t) \equiv 0 \quad \text{pentru} \quad t<0,$$

(13) $$\int_{0}^{\infty} |g(t)|\,dt \le K < +\infty .$$

Teorema 1 (Wiener – Hopf)

O condiție necesară ca $g^*(t)$, care satisface condiția (12), să fie o extremală a funcționalei (11) este ca

(14) $$r_{u,d}(\theta+T_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\eta)\, r_{u,u}(\theta-\eta)\,d\eta = 0 \;, \quad \theta \ge 0 .$$

D. Dacă $g^*(t)$ este o extremală a funcționalei (11), atunci o funcție oarecare $g(t)$ se poate scrie sub forma

(15) $$g(t) = g^*(t) + \alpha\, \varrho(t) ,$$

unde $\varrho(t)$ este o funcție arbitrară care satisface condiția (12) și α un număr real, mic în valoare absolută.

În aceste condiții (11) devine

(16) $$\overline{\varepsilon^2(t,\alpha)} = r_{d,d}(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} [g^*(\theta)+\alpha \varrho(\theta)]\, r_{u,d}(\theta+T_0)\,d\theta +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [g^*(\theta)+\alpha\varrho(\theta)] \int_{-\infty}^{+\infty} [g^*(\eta)+\alpha\varrho(\eta)]\, r_{u,u}(\theta-\eta)\,d\eta\,d\theta .$$

Condiția necesară de minimum, după cum se știe, (vezi X.14), este :

(17) $$\frac{d}{d\alpha}\left[\overline{\varepsilon^2(t,\alpha)}\right]\Big|_{\alpha=0}=0\ .$$

Conform acestei condiții, din (16) se obține

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta)k_{\mu,d}(\theta+T_0)d\theta+\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(\eta)\,k_{\mu,\mu}(\theta-\eta)d\eta\, d\theta\ +$$
$$+\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(\theta)\int_{-\infty}^{+\infty}g(\eta)\,k_{\mu,\mu}(\theta-\eta)d\eta\, d\theta\ =\ 0\ ,$$

sau

(18) $$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta)\left[k_{\mu,d}(\theta+T_0)-\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(\eta)\,k_{\mu,\mu}(\theta-\eta)d\eta\right]d\theta\ =\ 0\ .$$

Notînd

(19) $$f(\theta)=k_{\mu,d}(\theta+T_0)-\int_{-\infty}^{+\infty}g^*(\eta)\,k_{\mu,\mu}(\theta-\eta)d\eta\ ,$$

ecuația (18) devine

(20) $$\int_{-\infty}^{+\infty}g(\theta)f(\theta)d\theta\ =\ 0.$$

Întrucît $g(\theta)\equiv0$ pentru $\theta<0$, rezultă că pentru $\theta<0$ ecuația (18) este satisfăcută. Pentru $\theta\geq0$, $g(\theta)\not\equiv0$ și conform lemei fundamentale a calculului variațional (vezi IX.1.4, teorema 3) rezultă că $f(\theta)=0$ pentru $\theta\geq0$, de unde rezultă imediat relația (14). Q.e.d.

Soluția ecuației integrale (14), numită ecuația Wiener-Hopf este $g^*(t)$, adică structura și parametrii filtrului optimal realist căutat.

5.3. Soluția ecuației Wiener-Hopf

Vom da în cele ce urmează o soluție $g^*(t)$ care satisface condiția (13) (stabilă IMEM), a ecuației (14).

Întrucît densitatea spectrală de putere $S_{u,u}(j\omega)$ este reală, nenegativă și pară, se poate scrie:

(21) $$S_{u,u}(j\omega)=G_1(j\omega)\,G_1(-j\omega)\ =\ |G_1(j\omega)|^2,$$

în care $G_1(j\omega)$ este o funcție cu poli și zerouri în $\mathrm{Re}\,s<0$. În aceste condiții $\frac{1}{G_1(s)}$ poate fi considerată funcția de transfer a unui sistem realist și stabil IMEM.

Se consideră că sistemul căutat $G^*(s)$ este format din două subsisteme înseriate - fig 12, astfel că

(22) $$G^*(s) = \frac{1}{G_1(s)} G_2(s),$$

unde $G_2(s)$ urmează să se determine.

Pentru semnalul intermediar $x(t)$ se poate scrie

(23) $$S_{x,x}(j\omega) = \frac{1}{|G_1(j\omega)|^2} \cdot S_{u,u}(j\omega) = 1 \qquad \left(k_{x,x}(\tau) = \delta(\tau)\right),$$

ceea ce înseamnă că $x(t)$ este un zgomot „alb".

Subsistemul $G_2(s)$ trebuie să satisfacă ecuația Wiener-Hopf, adică

$$k_{x,d}(\theta+T_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\eta) k_{x,x}(\theta-\eta)d\eta = 0 \quad , \quad \theta \geq 0,$$

sau ținînd seama de (23)

(24) $$k_{x,d}(\theta+T_0) = g_2(\theta), \quad \theta \geq 0.$$

Din (24) rezultă imediat

(25) $$g_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,d}(j\omega) e^{j\omega T_0} e^{j\omega\theta} d\omega, \quad \theta \geq 0.$$

Pe de altă parte

(26) $$S_{x,d}(j\omega) = \frac{1}{G_1(-j\omega)} \cdot S_{u,d}(j\omega) = \frac{G_i(j\omega)}{G_1(-j\omega)} S_{u,u}(j\omega),$$

astfel că (25) devine

(27) $$g_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_i(j\omega)}{G_1(-j\omega)} S_{u,u}(j\omega) e^{j\omega T_0} e^{j\omega\theta} d\omega, \quad \theta \geq 0.$$

Notînd

(28) $$K(s) = \frac{G_i(j\omega)}{G_1(-s)} S_{u,u}(j\omega) e^{j\omega T_0},$$

în care $s = j\omega$, și presupunînd că are loc descompunerea

(29) $$K(s) = K_+(s) + K_-(s),$$

în care $K_+(s)$ este o funcție cu toți polii în $\operatorname{Re} s < 0$ și $K_-(s)$ cu toți polii în $\operatorname{Re} s \geq 0$, din (27) rezultă

(30) $$g_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty} K_+(j\omega) e^{j\omega\theta} d\omega,$$

adică

(31) $$G_2(j\omega) = K_+(j\omega).$$

Cu aceasta soluția căutată este

x·5.

(32) $$G^*(j\omega) = \frac{K_+(j\omega)}{G_1(j\omega)}$$

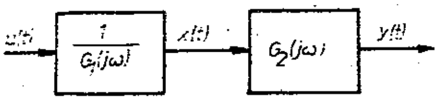

fig. 12. Soluția ecuației (14)

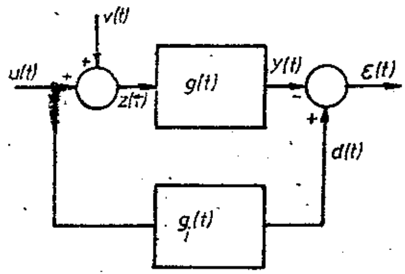

fig. 13. Considerarea perturbațiilor

Din expresia soluției (32) rezultă că filtrul optimal $G^*(s)$ depinde direct de funcția de autocorelație a intrării $u(t)$ și de funcția de intercorelație a semnalelor $u(t)$ și $d(t)$ și de timpul T_0 care precizează tipul filtrului.

5.4. Considerarea perturbațiilor

Problema filtrării poate fi formulată în aceeași termeni dacă se ține seama de existența unei perturbații stochastice $v(t)$, care se aplică la intrarea filtrului - fig. 13. Conform figurii avem

(33) $$z(t) = u(t) + v(t),$$

in care $u(t)$ este semnalul util.

În aceste condiții ecuația (14) devine

(34) $$k_{z,d}(\theta + T_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\eta)\, k_{z,z}(\theta - \eta)\, d\eta = 0, \quad \theta \geq 0,$$

în care

(35) $$k_{z,d}(\theta) = k_{u,d}(\theta) + k_{v,d}(\theta),$$

(36) $$k_{z,z}(\theta) = k_{u,u}(\theta) + k_{v,v}(\theta) + k_{u,v}(\theta) + k_{v,u}(\theta).$$

Soluția ecuației (34) se determină ca în cazul ecuației (14).

5.5. Aplicație

Fie un semnal util $u(t)$, de medie nulă, cu densitatea spectrală de putere

$$S_{u,u}(j\omega) = \frac{A^2}{\omega^2 + a^2},$$

$$r_{x,d}(\theta+T_0) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\eta)\, r_{x,x}(\theta-\eta)\, d\eta = 0$$
$$\theta \geq 0$$

$$g_2^*(\theta) = r_{x,d}(\theta+T_0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{x,d}(j\omega)\, e^{j\omega T_0} e^{j\omega\theta}\, d\omega$$

$$S_{x,d}(j\omega) = \frac{1}{G_1(-j\omega)} S_{z,d}(j\omega)$$

$$S_{z,d}(j\omega) = S_{u,d}(j\omega) + S_{v,d}(j\omega)$$

$$G_2(j\omega) = K_+(j\omega)$$

$$K_+(j\omega) = \left[\frac{S_{z,d}(j\omega)}{G_1(-j\omega)} e^{j\omega T_0} \right]_+$$

care este perturbat aditiv cu un zgomot „alb" de medie nulă

$$S_{v,v}(j\omega) = B^2,$$

necorelat cu $u(t)$.

Să se determine un filtru pur care să minimizeze, în medie pătratică eroarea $\varepsilon(t) = u(t) - y(t)$.

Conform datelor problemei avem: $d(t) = u(t)$ şi deci $G_i(s) = 1$. Pentru $z(t) = u(t) + v(t)$ şi $S_{u,v}(j\omega) = S_{v,u}(j\omega) = 0$ putem scrie

$$S_{z,z}(j\omega) = S_{u,u}(j\omega) + S_{v,v}(j\omega) = \frac{A^2}{\omega^2+a^2} + B^2 = B^2\frac{\omega^2+b^2}{\omega^2+a^2};$$

$$b^2 = a^2 + \frac{A^2}{B^2},$$

$$S_{z,u}(j\omega) = S_{u,u}(j\omega) = \frac{A^2}{\omega^2+a^2}.$$

$$G_1(j\omega) = \{S_{z,z}(j\omega)\}_+ = \left\{B\frac{j\omega+b}{j\omega+a}\cdot B\frac{-j\omega+b}{-j\omega+a}\right\}_+ = B\frac{j\omega+b}{j\omega+a}$$

$$K_+(j\omega) = \left[\frac{S_{z,u}(j\omega)}{G_1(-j\omega)}\right]_+ = \left[\frac{A^2}{\omega^2+a^2}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{-j\omega+a}{-j\omega+b}\right]_+ =$$

$$= \left[\frac{A^2}{B(j\omega+a)(-j\omega+b)}\right]_+ = \frac{A^2}{B}\left[\frac{\alpha}{j\omega+a} + \frac{\beta}{-j\omega+b}\right]_+ = \frac{A^2}{B(a+b)(j\omega+a)}$$

În aceste relaţii $\{F(j\omega)\}_+$ simbolizează operaţia prin care se reţine din $F(j\omega)$ numai factorul cu toţi polii şi zerourile în $\operatorname{Re} s<0$, iar $[F(j\omega)]_+$ - operaţia prin care din $F(j\omega)$ se reţin toate fracţiile simple cu poli în $\operatorname{Re} s<0$.

Răspunsul la frecvenţă al filtrului optimal este:

$$G^*(j\omega) = \frac{A^2}{B(a+b)(j\omega+a)}\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{j\omega+a}{j\omega+b} = \frac{A^2}{B^2(a+b)(j\omega+b)}.$$

Acest filtru poate fi realizat cu un R-element PT, cu un factor de amplificare $k = \dfrac{A^2}{B^2(a+b)b}$ şi o constantă de timp $T = \dfrac{1}{b}$.

x-5. 205

5.6. Problema estimării stării

Fie un sistem dinamic liniar constant

(37) $\dot{x} = Ax + bu$, $x(0) = x_0$,

(38) $y = Cx$.

În condiții concrete problema estimării stării sistemului (37), (38) așa cum a fost introdusă la VI. 3.3, este mult mai complexă, datorită faptului că asupra sistemului (37), (38) acționează și alte mărimi de intrare, nemăsurabile, cu caracter perturbator, iar măsurarea însăși a mărimilor u și y, necesare pentru elaborarea stării estimate, poate fi afectată de perturbații.

Așadar, în general, din punctul de vedere al estimării stării, sistemul (1), (2) are forma

(39) $\dot{x} = Ax + bu + bv$, $x(0) = x_0$,

(40) $y = Cx + w$,

in care v este o intrare perturbatoare, nemăsurabilă și w o perturbație de măsurare a ieșirii y. În general v și w sînt vectori cu componente procese stochastice.

Estimatorul corespunzător sistemului (3), (4) are forma cunoscută, adică

(41) $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(y - C\hat{x}) + b\mu$, $\hat{x}(0) = 0$.

Alegerea matricii L numai din condiția de stabilitate asimptotică a sistemului (41) nu mai este satisfăcătoare deoarece prezența perturbațiilor v și w face ca eroarea

(42) $\varepsilon = x - \hat{x}$

să nu mai tindă la 0 atunci cînd $t \to \infty$.

Acest fapt orientează rezolvarea problemei estimării stării către determinarea matricii L dintr-o condiție de optimum și anume ca indicele de calitate

(43) $\mathcal{J} = \overline{\varepsilon^T(t)\varepsilon(t)} = \overline{\varepsilon^T(t)\,\varepsilon(t)}$

să fie minim.

În ipotezele

1° Vectorii v și w sînt vectori-procese stochastice staționare ergodice, de tipul zgomotului alb, necorelate, adică

$$(44)\qquad \overline{v(t)\,v^T(t+\tau)} = \begin{bmatrix} \varphi_{v_1,v_1}(\tau) & \varphi_{v_1,v_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{v_1,v_m}(\tau) \\ \varphi_{v_2,v_1}(\tau) & \varphi_{v_2,v_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{v_2,v_m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{v_m,v_1}(\tau) & \varphi_{v_m,v_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{v_m,v_m}(\tau) \end{bmatrix} = Q\,\delta(\tau)$$

$$(45)\qquad \overline{w(t)\,w^T(t+\tau)} = \begin{bmatrix} \varphi_{w_1,w_1}(\tau) & \varphi_{w_1,w_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{w_1,w_p}(\tau) \\ \varphi_{w_2,w_1}(\tau) & \varphi_{w_2,w_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{w_2,w_p}(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{w_p,w_1}(\tau) & \varphi_{w_p,w_2}(\tau) & \ldots & \varphi_{w_p,w_p}(\tau) \end{bmatrix} = R\,\delta(\tau)$$

$$(46)\qquad \overline{v(t)\,w^T(t+\tau)} = 0,$$

în care Q este o matrice constantă simetrică pozitiv semidefinită, R - matrice constantă simetrică, pozitiv definită și $\delta(\tau)$ - impulsul Dirac;

2° componentele vectorilor v, w sînt de valori medii nule, adică

$$(47)\qquad \overline{v(t)} = 0, \quad \overline{w(t)} = 0;$$

3° componentele vectorului x_0 sînt variabile aleatoare gaussiene independente de v și w, de valori medii nule, adică

$$(48)\qquad \overline{x_0} = 0,$$

se poate arăta, [6], că

$$(49)\qquad L = K_0 C^T R^{-1},$$

unde matricea K_0 este soluția ecuației algebrice Riccati (vezi IX.4.2)

$$(50)\qquad A K_0 + K_0 A^T - K_0 C^T R^{-1} C K_0 + B Q B^T = 0,$$

asociată problemei comenzii optimale cu orizont infinit și stare finală fixată a sistemului dual

$$(51)\qquad \dot{x}_* = A^T x_* + C^T u_*.$$

cu indicele de calitate

X·5.

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} [x_*^T (BQB^T) x_* + u_*^T R u_*]\, dt \,. \qquad (52)$$

Estimatorul determinat în acest fel este cunoscut sub numele de filtru Kalman - Bucy.

5.7. Aplicație

Fie sistemul de ordinul 1

$$\dot{x} = ax + bv$$
$$y = x + w$$

în care v și w sînt perturbații stochastice staționare, ergodice, cu proprietățile:

$$k_{v,v}(\tau) = q^2 \delta(\tau), \qquad \overline{v(t)} = 0,$$
$$k_{w,w}(\tau) = h^2 \delta(\tau), \qquad \overline{w(t)} = 0,$$
$$k_{v,w}(\tau) = k_{w,v}(\tau) = 0 .$$

Condiția inițială $x(0)$ este o variabilă aleatoare gaussiană independentă de v și w, de valoare medie nulă.

Se cere determinarea unui filtru Kalman - Bucy.

Ecuația estimatorului este

$$\dot{\hat{x}} = ax + \ell(y - \hat{x}), \qquad \hat{x}(0) = 0,$$

în care

$$\ell = \frac{k_0}{h^2}$$

iar k_0 este una din rădăcinile ecuației

$$k_0^2 - 2ah^2 k_0 - b^2 q^2 h^2 = 0.$$

Alegînd rădăcina

$$k_0 = ah^2 + h\sqrt{a^2h^2 + b^2q^2}$$

se obține

$$\ell = a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q^2}{h^2}} ,$$

care asigură realizarea unui estimator de stare

$$\dot{\hat{x}} = -\sqrt{a^2 + b^2\frac{q^2}{h^2}}\ \hat{x} + \left(a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q^2}{h^2}}\right) y$$

asimptotic stabil pentru orice $a \neq 0$ și $b \neq 0$.