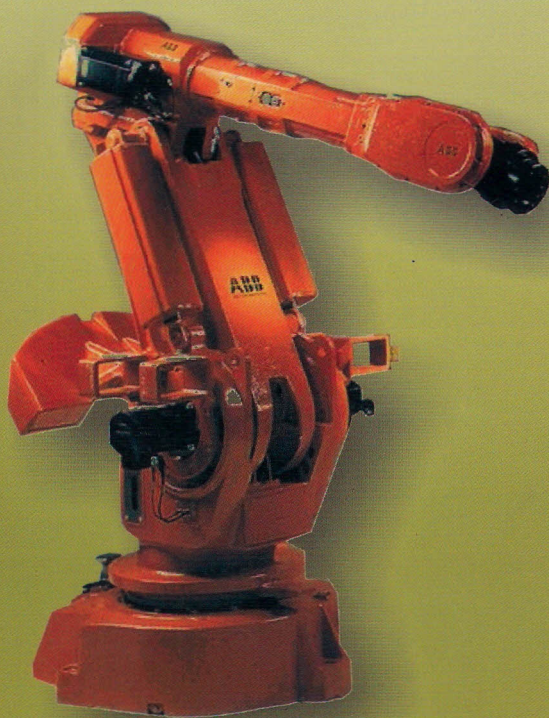


MIHAIL VOICU

# INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ



POLIROM



Mihail Voicu

**Introducere în automatică**

Referenți: prof. dr. ing. Corneliu Lazar  
prof. dr. ing. Octavian Păstrăvanu

**Mihail Voicu (n. Pașcani, 1943), doctor inginer și licențiat în matematică, este specialist în teoria sistemelor.** Profesor la Universitatea Tehnică din Iași, decan al Facultății de Automatica și Calculatoare, vicepreședinte al Comisiei de automatică teoretică și teoria controlului optimal (Filiala Iași a Academiei (Romane), m. c. al Academiei de Științe Tehnice din România, vicepreședinte al Societății Romane de Automatică și Informatică Tehnică, membru senior al IEEE, membru al American Mathematical Society. Autor a peste 240 de lucrări științifice de specialitate. De același autor: *Teoria sistemelor* (1980), *Tehnici de analiza a stabilității sistemelor automate* (1986), *Sisteme automate multivariabile* (1993), *Non-recursive models in control systems analysis and design* (în colaborare cu O. Pastravanu; 1997), *Teoria sistemelor cu aplicații în bioingineria medicală* (2001).

© 2002 by Editura POLIROM

**www.polirom.ro**

Editura POLIROM

Iași, B-dul Copou nr. 4; P.O. BOX 266, 6600

București, B-dul I. C. Brătianu nr. 6, et. 7, ap. 33; O.P. 37, P.O. BOX 1-728,70700

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României:**

VOICU, MIHAIL

*Introducere în automatică* / Mihail Voicu – Ed. a II-a, rev. și adăug, – Iași: Polirom, 2002

280 p., 24 cm

ISBN: 973-681-111-5

681.5

Printed in ROMANIA

# **INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ**

Ediția a II-a, revăzută și adăugită

Polirom  
2002



# TABLĂ DE MATERII

|                                                                       |             |
|-----------------------------------------------------------------------|-------------|
| <i>Prefață</i>                                                        | <b>XI</b>   |
| <i>Listă de abrevieri, simboluri și notații</i>                       | <b>XIII</b> |
| <b>I. Introducere</b>                                                 | <b>1</b>    |
| 1. Automatizarea: conținut, categorii și scopuri                      | 1           |
| 2. De la mecanizare la automatizare                                   | 2           |
| 3. Ce este un sistem automat?                                         | 5           |
| 4. Câteva repere istorice                                             | 7           |
| 5. Automatica și cibernetica; sisteme și semnale                      | 9           |
| <b>II. Transferul intrare – ieșire al sistemelor dinamice liniare</b> | <b>13</b>   |
| 1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice                        | 13          |
| 1.1. Ce sunt modelele matematice?                                     | 13          |
| 1.2. Ecuațiile sistemelor fizico-tehnice                              | 13          |
| 1.3. Liniaritate și invarianță în timp                                | 17          |
| 1.4. Funcția de transfer                                              | 20          |
| 2. Scheme bloc structurale                                            | 25          |
| 2.1. Preliminarii                                                     | 25          |
| 2.2. Conexiuni elementare                                             | 27          |
| 1° Conexiunea «serie»                                                 | 27          |
| 2° Conexiunea «paralel»                                               | 28          |
| 3° Conexiunea «cu reacție»                                            | 28          |
| 2.3. Transfigurarea schemelor bloc structurale                        | 29          |
| 2.4. Scheme bloc operaționale asociate unei funcții de transfer       | 35          |
| a. Schema bazată pe derivatoare și integratoare                       | 35          |
| b. Schema bazată numai pe integratoare                                | 36          |
| 2.5. Grafuri de fluență                                               | 37          |
| 3. Răspunsul la impulsul Dirac                                        | 41          |
| 3.1. Definiție                                                        | 41          |
| 3.2. Proprietăți                                                      | 41          |
| 3.3. Produsul de convoluție                                           | 45          |
| 4. Răspunsul indicial                                                 | 47          |
| 4.1. Definiție                                                        | 47          |
| 4.2. Proprietăți                                                      | 47          |
| 4.3. Integrala Duhamel                                                | 52          |
| 5. Polii și zerourile funcției de transfer                            | 53          |
| 5.1. Răspunsul la semnalul exponențial                                | 53          |
| 5.2. Transferul „resonant”                                            | 55          |
| 5.3. Transferul blocat                                                | 56          |
| 6. Stabilitatea intrare – ieșire                                      | 57          |
| 6.1. Definiția BIBO-stabilității                                      | 57          |
| 6.2. Caracterizări ale BIBO-stabilității                              | 58          |

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 6.3. O condiție necesară de BIBO-stabilitate                                      | 59        |
| 6.4. Criteriul Hurwitz                                                            | 61        |
| 6.5. Criteriul Routh                                                              | 62        |
| 6.6. Stabilitatea relativă                                                        | 63        |
| 6.7. Domenii parametrice de BIBO-stabilitate                                      | 65        |
| 7. Corelația dintre calitatea răspunsului indicial și configurația poli – zerouri | 67        |
| 7.1. Indici de calitate ai răspunsului indicial                                   | 67        |
| 7.2. Elemente de transfer tipice                                                  | 68        |
| a. Elementul proporțional (P)                                                     | 68        |
| b. Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)                                      | 68        |
| c. Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2)                                      | 69        |
| d. Elementul integrator (I)                                                       | 74        |
| e. Elementul derivator (D)                                                        | 75        |
| f. Elementul cu timp mort (TM)                                                    | 76        |
| 7.3. Obținerea funcției de transfer pe baza răspunsului indicial                  | 77        |
| 7.4. Poli și zerouri dominante                                                    | 79        |
| 7.5. Configurații cu doi poli dominanți; localizarea polilor dominanți            | 81        |
| 7.6. Efectul unui zero suplimentar                                                | 84        |
| 7.7. Efectul unui pol suplimentar                                                 | 85        |
| 7.8. Simbolizarea operatorială a sistemelor dinamice liniare                      | 86        |
| <b>III. Proprietățile sistemelor automate</b>                                     | <b>87</b> |
| 1. Clasificarea sistemelor dinamice după structură                                | 87        |
| 1.1. Sisteme cu structură deschisă; principiul compensației                       | 87        |
| 1.2. Sisteme cu structură închisă                                                 | 90        |
| 1° Reacția negativă; principiul abaterii                                          | 90        |
| 2° Reacția pozitivă                                                               | 92        |
| 2. Sisteme automate monovariabile                                                 | 95        |
| 2.1. Schema bloc funcțională                                                      | 95        |
| 2.2. Schema bloc structurală standard                                             | 98        |
| 3. Implicații ale principiului abaterii                                           | 101       |
| 3.1. Ecuația abaterii; premise pentru realizarea principiului abaterii            | 101       |
| 3.2. Semnificația funcției $F(s)$ pentru stabilitatea sistemului automat          | 102       |
| 3.3. Abaterea staționară                                                          | 103       |
| 3.4. Efectul perturbației; caracteristica statică                                 | 104       |
| 3.5. Sensitivitatea la variația parametrilor                                      | 107       |
| 1° Sensitivitatea la variația parametrilor căii directe                           | 109       |
| 2° Sensitivitatea la variația parametrilor căii perturbației                      | 109       |
| 3° Sensitivitatea la variația parametrilor căii de reacție                        | 110       |
| 3.6. Efectul zgomotelor                                                           | 111       |



|                                                                         |            |
|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4. Stabilitatea sistemelor automate                                     | 113        |
| 4.1. Polii și zerourile sistemului automat                              | 113        |
| 4.2. BIBO-stabilitatea structurală                                      | 115        |
| 5. Precizia unui sistem automat                                         | 119        |
| 5.1. Eroarea; implicații ale principiului abaterii                      | 119        |
| 5.2. Eroarea staționară                                                 | 121        |
| a. Eroarea staționară în raport cu mărimea prescrisă                    | 121        |
| b. Eroarea staționară în raport cu perturbația                          | 123        |
| 6. Performanțele unui sistem automat                                    | 127        |
| 6.1. Indici de calitate                                                 | 127        |
| 6.2. Indicatori sintetici de calitate                                   | 127        |
| <b>IV. Legi de reglare</b>                                              | <b>129</b> |
| 1. Reglatoare realizate cu amplificatoare operaționale                  | 129        |
| 1.1. Amplificatorul operațional                                         | 129        |
| 1.2. Reglatoare uzuale                                                  | 131        |
| 1.3. Caracteristici ale reglatoarelor din categoria PID                 | 132        |
| 2. Proprietăți ale sistemelor automate cu reglatoare P, PD, PI și PID   | 133        |
| 2.1. Sistem automat cu regulator P                                      | 133        |
| 2.2. Sistem automat cu regulator PD                                     | 134        |
| 2.3. Sistem automat cu regulator PI                                     | 135        |
| 2.4. Sistem automat cu regulator PID                                    | 137        |
| <b>V. Metoda locului rădăcinilor</b>                                    | <b>139</b> |
| 1. Formularea problemei și ecuațiile locului rădăcinilor                | 139        |
| 1.1. Formularea problemei                                               | 139        |
| 1.2. Ecuațiile fundamentale ale locului rădăcinilor                     | 142        |
| 2. Reguli de trasare a locului rădăcinilor                              | 143        |
| 3. Efectul unui zero suplimentar                                        | 149        |
| 4. Efectul unui pol suplimentar                                         | 151        |
| 5. Sinteza regulatorului                                                | 153        |
| 5.1. Tema de proiectare                                                 | 153        |
| 5.2. Rezolvarea temei de proiectare                                     | 153        |
| <b>VI. Metoda frecvențială</b>                                          | <b>157</b> |
| 1. Răspunsul la frecvență                                               | 157        |
| 1.1. Semnificația funcției $G(j\omega)$                                 | 157        |
| 1.2. Definiții                                                          | 159        |
| 1.3. Transferul intrare – ieșire în domeniul frecvențelor               | 160        |
| 1.4. Caracteristica reală de frecvență și relația cu răspunsul indicial | 162        |
| a. Relația dintre durata regimului tranzitoriu și pulsația de tăiere    | 162        |
| b. Relația dintre suprareglare și maximul funcției $R(\omega)$          | 162        |
| 2. Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvență                    | 163        |
| 2.1. Locul de transfer                                                  | 163        |
| a. Forma locului de transfer la frecvențe înalte                        | 163        |
| b. Forma locului de transfer la frecvențe joase                         | 164        |

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| 2.2. Diagrama Bode                                             | 165        |
| 2.3. Elemente de transfer tipice                               | 165        |
| a. Elementul proporțional (P)                                  | 165        |
| b. Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)                   | 165        |
| c. Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2)                   | 166        |
| d. Elementul integrator (I)                                    | 168        |
| e. Elementul derivator (D)                                     | 168        |
| f. Elementul cu timp mort (TM )                                | 169        |
| 2.4. Trasarea diagramei Bode prin linii poligonale aproximante | 169        |
| 3. Principiul non-anticipării                                  | 171        |
| 3.1. Filtre ideale                                             | 171        |
| a. Filtrul ideal «trece-tot» (elementul cu timp mort)          | 171        |
| b. Filtrul ideal fără distorsiuni de fază                      | 172        |
| b1. Filtrul ideal «trece-jos»                                  | 173        |
| b2. Filtrul ideal «trece-sus»                                  | 174        |
| b3. Filtrul ideal «trece-bandă»                                | 174        |
| b4. Filtrul ideal «oprește-bandă»                              | 175        |
| 3.2. Sisteme dinamice realiste                                 | 175        |
| 3.3. Sisteme de defazaj minim                                  | 180        |
| 4. Stabilitatea și stabilizarea sistemelor automate            | 183        |
| 4.1. Principiul argumentului                                   | 183        |
| a. Integrala pe contur a derivatei logaritmice                 | 183        |
| b. Variația totală a argumentului                              | 184        |
| c. Criteriul Cremer – Leonhard                                 | 184        |
| 4.2. Criteriul Nyquist                                         | 185        |
| a. Utilizarea locului de transfer                              | 185        |
| b. Aplicație: sistem automat de poziționare                    | 189        |
| c. Sisteme cu timp mort                                        | 191        |
| d. Factorul de amplificare ca parametru                        | 193        |
| e. Utilizarea diagramei Bode                                   | 193        |
| 4.3. Corecția sistemelor automate                              | 195        |
| a. Condiții impuse sistemului automat                          | 195        |
| b. Corecția în domeniul frecvențelor                           | 197        |
| c. Reglarea în cascadă                                         | 201        |
| <b>VII. Sisteme automate neliniare</b>                         | <b>203</b> |
| 1. Metoda funcției de descriere                                | 205        |
| 1.1. Procedul celor două locuri                                | 205        |
| a. Definiția funcției de descriere                             | 205        |
| b. Calculul aproximativ al funcției de descriere;              |            |
| o formulă de inversiune                                        | 208        |
| c. Schema bloc structurală                                     | 209        |
| d. Punct de echilibru                                          | 210        |
| e. Ecuația balanței armonice; procedul celor două locuri       | 212        |
| 1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute                     | 214        |
| a. Oscilații limită                                            | 215        |
| b. Regula lui Loeb                                             | 215        |

|                                                         |     |
|---------------------------------------------------------|-----|
| 1.3. Stabilitatea punctului de echilibru                | 219 |
| a. Preliminarii                                         | 219 |
| b. Cazul sistemelor liniare                             | 221 |
| c. Stabilitatea asimptotică în primă aproximație        | 222 |
| d. Regula lui Kochenburger                              | 224 |
| e. Aplicație: sistem automat de poziționare             | 224 |
| f. Criteriul Bilharz                                    | 225 |
| g. Stabilitatea asimptotică în mic                      | 227 |
| 1.4. Problema stabilizării                              | 227 |
| a. Posibilități de stabilizare                          | 227 |
| b. Utilizarea diagramei Bode                            | 228 |
| c. Aplicație: sistem de reglare automată a temperaturii | 229 |
| 2. Stabilitatea absolută                                | 231 |
| 2.1. Problema lui Lurie                                 | 231 |
| 2.2. Criteriul Popov                                    | 232 |
| 2.3. Forma grafică a criteriului Popov                  | 235 |
| 2.4. Conjectura Aizerman                                | 237 |
| 2.5. Cazul sectorului $[K_1, K_2]$                      | 238 |
| 2.6. Compensarea serie a părții liniare                 | 238 |
| 2.7. Criteriul cercului                                 | 239 |

## **Anexa A. Transformări integrale** **241**

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 1. Transformarea Laplace                   | 241 |
| 1.1. Transformarea directă                 | 241 |
| a. Observații                              | 241 |
| b. Teoreme                                 | 242 |
| c. Transformatele Laplace ale unor funcții | 243 |
| 1.2. Transformarea inversă                 | 243 |
| a. Observații                              | 243 |
| b. Teoreme                                 | 244 |
| 2. Transformarea Fourier                   | 245 |
| 2.1. Transformarea directă                 | 245 |
| a. Condiții de existență și observații     | 245 |
| b. Teoreme                                 | 245 |
| c. Transformatele Fourier ale unor funcții | 246 |
| 2.2. Transformarea inversă                 | 247 |
| a. Observații                              | 247 |
| 3. Transformarea Fourier — Plancherel      | 248 |
| a. Definiție și condiții de existență      | 248 |
| b. Teoreme                                 | 248 |

## **Anexa B. Noțiuni de teoria distribuțiilor** **249**

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| 1. Distribuții (funcții generalizate)                 | 249 |
| 1.1. Premise pentru generalizarea noțiunii de funcție | 249 |
| a. Funcția Heaviside și impulsul Dirac                | 249 |
| b. Observații                                         | 249 |
| 1.2. Noțiunea de distribuție                          | 250 |

|                                                                                                  |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| a. Distribuția Dirac                                                                             | 250                   |
| b. Distribuții cu suport compact                                                                 | 250                   |
| c. Pseudofuncții                                                                                 | 253                   |
| d. Distribuții temperate                                                                         | 254                   |
| 2. Transformările Fourier și Laplace ale distribuțiilor                                          | 255                   |
| 2.1. Transformarea Fourier a distribuțiilor                                                      | 255                   |
| a. Definiție și rezultate                                                                        | 255                   |
| b. Teoreme                                                                                       | 255                   |
| c. Transformatele Fourier ale unor distribuții                                                   | 255                   |
| 2.2. Transformarea Laplace a distribuțiilor                                                      | 257                   |
| a. Definiție                                                                                     | 257                   |
| b. Teoreme                                                                                       | 257                   |
| 2.3. Transformarea Fourier directă unilaterală                                                   | 257                   |
| a. Definiții și observații                                                                       | 257                   |
| b. Transformatele Fourier unilaterale ale unor funcții                                           | 258                   |
| c. Transformata Fourier directă unilaterală ca funcție marginală a transformatei Laplace directe | 258                   |
| <b>Anexa C. Tabele de transformate Laplace și Fourier</b>                                        | <b>261</b>            |
| 1. Transformate Laplace                                                                          | 261                   |
| 2. Transformate Fourier                                                                          | 260                   |
| <b>Bibliografie</b>                                                                              | <b>262</b>            |
| <b>Sisteme automate studiate în cadrul unor aplicații ilustrative</b>                            |                       |
| 1. Sistem de reglare automată a turației                                                         |                       |
| a. Motorul electric de c.c.                                                                      | Exemplul II.2.1 25    |
|                                                                                                  | Exemplul II.2.2 28    |
|                                                                                                  | Exemplul II.2.3 30    |
| b. Scheme bloc                                                                                   | Exemplul III.2.1 96   |
|                                                                                                  | Exemplul III.2.3 99   |
| c. Caracteristica statică                                                                        | Exemplul III.3.1 106  |
| d. Senzitivitatea                                                                                | Exemplul III.3.2 110  |
| e. Erorile staționare                                                                            | Exemplul III.5.1 125  |
| f. Reglarea în cascadă                                                                           | Exemplul VI.4.7 202   |
| 2. Sistem automat de poziționare                                                                 |                       |
| a. Servomotorul                                                                                  | Exemplul II.7.4 74    |
| b. Cazul liniar                                                                                  | §VI.4.2.b 189         |
| c. Cazuri neliniare                                                                              | §VII.1.3.e 224        |
|                                                                                                  | Exemplul VII.1.11 226 |
| 3. Sistem de reglare automată a temperaturii                                                     |                       |
| Cazul neliniar și cu timp mort                                                                   | §VII.1.4.c 229        |

...Ne-am însușit o parte din comoara agonisită de premergătorii noștri și modul de a vedea lumea este, pentru mulți dintre noi, de-a dreptul format, pentru unii cel puțin întărit, pentru toți, întrucâtva modificat prin colaborarea tainică a autorilor citiți.

Titu Maiorescu

Idealul ar fi să te poți repeta precum ... Bach.

Emil Cioran

The continued health of control theory requires a steady flow of talented young mathematical scientists, with a broad mathematical background and some training in applications.

Society for Industrial & Applied Mathematics

The most incomprehensible thing about the world is that it is comprehensible.

Albert Einstein

## PREFAȚĂ

---

I se mai spune *tehnologia invizibilă*. Este invizibilă pentru că, deși face uz de obiecte, ea rezidă în primul rând în relațiile dintre obiectele implicate. Nu este în mod voit invizibilă și nu are nimic în comun cu magia. Cu toate acestea i s-ar putea spune (metaforic) și tehnomagie. Pentru că tehnologia invizibilă a făcut posibilă, de exemplu, levitația obiectelor; fără pase magice, sub forma *sustențatției electromagnetice*, care deschide, după îndelungi și costisitoare cercetări, noi orizonturi în transporturile terestre ...fără roți. A făcut posibilă utilizarea în condiții de stabilitate a reacției de *fisiune nucleară*, care oferă resurse uriașe de energie, sau conducerea în condiții de flexibilitate a *liniilor de fabricație robotizate*, care asigură creșteri fără precedent ale productivității și eficienței economice, sau realizarea de *echipamente medicale* care asigură circulația și oxigenarea sângelui pe durata unor intervenții chirurgicale. Și exemplele ar putea continua, pentru că **automatizarea** – aceasta este tehnologia invizibilă – a produs rezultate și are implicații societale cât se poate de vizibile. Se poate afirma că nici o altă tehnologie a secolului al XX-lea n-ar fi fost posibilă fără tehnologia invizibilă. Tot așa cum aceasta n-ar fi fost posibilă și nu ar fi făcut imense progrese dacă însuși progresul cunoașterii științifice și al inovării tehnologice n-ar fi stimulat-o, impulsionat-o sau determinat-o, în multe cazuri, cu necesitate. Ea este deschisă tuturor azimuturilor. Este *matematică aplicată* prin metodele care o generează și este *inginerie* prin aplicații. Baza ei științifică este înalt teoretică din necesități cât se poate de practice, fiind încă o ilustrare a adagiului, aparent paradoxal, dar de mare profunzime și simplitate, conform căruia: „*nimic nu este mai practic decât o teorie bună*” (Helmholz).

A început prin a întregi mașinile și tehnologiile mecanice, a devenit indispensabilă în aparatele, mașinile și tehnologiile electrotehnice, în instalațiile și tehnologiile energetice, în aparatele, utilajele și procesele din industria chimică, în transporturi, în telecomunicații, în aeronautică și astronautică, în tehnologia construcțiilor, în aparatura biomedicală, în aparatura de birou și domestică, și se dovedește a fi un factor major în dezvoltarea industriei biotehnologiilor. Este ubicuă, concret foarte adaptabilă și diversificată, conceptual și metodologic unitară, efectiv necesară și ... invizibilă. Invizibilă pentru că, de regulă și cât se poate de firesc, laicul este tentat să vadă mai întâi obiectele (ca în proverbul despre copaci și pădure) și mai apoi (sau niciodată) ceea ce este dincolo de obiecte – adică, în general, *ideile* și, în speță, *relațiile algoritmice de conducere*. Prin acestea se distinge **automatica** (baza științifică a *automatizării* – adică a tehnologiei invizibile) de electronică,

tehnica de calcul sau informatică. Fiind într-o simbioză eficientă cu toate trei în cadrul a ceea ce astăzi constituie **știința și tehnologia informației**, automatica nu coincide cu nici una și nici cu toate trei la un loc. Pentru că este o știință de sine stătătoare și totodată de sinteză, precum și a transferului de cunoștințe și de soluții peste orice frontiere. În care *matematica* a jucat și va juca în continuare un rol de prim rang, din care au reieșit probleme cu impact semnificativ, dezvoltări și rezultate profunde și elegante în multe ramuri ale matematicii însăși.

În acest cadru, menirea *inginerului automatist* este aceea ca, pe baza cunoașterii sistemelor ce urmează a fi automatizate, să conceapă *algoritmii de conducere* (prin metode matematice) și *aparatura* (prin metode tehnice) care să materializeze respectivii algoritmi. Chiar dacă ceea ce rămâne la vedere este doar aparatura (electrică, electronică, de calcul etc.), în fond această profesie este inter-, trans- și multidisciplinară. Deoarece exercitarea ei competentă necesită cunoștințe de matematică, fizică, chimie, biologie, electrotehnică, electronică, tehnică de calcul, informatică și, nu în ultimul rând, de **automatică**, toate adecvat operante în conceperea, realizarea și utilizarea automatizărilor. Cu alte cuvinte, inginerul automatist trebuie să aibă cultură științifică și tehnică, viziune sistemică, orientare pragmatică, spirit deschis, atitudine pozitivă și capacitate de cooperare și de lucru în echipă, care să-i permită abordarea și soluționarea problemelor de automatizare a celor mai diverse sisteme (mecanice, electrice, termice, fluidice, chimice, biologice sau combinații ale acestora). Iată de ce, la noi ca și pretutindeni, evoluția automaticii, mai ales a *automaticii teoretice*, are nevoie în mod constant de tineri cu aptitudini în domeniul matematicii și cu deschidere spre aplicații. Oriunde se găsesc, vor fi bine veniți și cât se poate de vizibili în această profesie a tehnologiei invizibile.

Scopul acestei cărți este de a prezenta elementele introductive de bază ale automaticii, centrate pe **conceptul fundamental de structură cu reacție negativă** și pe **principiul abaterii**. Tratarea este atât sistemic-teoretică, prin abordarea matematică strict necesară obținerii unor soluții riguroase și generale, cât și aplicativă, prin numeroasele exemple ilustrative diseminate pe parcursul întregii cărți. Însușirea cunoștințelor prezentate în această carte asigură competențe în ingineria sistemelor automate monovariabile și anume: privitor la proprietățile sistemelor dinamice liniare și neliniare (capitolele II, VII – parțial) și privitor la analiza și sinteza sistemelor automate (capitolele I, III – VII). Două metode de analiză și sinteză a sistemelor automate – *metoda locului rădăcinilor* (capitolul V) și *metoda frecvențială* (capitolele VI, VII) – oferă procedee eficiente de proiectare a sistemelor automate monovariabile, care constituie categoria de sisteme automate de tip clasic cel mai frecvent utilizate în industrie și în alte sectoare de activitate.

Totodată, această carte este menită să deschidă calea spre cunoștințe avansate de **automatică**, care fac posibile sinteze teoretice și soluții practice eficiente bazate pe produsele fascinante oferite, într-un ritm fără precedent în istoria omenirii, de **știința și tehnologia informației**.

În acest context, prezenta *Introducere în automatică* se adresează studenților și inginerilor automatiști, calculatoriști, electroniști, electrotehnicienii, energeticienii, chimiști, mecanicienii, ca și informaticienilor sau matematicienilor analiști de proces care vor activa sau activează în domeniul automaticii și al automatizărilor, în calitate de utilizatori, proiectanți și cercetători.

## Lista de abrevieri, simboluri și notații

---

|                                  |                                                                                                      |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t$                              | variabila temporală                                                                                  |
| $\rightarrow$                    | conexiune cauzală (I.2.4.3°–5°)                                                                      |
| $u, w$                           | mărimi de intrare (cauze) ; $u$ – mărime de comandă, $w$ – perturbație                               |
| $y$                              | mărime de ieșire (efect)                                                                             |
| $i = 1, n$                       | indicele $i$ parcurge mulțimea primelor $n$ numere naturale $\{1, 2, \dots, n\}$                     |
| $\mathbf{R}$                     | mulțimea numerelor reale (axa reală)                                                                 |
| $\mathbf{R}_+$                   | mulțimea numerelor reale nenegative (semi-axa reală nenegativă)                                      |
| $\mathbf{C}$                     | mulțimea numerelor complexe (planul complex)                                                         |
| $s$                              | variabila complexă                                                                                   |
| $ s $                            | modulul lui $s$                                                                                      |
| $\arg s$                         | argumentul lui $s$                                                                                   |
| $\bar{s}$                        | conjugata variabilei complexe $s$                                                                    |
| $\operatorname{Re} s$            | partea reală a lui $s$                                                                               |
| $\{\operatorname{Re} s < 0\}$    | mulțimea numerelor cu $\operatorname{Re} s < 0$ (semiplanul complex stâng)                           |
| $\{\operatorname{Re} s \leq 0\}$ | mulțimea numerelor cu $\operatorname{Re} s \leq 0$ (semiplanul complex stâng inclusiv axa imaginară) |
| $\{\operatorname{Re} s > 0\}$    | mulțimea numerelor cu $\operatorname{Re} s > 0$ (semiplanul complex drept)                           |
| $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ | mulțimea numerelor cu $\operatorname{Re} s \geq 0$ (semiplanul complex drept inclusiv axa imaginară) |
| $\operatorname{Im} s$            | partea imaginară a lui $s$                                                                           |
| $j = \sqrt{-1}$                  | (unitatea imaginară)                                                                                 |
| $\mathcal{L}$                    | transformarea Laplace directă (Anexele A.1, B.2.2)                                                   |
| $\mathcal{L}^{-1}$               | transformarea Laplace inversă (Anexa A.1)                                                            |
| $f(t-0), f(t+0)$                 | limitele laterale în punctul $t$ ale funcției $f(t)$                                                 |
| $F(s)$                           | transformata Laplace a funcției $f(t)$                                                               |
| $\mathcal{F}$                    | transformarea Fourier directă (Anexele A.2, A.3, B.2.1, B.2.3)                                       |
| $\mathcal{F}^{-1}$               | transformarea Fourier inversă (Anexa A.2)                                                            |
| $F(j\omega)$                     | transformata Fourier a funcției $f(t)$                                                               |
| BIBO                             | bounded input – bounded output (intrare mărginită – ieșire mărginită)                                |
| $\delta(t)$                      | impulsul Dirac (II.3.1, Anexa B.1)                                                                   |
| $s(t)$                           | funcția treaptă unitară (II.4.1, Anexa B.1)                                                          |
| $f^{(k)}(t)$                     | derivata de ordinul $k$ a funcției $f(t)$                                                            |
| $D^k f(t)$                       | derivata generalizată de ordinul $k$ a funcției $f(t)$ (Anexa B.1.2.b.7°)                            |
| $g(t)$                           | răspunsul la impulsul Dirac (II.3)                                                                   |
| $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$     | funcția de transfer (II.1.4)                                                                         |

Lista de abrevieri, simboluri și notații

---

|                                         |                                                                          |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $I_n$                                   | matricea unitate de ordinul $n$                                          |
| $\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$   | matricea diagonală de ordinul $n$ cu elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$   |
| $h(t)$                                  | răspunsul indicial (la funcția treaptă unitară) (II.4)                   |
| $\bar{h}$                               | valoarea de regim staționar a răspunsului indicial (II.4.2.g)            |
| $s\%$                                   | suprareglarea (II.7.1)                                                   |
| $t_s$                                   | durata regimului tranzitoriu (II.7.1)                                    |
| $t_s$                                   | durata adimensională a regimului tranzitoriu (II.7.2.c3)                 |
| $t_c$                                   | durata de creștere (II.7.1)                                              |
| $P$                                     | element proporțional (II.7.2.a, VI.2.3.a)                                |
| $T1$                                    | element de întârziere de ordinul 1 (II.7.2.b, VI.2.3.b)                  |
| $T2$                                    | element de întârziere de ordinul 2 (II.7.2.c, VI.2.3.c)                  |
| $z$                                     | factorul de amortizare a elementului de întârziere de ordinul 2 ( $T2$ ) |
| $\omega_n$                              | pulsatia naturală a elementului de întârziere de ordinul 2 ( $T2$ )      |
| $\omega_p$                              | pulsatia proprie a elementului de întârziere de ordinul 2 ( $T2$ )       |
| $I$                                     | element integrator (II.7.2.d, VI.2.3.d)                                  |
| $D$                                     | element derivator (II.7.2.e, VI.2.3.e)                                   |
| $TM$                                    | element cu timp mort (cu timp de întârziere) (II.7.2.f, VI.2.3.f)        |
| $a$                                     | abaterea (III.1.2.1°, III.3.1)                                           |
| $e$                                     | eroarea de reglare (III.2.1, III.5, III.6)                               |
| $G(j\omega)$                            | răspunsul la frecvență (IV.1)                                            |
| $M(\omega) =  G(j\omega) $              | modulul răspunsului la frecvență (VI.1)                                  |
| $A_{dB}(\omega) = 20 \log  G(j\omega) $ | atenuarea răspunsului la frecvență (IV.2.2)                              |
| $\angle G(j\omega) = \arg G(j\omega)$   | faza răspunsului la frecvență (IV.2.2)                                   |
| $R(\omega) = \text{Re } G(j\omega)$     | partea reală a răspunsului la frecvență                                  |
| $I(\omega) = \text{Im } G(j\omega)$     | partea imaginară a răspunsului la frecvență                              |
| $G_0(s)$                                | funcția de transfer a sistemului în circuit închis (III.2.2, VI.4.2)     |
| $G_d(s)$                                | funcția de transfer a sistemului în circuit deschis (III. 4.2, VI.4.2.a) |
| $A_d(\omega)$                           | atenuarea sistemului în circuit deschis (VI.4.2.b)                       |
| $\angle d(\omega)$                      | faza sistemului în circuit deschis (VI.4.2.b)                            |
| $\omega_t$                              | pulsatia de tăiere în sensul sistemelor automate (VI.4.2.a, e)           |
| $m, m_{dB}$                             | marginea de amplificare (VI.4.2.a, e)                                    |
| $g$                                     | marginea de fază (VI.4.2.a, e)                                           |
| $PID$                                   | (regulator) proporțional – integral – derivativ (IV)                     |
| $\text{l.i.m.}$                         | limes in medio (limita în medie) (A.3.a)                                 |
| $Pf$                                    | pars finita (partea finită) (B.1.2.c)                                    |
| $Pf f$                                  | pseudofuncția asociată funcției $f$ (B.1.2.c)                            |
| $\mathcal{O}$                           | începutul unei demonstrații                                              |
| $\square$                               | sfârșitul unui enunț, al unei demonstrații sau al unui exemplu           |



### 1. Automatizarea: conținut, categorii și scopuri

Termenii *automat* și *automatizare* fac parte din categoria celor mai utilizați atât în limbajul ingineresc cât și, păstrând proporțiile, în limbajul curent.

În limba română cuvântul *automat* se folosește atât cu valoare de substantiv cât și cu valoare de adjectiv.

Adjectival, cuvântul *automat* desemnează calitatea unui sistem fizico-tehnic de a efectua, pe baza unei comenzi, o operație sau un complex de operații fără participarea directă a operatorului uman.

Substantival, un *automat* este un dispozitiv, un aparat sau o instalație – în general un *sistem* care operează sau funcționează în mod automat, adică are calitatea desemnată prin adjectivul *automat*.

În acest context, *automatizarea* reprezintă acțiunea de concepere, de realizare de automate și de echipare a sistemelor fizico-tehnice cu automate pentru efectuarea în mod automat a unor operații, mișcări, acțiuni etc. Cele mai importante categorii de automatizări sunt următoarele: de comandă, de măsurare, de reglare, de protecție, și de semnalizare (toate realizabile, după caz, ca automatizări locale sau ca teleautomatizări).

În cadrul societății industriale și al celei postindustriale scopurile generale ale automatizării sunt următoarele: creșterea productivității, scăderea consumurilor specifice (de materii prime, de materiale, de combustibil și de energie), asigurarea preciziei execuției, creșterea siguranței în funcționare, protejarea instalațiilor, scoaterea operatorului uman din medii nocive și, nu în ultimul rând, eliberarea acestuia de participarea nemijlocită la producția de bunuri și de servicii.

Sub aspect socio-economic automatizarea conferă omului o poziție calitativ nouă în raport cu producția de bunuri și de servicii. Omul, eliberându-se de munca fizică nemijlocită și de participarea directă la procesul de producție și de servicii, conduce, comandă și supraveghează instalațiile (automatizate) create de el însuși.

Crearea *instalațiilor tehnologice* și a *tehnologiilor* corespunzătoare este un atribut esențial al *ingineriei*.

Ingineria, în sens larg, constă în cunoașterea și utilizarea materialelor și forțelor naturii pentru beneficiul umanității, de regulă cu ajutorul unor construcții, mașini și instalații (în general – sisteme fizico-tehnice) concepute, realizate și utilizate în cadrul unor organizații socio-economice. În acest cadru *inginerul automatist* are menirea ca, pe baza cunoașterii sistemelor fizico-tehnice, să conceapă și să realizeze automatizarea acestora. În mod firesc această profesie este inter-, trans- și multidisciplinară deoarece exercitarea ei competentă necesită cunoștințe de matematică, fizică, chimie, biologie, electrotehnică, electronică, tehnică de calcul, informatică și, nu în ultimul rând, de **automatică**, toate adecvat operante în conceperea, realizarea și utilizarea automatizărilor. Cu alte cuvinte, inginerul automatist trebuie să aibă o cultură științifică și tehnică temeinică, dublată de o autentică *viziune sistemică*

astfel încât acestea să-i asigure abordarea și soluționarea problemelor de automatizare a celor mai diverse sisteme fizico-tehnice (mecanice, electrice, termice, fluidice, chimice, biologice sau combinații ale acestora).

## 2. De la mecanizare la automatizare

Dezvoltarea producției de bunuri și de servicii în cadrul societății umane a fost marcată hotărâtor de două mari evenimente:

- revoluția industrială din secolul XVIII, caracterizată de utilizarea pe scară largă a mașinilor unelte și a altor mașini și utilaje acționate de mașina cu vaporii;
- revoluția științifico-tehnică contemporană, caracterizată de automatizarea sistemelor fizico-tehnice și de altă natură, precum și de informatizarea globală a societății omenesci.

La scara istoriei, producția de bunuri și de servicii s-a dezvoltat pe următoarele trepte:

- manufactură
- mecanizare
- **automatizare**, care a intrat în faza de **cibernetizare**; aceasta se caracterizează prin prelucrarea complexă a informației folosind tehnica de calcul (inclusiv în cadrul unor structuri distribuite) și proceduri matematice și informatice adecvate.

Prin trecerea de la o treaptă la alta (fără părăsirea definitivă a treptelor precedente) omul a transferat mașinilor rolul de executant (pe treapta mecanizării), rămânând un participant direct și necesar în cadrul procesului de producție; apoi (în cazul automatizării și cibernetizării) s-a eliberat de participarea directă la procesul de producție, dobândind funcții noi: de conducere, de comandă și de supraveghere a respectivului proces.

Prin mecanizare munca manuală a omului se înlocuiește cu mecanisme, aparate și mașini acționate de convertori de energie adecvați. Operatorul uman ia parte la procesul de producție în calitate de manipulator al mijloacelor de mecanizare, ca un component necesar

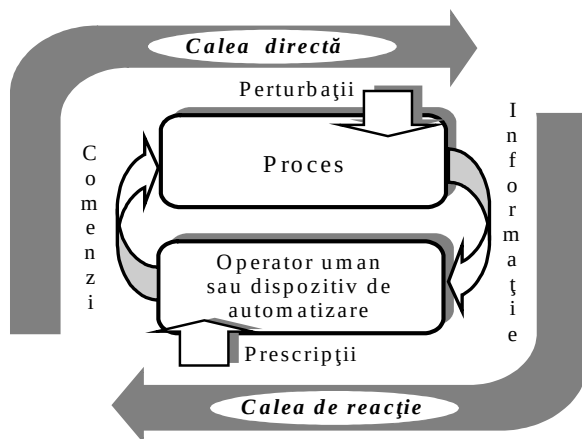


Fig. I.1 Structura și relațiile în cadrul unei mecanizări sau al unei automatizări

al desfășurării normale a procesului de producție. Operatorul uman se eliberează de efortul fizic direct. Procesele de producție devin mai rapide, mai eficiente (crește raportul calitate / preț), mai complexe și mai cuprinzătoare. Operatorul uman urmărește numeroase mări

fizice și pe baza lor influențează, – prin dispozitive și aparate adecvate –, fluxurile de substanță, de energie și de informație. Activitatea sa constă în prelucrarea cerebrală a *informațiilor* despre proces (pe baza cunoștințelor și a experienței privind evoluția procesului) și din *comenzi de dirijare a procesului în conformitate cu prescripțiile* privind evoluția corectă (normală) a procesului. Între proces și operatorul uman se stabilesc astfel anumite relații care pot fi exprimate grafic ca în fig. I.1. Participarea operatorului uman este necesară deoarece *perturbațiile* care acționează asupra procesului tind să-l abată de la desfășurarea sa conform prescripțiilor. Rolul operatorului este acela de a sesiza aceste *abateri* și de a acționa, prin *comenzi*, în sensul reducerii efectului perturbațiilor, respectiv al reducerii *abaterii* dintre evoluția *prescrisă* și evoluția *curentă* ale procesului. În acest sens operatorul uman constituie *calea de reacție* (preponderent informațională și de nivel energetic redus), în timp ce procesul constituie *calea directă* (preponderent procesoare de substanță și de energie, și în subsidiar de informație), așa cum se menționează pentru sistemul proces-operator uman reprezentat în fig. I.1.

### Exemplul 2.1 (mecanizare)

Pentru exemplificarea unei mecanizări și totodată pentru concretizarea structurii din fig. I.1, se consideră instalația tehnologică cu schema de principiu din fig. I.2. Aceasta trebuie să furnizeze unor consumatori tehnologici un debit  $Q_2$  (variabil prin robinetul R, dar conform unor necesități imprevizibile) de lichid tehnologic LT, la presiune și temperatură prescrise (de exemplu constante). O soluție simplă constă în menținerea unui nivel constant al lichidului din RT prin debitul  $Q_1$  (prin care să se compenseze consumul  $Q_2$ ) și a temperaturii constante a lichidului din RT prin debitul  $Q_t$  al agentului termic care străbate schimbătorul de căldură SC (prin care să se compenseze variația de temperatură produsă de adaosul de lichid rece,  $Q_1$ ). Rolul operatorului uman Op este acela de a urmări indicațiile nivelmetrului N și termometrului T și în funcție de *abaterile valorilor curente* ale nivelului și temperaturii față de valorile lor *prescrise* (conform prescripțiilor tehnologice ale consumatorilor) să pornească sau să oprească adecvat motorul M (de acționare a pompei P) prin comutatorul C și să deschidă sau să închidă adecvat robinetul R. □

În cadrul acestei mecanizări funcțiile operatorului uman sunt următoarele:

- prelevarea informației despre proces (activitate *senzorială*),
- prelucrarea informației și elaborarea deciziei de comandă (activitate *intelectuală*),
- acționarea organelor de reglare (activitate *motorie*).

Aceste funcții sunt exercitate în sensul *reducerii abaterii* dintre valoarea *prescrisă* (constantă) și valoarea *curentă* (ale nivelului și respectiv ale temperaturii), abatere provocată în primul rând de acțiunea *perturbației*. Concret, debitul  $Q_2$  perturbă nivelul și debitul  $Q_1$  perturbă temperatura lichidului din RT.

În procesele tehnologice automatizate operatorul uman este înlocuit cu un *dispozitiv de automatizare* care realizează, *mutatis mutandis*, aceleași funcții ca și operatorul uman, conform unei structuri ca aceea din fig. I.1.

### Exemplul 2.2 (automatizare)

O soluție simplă de automatizare a sistemului din fig. I.2 este ilustrată (principial) în fig. I.3, în care, pentru reglarea nivelului, nivelmetrul N acționează direct (și adecvat) contactorul C. Pentru reglarea temperaturii, termometrul TC (cu mercur, având o pereche de

contacte – unul în masa metalică lichidă și altul în zona liberă a capilarului, fig. I.4.a) acționează direct electroventilul  $EV_t$  (a cărei construcție principială este prezentată în fig. I.4.b). În acest fel motorul M (implicit pompa P) este pornit sau oprit în mod *automat* în funcție de scăderea sau creșterea valorii curențe a nivelului față de valoarea prescrisă și respectiv electroventilul  $EV_t$  se deschide sau se închide în funcție de scăderea sau creșterea valorii curențe a temperaturii față de valoarea sa prescrisă.

Modificarea valorilor prescrise (dacă este necesar) este posibilă prin schimbarea lungimii tijei nivelmetrului N, – în cazul reglării automate a nivelului –, și, respectiv, deplasarea contactului superior al termometrului T (rotirea magnetului exterior antrenează magnetul interior cu contact, care se rotește pe axul filetat în sus sau în jos, fig. I.4.a), – în cazul reglării automate a temperaturii. □

În general, pentru realizarea funcțiilor sale în cadrul *structurii cu reacție*, dispozitivul de automatizare este constituit din:

- *traductor*, cu ajutorul căruia se măsoară valoarea curență (a nivelului sau a temperaturii);
- *regulator*, care elaborează comanda, pe baza unui algoritm, astfel încât evoluția sistemului să aibă loc în sensul anulării abaterii dintre valorile prescrise (existente în regulator) și cea curență (măsurată de traductor);
- *element de execuție*, care reproduce comanda elaborată de regulator la un nivel energetic adecvat și care acționează prin organul de reglare (existent în proces) asupra fluxurilor de energie și / sau de substanță implicate în procesul automatizat.

O comparare a celor două soluții (fig. I.2 și fig. I.3) din punctul de vedere al aparaturii utilizate conduce la următoarele constatări:

- în cazul mecanizării aparatele trebuie să facă posibilă includerea operatorului uman ca în fig. I.1. Astfel, aparatele de măsură oferă indicații *vizuale* și organele de reglare permit (prin intermediul unor dispozitive de mecanizare) comanda *manuală*, acestea fiind interfețele normale cu operatorul uman;
- în cazul *automatizării*, aparatele de măsură cu indicare vizuală și organele de reglare comandabile manual (prin dispozitive de mecanizare) nu sunt utilizabile ca atare; ele trebuie modificate (în sensul realizării lanțului *traductor – regulator – element de execuție*) astfel încât transferul, prelucrarea informațiilor și acționarea organelor de reglare să aibă loc fără participarea operatorului uman.

Din aceste constatări se trage concluzia că ingineria automatizării constă în crearea unor dispozitive și aparate specializate (traductoare, regulatoare și elemente de execuție) și asamblarea lor pentru realizarea automatizării celor mai diverse procese tehnologice. În acest scop s-a dezvoltat *tehnica automatizării* (și implicit o industrie a echipamentelor de automatizare) ale cărei componente principale sunt:

- *tehnica măsurării*: se ocupă cu prelevarea, compararea, convertirea, amplificarea, indicarea și înregistrarea mărimilor fizice;
- *tehnica reglării*: se ocupă cu elaborarea comenzilor, conform anumitor algoritmi, care să asigure modificarea fluxurilor de substanță, energie și informație;
- *tehnica telematicii*: se ocupă cu transmiterea la distanță a informațiilor între om și mașină sau între mașini;
- *tehnica de calcul*: se ocupă cu codificarea, prelucrarea, stocarea, decodificarea și distribuția informațiilor (inclusiv în timp real).

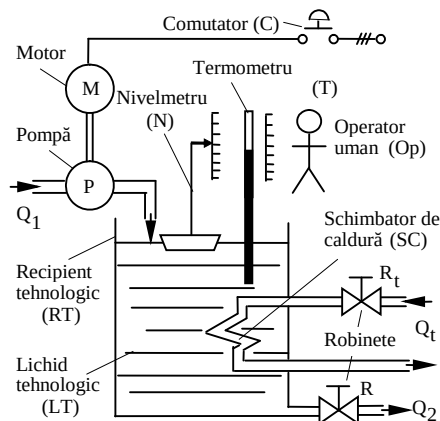


Fig. I.2 Instalație tehnologică mecanizată:  $Q_1$  – debitul de LT rece (proaspăt), debitul de LT cald (consumat),  $Q_t$  – debitul de agent termic

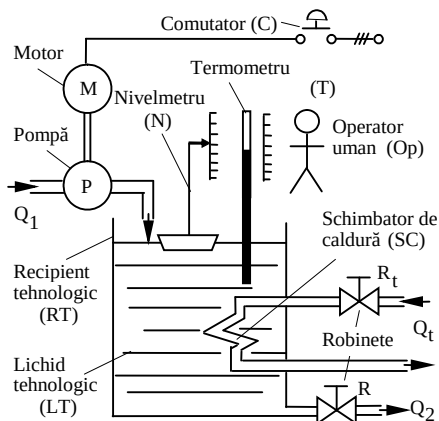


Fig. I.3 Instalație tehnologică automatizată (fig. I.2 – faza de mecanizare); TC – termometru de contact (fig. I.4.a),  $EV_t$  electroventil (fig. I.4.b)

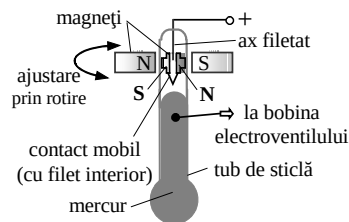


Fig. I.4.a. Schema unui termometru cu contact (TC)

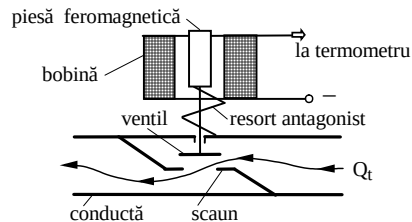


Fig. I.4.b. Schema unui electroventil ( $EV_t$ )

### 3. Ce este un sistem automat?

În cazul exemplurilor 2.1 și 2.2 (fig. I.2 și I.3) temperatura lichidului din RT variază (este perturbată) deoarece există un consum de lichid (debitul  $Q_2$ ) și un adaus de lichid proaspăt (debitul  $Q_1$ ). Prin variația adecvată a debitului  $Q_t$  al agentului termic, efectul perturbației, respectiv *abaterea* dintre *valoarea prescrisă* a temperaturii și *valoarea curentă* a ei poate fi *redușă până la anulare*. Conform celor două exemple, realizarea practică a reducerii abaterii este posibilă pe două căi:

- 1° Un operator uman prelucrează informațiile prelevate din proces și acționează prin organele de reglare (fig. I.2) asupra desfășurării procesului și anume în *sensul anulării abaterii* dintre valorile prescrisă și curentă ale nivelului / temperaturii.
- 2° Un aparat, respectiv un dispozitiv de automatizare, realizează prelevarea și prelucrarea informațiilor despre proces și acțiunea asupra desfășurării procesului (fig. I.3) în conformitate cu **principiul abaterii** și anume în *sensul anulării abaterii* dintre valorile prescrisă și curentă ale nivelului / temperaturii.

În ambele cazuri, indiferent de modul de realizare, evoluția întregului proces are loc în sensul **anulării abaterii** dintre *valoarea prescrisă* și *valoarea curentă* ale nivelului /

temperaturii, prin aceasta asigurându-se *compensarea efectului acțiunilor externe* (în primul rând al perturbației, dar și al mărimii prescrise a cărei valoare se poate modifica).

Funcțional cele două soluții sunt *izomorfe* în sensul că suportul abstract al ambelor soluții este unic, conform structurii din fig. I.1. În cel de al doilea caz este vorba de un *sistem automat* deoarece evoluția procesului are loc *fără participarea operatorului uman*. Acest lucru este posibil prin existența *căii de reacție*, constituită concret din elemente ale dispozitivelor de automatizare. În cazul mecanizării, calea de reacție este constituită de operatorul uman. *Reacția* este *negativă* deoarece ea determină evoluția procesului conform **principiului abaterii** adică în sensul *anulării abaterii* respectiv al anulării diferenței dintre *valoarea prescrisă* și *valoarea curentă* (ale temperaturii sau nivelului).

Un concept fundamental în *automatică*, care se referă la o formă specială de comunicație în cadrul sistemelor automate, este cel de *reacție* (în limb engleză feedback = retroacțiune). Ea poate fi *negativă* (ca în cazul sistemelor automate) sau *pozitivă* (ca în cazul sistemelor generatoare de oscilații).

Ca fenomen natural, reacția este prezentă la toate nivelele și formele de organizare a materiei, organismelor biologice și societăților. În acest cadru multi-, inter- și metadisciplinar, reacția (negativă sau pozitivă) este obiectul de studiu al *ciberneticii*.

### Exemplul 3.1 (reflexul pupilar fotomotor)

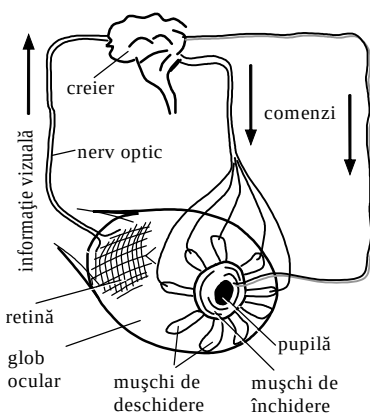


Fig. I.5. Schema «reflexului pupilar fotomotor»

Un exemplu al prezenței reacției negative în cadrul unui sistem biologic este reflexul pupilar fotomotor – fig.I.5. După cum este cunoscut, mușchiul pupilar de închidere este de formă inelară în centrul căruia se află pupila – orificiul circular de diametru variabil prin care lumina pătrunde în globul ocular. Deschiderea pupilei este realizată de mușchii radiali de deschidere. Rolul pupilei este acela de a regla, prin variația diametrului ei, cantitatea de lumină ce pătrunde în globul ocular. Acest reglaj are loc în mod reflex (automat) și anume la variația iluminării retinei. Prin intermediul nervului optic (calea de reacție) și a centrului optic, se transmit mușchilor pupilari comenzi de deschidere sau de închidere, în concordanță

cu descreșterea sau creșterea iluminării retinei (cauzată de sursa de lumină externă). În acest fel sistemul evoluează conform *principiului abaterii* adică în sensul *anulării abaterii* dintre *valoarea prescrisă* a iluminării (existentă în centrul optic cerebral) și *valoarea curentă* a iluminării retinei. Comportarea acestui sistem este similară cu aceea a oricărui sistem automat. De altfel, după cum este cunoscut, aparatele de fotografiat din ultima generație sunt echipate cu sisteme de reglare automată a iluminării peliculei fotosensibile a căror structură este similară, *mutatis mutandis*, cu aceea a «reflexului pupilar fotomotor». □

În tehnică reacția negativă a început să fie utilizată, fără o conceptualizare pertinentă, odată cu realizarea primelor sisteme automate. Trebuie remarcat faptul că noțiunea de reacție a apărut relativ târziu în electronică (odată cu inventarea triodei și a amplificatorului electronic cu reacție) și universalitatea ei a fost descoperită către sfârșitul anilor '30.

#### 4. Câteva repere istorice

Primele automatizări au fost identificate (evident, în cadrul unei evaluări retrospective) în reglarea automată a nivelului apei cu ajutorul flotorului (plutitorului) în ceasul cu apă (Ktesibios, Grecia Antică, sec. IV – III a.Chr.), fig.I.6. În acest caz menținerea automată, de către flotor – obturator, a nivelului apei în recipientul mijlociu la o valoare constantă asigură un debit constant al apei care se scurge în recipientul inferior. Ca urmare, nivelul apei în acest recipient crește uniform în timp, fapt care a putut fi utilizat pentru măsurarea timpului.

În sec. I, Heron din Alexandria a scris o carte intitulată „Pneumatica” în care a descris numeroase mecanisme bazate pe reglarea automată a nivelului apei.

În Europa prima automatizare a fost realizată de olandezul Cornelis Drebbel (1572 – 1633), care a inventat un regulator de temperatură pentru incubatoare – fig. I.7. Acesta este constituit dintr-un termometru cu mercur (la presiune atmosferică) în care plutește un flotor. Prin intermediul unui mecanism cu pârghii, flotorul acționează obturatorul de gaze arse al focarului incubatorului. Este ușor de constatat că la creșterea / scăderea temperaturii obturatorul deschide / închide automat orificiul de evacuare a gazelor arse, asigurând în acest fel menținerea unei temperaturi (aproximativ) constante în incinta incubatorului.

Prima automatizare care a avut o largă utilizare industrială și un impact în sensul cristalizării conceptelor a fost realizată de James Watt în 1769. Este vorba despre celebrul regulator centrifugal utilizat pentru reglarea automată a turației mașinii cu vaporii (inventată de același James Watt; exemplul 1.5 de la pag. 93), fig.I.8.

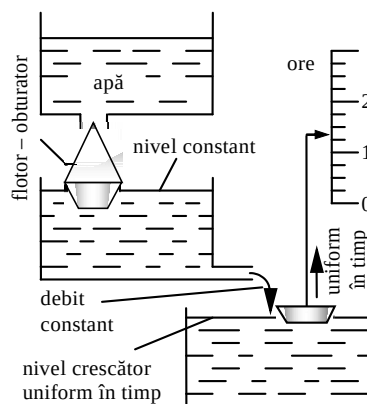


Fig. I.6. Ceas cu apă (Ktesibios)

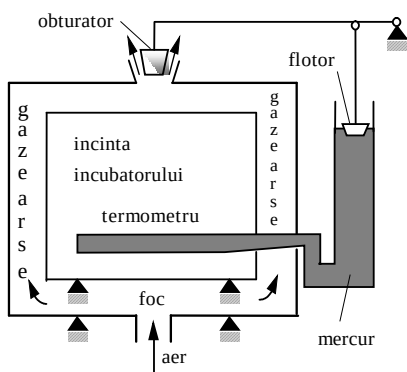


Fig. I.7. Incubator (Drebbel)

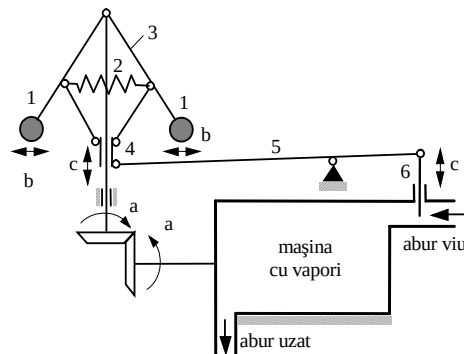


Fig. I.8. Sistem de reglare automată a turației mașinii cu vaporii; 1 – mase centrifugale, 2 – resort antagonist, 3 – mecanism patulater, 4 – culisă, 5 – pârghie, 6 – clapetă (organ de reglare); a – mișcare de rotație, b – mișcare cauzată de forța centrifugă, c – mișcare de translație

Este ușor de observat că scăderea / creșterea valorii curențe a turației mașinii cu vaporii are ca urmare deplasarea în jos / sus a culisei 4, respectiv în sus / jos a clapetei 6; consecința este o creștere / scădere a debitului de abur viu, fapt ce imprimă procesului o evoluție în sensul anulării abaterii dintre valoarea prescrisă și valoarea curentă a turației. Valoarea prescrisă a turației se poate modifica prin valoarea tensiunii inițiale a resortului 2. În ceea ce privește variația valorii curențe a turației, aceasta se datorează perturbațiilor. Este vorba în primul rând de cuplul rezistent al mecanismului acționat de mașina cu vaporii, a cărui creștere / scădere determină scăderea / creșterea turației, și de parametrii aburului viu (presiunea și temperatura).

Un studiu mai amplu al perioadei care a urmat automatizării mașinii cu vaporii conduce la concluzia că până în 1869 dispozitivele de automatizare au fost concepute și realizate pe baze empiric-intuitive. Au apărut totodată numeroase probleme de funcționare, imprevizibile în faza de proiectare. Este vorba de fenomene oscilatorii slab amortizate și chiar de instabilitate (oscilații neamortizate).

În acest cadru a apărut necesitatea unei teorii a sistemelor automate. În 1869 J. C. Maxwell a publicat primul studiu matematic privind stabilitatea unor sisteme automate. Puțin mai târziu, un studiu matematic mai amplu a fost întreprins de I.A. Vyshnegradskii.

Înainte de cel de al II-lea război mondial teoria și practica sistemelor automate s-au dezvoltat în mod diferit în Occident și în fosta URSS. În SUA un impuls în acest sens s-a datorat dezvoltării spectaculoase a telecomunicațiilor bazate pe amplificatoarele electronice cu reacție. Concret, este vorba de grupul format de Bode, Nyquist și Black de la Bell Telephone Laboratories care au fundamentat și utilizat *metoda frecvențială* bazată pe transformarea Fourier. În același timp, în fosta URSS s-au implicat în studiul sistemelor automate mari matematicieni și mecanicieni care au dezvoltat *metoda domeniului timpului* bazată pe teoria ecuațiilor diferențiale.

O dezvoltare remarcabilă a teoriei și (mai ales a) practicii sistemelor automate s-a produs pe parcursul celui de al II-lea război mondial. A fost necesar, în ambele tabere beligerante, să se proiecteze și să se construiască piloți automați pentru avioane, sisteme de poziționare automată (pe țintă) a pieselor de artilerie, sisteme de urmărire automată cu echipamente radar, ca și alte sisteme automate de uz militar sau civil. Înainte de 1940 proiectarea sistemelor automate a fost mai degrabă o artă bazată pe încercare – eroare.

În anii '40 au fost formulate metode riguroase astfel că ingineria sistemelor automate a devenit o disciplină științifică de sine stătătoare. *Metoda frecvențială*, bazată acum și pe transformarea Laplace, împreună cu *metoda locului rădăcinilor* au dominat în perioada anilor '50. Totodată a fost revigorată *metoda domeniului timpului* (începând cu anii '60), ceea ce a permis o abordare nouă a problemelor stabilității și optimalității sistemelor automate.

Sub aspect tehnologic, astăzi și în viitor, tehnica de calcul pătrunde rapid în conducerea și reglarea automată a proceselor complexe din industrie, ca și din domenii neindustriale. Trebuie remarcat faptul că însăși complexitatea acestor procese reclamă o abordare nouă, posibilă tehnologic numai utilizând pe scară largă tehnica de calcul.

#### **Exemplul 4.1** (conducerea blocului «cazan de abur – turbină – generator sincron»)

Un exemplu elocvent în acest sens este conducerea unui bloc «cazan de abur – turbină – generator sincron» cu ajutorul calculatorului – fig. I.9. Calculatorul de proces, pe baza informațiilor prelevate din proces și pe baza „cunoașterii” de către calculator a fenomenelor (exprimate sub forma unor relații matematice) care au loc în blocul «cazan de abur – turbină – generator sincron», elaborează comenzi de conducere și reglare automată.



Principalele mărimi fizice care trebuie menținute constante (asigurându-se în acest fel calitatea energiei electrice furnizate) sunt *frecvența* (turația turbinei) și *tensiunea* (eficace) la bornele generatorului sincron. Principalele perturbații sunt *puterile activă și reactivă* solicitate de consumatori, dar la acestea se mai adaugă: căldura specifică a combustibilului, temperatura apei de alimentare, temperatura aerului de ardere și presiunea atmosferică. Mărimile (principale) de comandă ale blocului «cazan de abur – turbină – generator sincron», prin care calculatorul de proces menține constante frecvența (turația turbinei) și tensiunea (eficace) la bornele generatorului sincron sunt: debitul de combustibil, debitul de aer de ardere și debitul de apă de alimentare. □

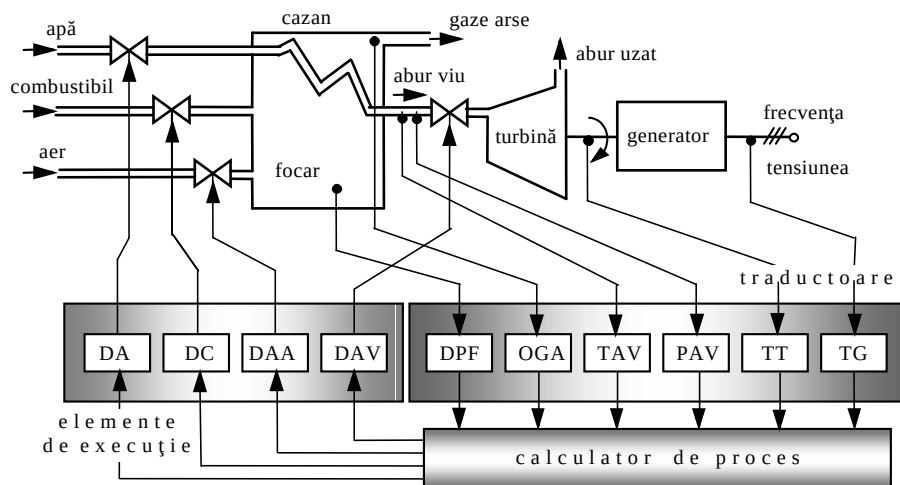


Fig. I.9. Structura de conducere a blocului «cazan – turbină – generator sincron»;  
 traductoare: DPF – depresiunea în focar, OGA – oxigen în gaze arse, TAV – temperatura aburului viu,  
 PAV – presiunea aburului viu, TT – turația turbinei, TG – tensiunea la bornele generatorului;  
 elemente de execuție (debite): DA – apă de alimentare, DC – combustibil, DAA – aer de ardere, DAV – abur viu

## 5. Automatica și cibernetica; sisteme și semnale

*Automatica* este știința care se ocupă cu cercetarea teoretică a sistemelor automate și cu studiul, conceperea și realizarea mijloacelor tehnice pentru automatizarea aparatelor, mașinilor și instalațiilor tehnologice sau de altă natură. Automatica, preluând și utilizând legile generale ale naturii și ca instrument de cercetare – limbajul și rezultatele matematicii, a dobândit, acumulat, elaborat și sistematizat pe parcursul dezvoltării ei, atât sub aspect teoretic cât și experimental, cunoștințe și metode de studiu proprii.

S-a remarcat deja faptul că sistemele prezentate cu ajutorul fig. I.2 și I.3 sunt izomorfe, ele fiind formele concrete ale uneia și aceleiași structuri și anume a celeia din fig. I.1.

*Izomorfismul* ca expresie a unei trăsături dominante și generale a fenomenelor naturii, care probează unitatea în diversitate a acestora, a fost remarcat încă din secolul al XVII-lea de Blaise Pascal și de mulți alți oameni de știință care i-au urmat.

*Cibernetica*, conform concepției întemeietorului ei, Norbert Wiener, este știința care se ocupă cu „studiul analitic al izomorfismului între structura comunicațiilor în mecanisme, în organisme și în societăți”. Prin investigarea zonelor de interferență ale diferitelor științe („zone ale nimănui”) și pe baza acumulării unui imens volum de cunoștințe, în special în

matematică, fiziologia sistemului nervos, automatică și electronică, s-au formulat principiile fundamentale de existență și de transformare a semnalelor în mașini, în organisme și în societăți. Aceste principii stau la baza ciberneticii.

Cibernetica (ca și automatica – știință care aparține ciberneticii) are în vedere caracteristicile sistemelor induse de comunicațiile existente în structura lor ca și de comunicațiile cu mediul ambiant. Cu referire și la exemplele 2.1 și 2.2 (prezentate cu ajutorul fig. I.2 și I.3 și în subsidiar al fig. I.1), aceste aspecte se concretizează după cum urmează :

1° Aparatele și operatorul uman (fig.I.2) sau dispozitivul de automatizare (fig.I.3) și instalația tehnologică formează, în fiecare caz în parte, o unitate relativ delimitată de mediu – adică un **sistem**.

2° Fiecare element component are o funcție precisă și ocupă o anumită poziție în cadrul sistemului. **Sistemul are o structură.**

3° Între elementele sistemului, conform structurii, există **comunicații** prin care se transmit informații (concret – **semnale**) într-o singură direcție și anume în sensul de la **cauză** la **efect**. **Mărimea cauză se numește mărimea de intrare și mărimea efect se numește mărimea de ieșire.**

4° **Conexiunea cauzală**, conform **principiului cauzalității**, este legătura între două evenimente (mărimi)  $u$  și  $y$  în care apariția lui  $u$  generează, în anumite condiții, în mod necesar apariția lui  $y$ . Totodată absența lui  $u$  este legată în mod necesar de absența lui  $y$ . **Conexiunea cauzală** dintre  $u$  și  $y$  poate fi reprezentată ca o relație complexă:

$$u \text{ --- } \sim \rightarrow y$$

în care  $\rightarrow$  simbolizează **sucesiunea temporală** de la  $u$  la  $y$  și  $\sim$  simbolizează **relația de generare** a lui  $y$  de către  $u$ .

5° Conceptul de conexiune cauzală este de natură practică în sensul că își dobândește semnificația specifică numai în condițiile interpretării experienței ca intervenție din afară în mersul natural al evenimentelor. Considerăm pe  $u$  drept **cauză** a **efectului**  $y$  numai în măsura în care sesizăm o posibilitate de a acționa asupra lui  $y$  prin intermediul lui  $u$ . Această idee **acțională** stă la baza conceptului de conexiune cauzală. Prin originea sa, conceptul de conexiune cauzală este legat în primul rând de re-**generarea** ei efectivă și, numai în al doilea rând, de **explicație**, **inferență** și alte asemenea concepte metateoretice. În termeni generali, mecanismul decelării cauzelor (și efectelor corespunzătoare) poate fi caracterizat astfel: **cauza unui fenomen se alege întotdeauna din setul condițiilor lui necesare și active**. Aceste condiții se determină în mod obiectiv în cursul investigațiilor experimentale și teoretice. Construind un model teoretic al unei conexiuni cauzale se introduc în mod implicit și reprezentări cauzale care constituie premise ale descrierii teoretice.

6° Acțiunea comună a elementelor componente asigură realizarea scopului. În cazul sistemelor cu reacție negativă evoluția are loc în sensul **anulării abaterii** și respectiv al **compensării efectului perturbațiilor**. Sistemul în ansamblu are această proprietate remarcabilă. Nedecelabilă în elementele sistemului (luate separat), această proprietate este un rezultat al **structurii** în care sunt asamblate elementele componente și al **comunicațiilor** dintre elemente.

În secolul al XIX-lea, în perioada de avânt a tuturor științelor, sub influența mecanicii newtoniene și a spiritului laplacean, care explicau fenomenele naturale prin jocul unităților elementare, guvernate de legile „oarbe” ale naturii, și ca urmare a complexității fenomenelor, cercetarea științifică a avut în mod natural un **caracter analitic**. Pe această cale s-a obținut în toate științele un volum considerabil de cunoștințe. Când aceste

cunoștințe au atins un anumit nivel, în câteva domenii științifice, de exemplu în biologie, s-a constatat că oricât de abundente ar fi cunoștințele asupra unor elemente dispartate, acestea nu permit înțelegerea funcționării ansamblului pe care respectivele elemente îl formează. *Ansamblul sau sistemul posedă proprietăți noi care nu puteau fi puse în evidență numai în elementele componente luate separat.*

În acest context, cibernetica constituie un corpus de concepte și metode cu ajutorul cărora se studiază proprietățile și legile generale ale transferului și prelucrării informației prin și în sisteme ca și sistemele însele. Este mai puțin importantă natura concretă a sistemelor. Ele pot fi în particular sisteme tehnice, biologice, economice, sociale etc.

*Un sistem este un complex de elemente în interacțiune.* Proprietățile sale nu depind numai de proprietățile elementelor componente ci, mai ales, de *interacțiunile* dintre elementele sistemului. Ceea ce este relevant în acest context este faptul că s-a ajuns la aceleași idei simultan și independent în diverse domenii științifice: biologie, neurofiziologie, psihologie, sociologie, teoria circuitelor electrice, electronică și automatică. Progresele realizate în aceste domenii particulare au marcat începutul extinderii schemelor noastre conceptuale pentru a se ține seama de sisteme, de legile care le guvernează și de izomorfismele dintre diverse sisteme concrete.

*Un sistem este o unitate relativ delimitată față de mediu,* delimitarea fiind evidențiată de structura sa internă.

Noțiunea de sistem este *relativă*. Una și aceeași realitate poate conține mai multe sisteme. În cazul exemplelor prezentate în fig. 1.2 și 1.3 se disting două sisteme: unul de reglare (automată) a nivelului (în care temperatura lichidului are o influență neglijabilă) și unul de reglare (automată) a temperaturii, care îl include pe primul (variația nivelului influențează temperatura lichidului din recipient).

Sistemele reale sunt investigate în cadrul a două modalități de abordare și anume în:

- *științele sistemelor;*
- *ingineria sistemelor.*

Sistemele fizico-chimice, biologice, organismice, social-ecologice, socio-culturale și organizaționale sunt studiate în cadrul științelor sistemelor.

Sistemele tehnice sunt studiate în cadrul diferitelor ramuri ale ingineriei sistemelor.

*Sistemele abstracte*, adică modelele matematice ale sistemelor reale, constituie forma cea mai eficientă de cunoaștere profundă a sistemelor reale. Sistemele abstracte, grupate în clase care le conferă un anumit grad de generalitate, constituie obiectul de studiu al *teoriei matematice a sistemelor*. Originile acestei discipline se situează în teoria circuitelor electrice, electronică și, mai ales, în automatică. Se poate afirma că automatica, prin viziunea intrinsec *sistemică*, prin factura inter-, trans- și multidisciplinară și prin utilizarea naturală a instrumentului și limbajului matematic, constituie matricea constituirii și evoluției teoriei matematice a sistemelor.

S-a văzut că între subsisteme (elemente, părți ale unui sistem) sau între sisteme există anumite legături, respectiv se transmite informație.

Sensul științific al noțiunii de *informație* a fost obținut prin abstractizarea semnificațiilor sale uzuale.

În limbajul curent, *a se informa* înseamnă a lua cunoștință de anumite evenimente sau date. Pentru a găsi un formalism general în acest domeniu, a fost necesar un efort de abstractizare, având în vedere marea varietate de informații ce se pot vehicula. Ceea ce este *comun* tuturor informațiilor particulare este faptul că ele *nu sunt cunoscute aprioric*, respectiv realizarea unei informații (adică ea devine efectiv cunoscută) duce la înlăturarea

unei **incertitudini**. Se are în vedere numai *existența* acestei incertitudini și *valoarea* ei, aspectele concrete ale informației fiind semnificative numai din punct de vedere utilitar.

Transmiterea (transferul, prelucrarea) unei informații are întotdeauna un suport material. O mărime fizico-tehnică prin care se transmite o informație se numește **semnal**. Caracteristica fizică a unui semnal care se modifică dependent de informație se numește *parametru informațional*.

Concomitent semnalele sunt funcții de *timp*. Acesta este al doilea parametru al semnalelor. Din punct de vedere matematic timpul este variabila independentă ce evoluează continuu în sens unic: de la trecut, prin prezent, spre viitor (un moment situat în trecut nu mai poate fi atins niciodată).

Semnalele se pot clasifica în conformitate cu foarte multe criterii. Câteva din posibilele clasificări se prezintă în continuare:

- 1° După natura fizică a semnalului:
  - semnale *mecanice* (deplasare, forță etc.);
  - semnale *electrice* (tensiune, curent etc.);
  - semnale *optice* (intensitate, culoare etc.).
- 2° După mulțimea de valori ale parametrului informațional:
  - semnale *discrete*: parametrul informațional este definit pe o mulțime finită sau numărabilă (izomorfă cu mulțimea numerelor naturale); semnalele discrete pot fi *digitale*, adică valoarea parametrului informațional este multiplu al unei cuante; dacă parametrul informațional ia numai două valori, semnalul se numește *binar*;
  - semnale *analogice*: parametrul informațional este definit pe un interval al mulțimii numerelor reale.
- 3° După mulțimea de valori ale parametrului timp:
  - semnale *continue* (*în timp*): pentru fiecare valoare a timpului se definește o valoare a parametrului informațional;
  - semnale *eșantionate* (discrete în timp): parametrul informațional este definit numai pentru anumite valori ale timpului; dacă valorile timpului sunt echidistante, semnalul se numește *eșantionat uniform*.
- 4° După previzibilitatea evoluției în viitor:
  - semnale *deterministe*: evoluția în viitor este complet cunoscută;
  - semnale *stohastice* (*aleatoare*): evoluția în viitor este previzibilă cu o anumită probabilitate.

Conceptual, noțiunile de *sistem* și *semnal* sunt *duale*. Fenomenologic, acest fapt rezidă în coexistența intrinsecă a perechii *sistem – semnal*, inseparabile și ireductibile între ele, deoarece, la limită, existența sistemelor / semnalelor este efectiv insesizabilă în lipsa semnalelor / sistemelor.

Întrucât *sistemele* procesează *semnale*, rezultă că tipurile de semnale care se transmit între elementele unui sistem îi imprimă acestuia caracterul respectivelor semnale. Se trage în mod firesc concluzia că se pot distinge: sisteme *discrete* sau *analogice*, sisteme *continue* (în timp) sau *cu eșantionare* și sisteme *deterministe* sau *stohastice* (*aleatoare*).

Scopul acestei cărți este studiul sistemelor automate analogice, continue în timp și deterministe. Factura introductivă are în vedere structura și principalele proprietăți ale sistemelor automate liniare monovariabile, metoda locul rădăcinilor, metoda frecvențială și două extensii ale metodei frecvențiale în cazul sistemelor automate neliniare.

## 1. Descrierea matematică a sistemelor dinamice

### 1.1. Ce sunt modelele matematice?

Cunoașterea științifică se bazează pe două categorii de metode: *metode experimentale* și *metode de modelare*. Metodele experimentale implică interacțiunea directă cu obiectul de studiu și au, în unele situații, aplicabilitate limitată. Sistemele reale asupra cărora se pot face observații experimentale sunt, principial, modelabile. Experimentele care nu pot fi realizate cu sistemele reale, pot fi făcute pe modelele respectivelor sisteme.

În scopul înțelegerii funcționării sistemelor dinamice (și în acest cadru și a sistemelor automate), atât sub aspect fenomenologic cât și sub aspect relațional-cantitativ, trebuie să se cunoască modelele lor matematice. În consecință este necesar să se analizeze relațiile dintre variabilele unui sistem dat și să se scrie ecuațiile corespunzătoare. Deoarece sistemele care vor fi avute în vedere evoluează în timp, adică sunt *sisteme dinamice*, relațiile dintre variabile au forma unor *ecuații diferențiale* și/sau *integro-diferențiale*. Adesea aceste ecuații sunt *liniare* (sau se *liniarizează* în scopul simplificării tratării). În această situație se aplică *transformarea Laplace* (Anexele A.1, B.2.2) fie în scopul soluționării ecuațiilor diferențiale și / sau integro-diferențiale (liniare sau liniarizate), fie pentru analize mai profunde ale sistemului, după cum se va vedea în cadrul acestei lucrări.

Setul de ecuații diferențiale și / sau integro-diferențiale care descriu un sistem dinamic real se numește *modelul matematic* al respectivului sistem. Întrucât modelul matematic are el însuși atributele unui sistem, se mai spune că modelul matematic este un *sistem abstract*. Firește, la nivel conceptual noțiunile de sistem real și sistem abstract (model matematic) sunt distincte în sensul că ele desemnează entități distincte în contextul în care sistemul abstract este o *image* (obținută de analistul de sisteme) a sistemului real. La nivel concret această imagine este mai mult sau mai puțin simplificată și / sau idealizată. Din acest motiv orice sistem abstract (model matematic), o dată obținut, trebuie validat prin comparație cu sistemul real. De regulă criteriul de validare este acela al erorii admisibile dintre evoluția sistemului real și evoluția corespunzătoare obținută prin simulare numerică, în condiții similare pe baza sistemului abstract (modelului matematic).

### 1.2. Ecuațiile sistemelor fizico-tehnice

Aceste ecuații se obțin pe baza legilor generale ale naturii. Un sumar al variabilelor caracteristice pentru sistemele fizico-tehnice uzuale se prezintă în tabelul II.1. Pe baza caracterului relațiilor dintre aceste variabile se ajunge la concluzia că ele pot fi împărțite (în mod natural) în două mari clase:

- variabile longitudinale
- variabile transversale.

Această dihotomie va fi mai ușor inteligibilă dacă se are în vedere faptul că din punct de vedere energetic se disting următoarele clase de sisteme:

- sisteme disipative
- sisteme cu acumulare inductivă
- sisteme cu acumulare capacitivă.

Tabelul II.1. Sumar al variabilelor fizico-tehnice

| SISTEM: \ TIP: | VARIABILA LONGITUDINALĂ | VARIABILA TRANSVERSALĂ   |
|----------------|-------------------------|--------------------------|
| ELECTRIC       | CURENTUL $i$            | TENSIUNEA $u$            |
| MECANIC        | FORȚA $f$               | VITEZA DE TRANSLAȚIE $v$ |
|                | CUPLUL $c$              | VITEZA UNGHIULARĂ $w$    |
| FLUIDIC        | DEBITUL $q$             | PRESIUNEA $p$            |
| TERMIC         | FLUXUL TERMIC $q$       | TEMPERATURA $q$          |

Pe această bază se obține tabelul II.2 al ecuațiilor utilizabile în modelarea matematică.

Tabelul II.2. Sumar al ecuațiilor sistemelor

| SISTEM DE TIP:       | NATURA FIZICĂ: | PARAMETRUL FIZIC:                | ECUAȚIA                         |
|----------------------|----------------|----------------------------------|---------------------------------|
| DISIPATIV            | ELECTRIC       | REZISTENȚA ELECTRICĂ $R$         | $i = \frac{1}{R} u$             |
|                      | MECANIC        | COEFICIENTUL DE FRECARĂ $K_f$    | $f = K_f v$                     |
|                      |                |                                  | $c = K_f w$                     |
|                      | FLUIDIC        | REZISTENȚA FLUIDICĂ $R_f$        | $q = \frac{1}{R_f} p$           |
|                      | TERMIC         | REZISTENȚA TERMICĂ $R_t$         | $q = \frac{1}{R_t} q$           |
| ACUMULATOR INDUCTIV  | ELECTRIC       | INDUCTANȚA ELECTRICĂ $L$         | $u = L \frac{di}{dt}$           |
|                      | MECANIC        | COEFICIENTUL DE ELASTICITATE $K$ | $v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$ |
|                      |                |                                  | $w = \frac{1}{K} \frac{dc}{dt}$ |
|                      | FLUIDIC        | INERTANȚA FLUIDICĂ $I$           | $p = I \frac{dq}{dt}$           |
| ACUMULATOR CAPACITIV | ELECTRIC       | CAPACITATEA ELECTRICĂ $C$        | $i = C \frac{du}{dt}$           |
|                      | MECANIC        | MASA INERTĂ $M$                  | $f = M \frac{dv}{dt}$           |
|                      |                | MOMENTUL DE INERȚIE $J$          | $c = J \frac{dw}{dt}$           |
|                      | FLUIDIC        | CAPACITATEA FLUIDICĂ $C_f$       | $q = C_f \frac{dp}{dt}$         |
|                      | TERMIC         | CAPACITATEA TERMICĂ $C_t$        | $q = C_t \frac{dq}{dt}$         |

**Exemplul 1.1** (sistemul «resort – amortizor – masă inertă»)

Pentru exemplificarea utilizării ecuațiilor din tabelul II.2 se consideră sistemul mecanic «resort – amortizor – masă inertă» din în fig.II.1. Acest sistem este format din următoarele:

- un element disipativ (amortizorul) descris de:

$$f_a = K_f v \quad (\text{forța de frecare vâscoasă}),$$

- un element acumulator inductiv (resortul) descris de:

$$f_r = K \int_0^t v(t) dt \quad (\text{forța elastică; legea lui Hooke}),$$

- un element acumulator capacitiv (masa inertă) descris de:

$$f_i = M \frac{dv}{dt} \quad (\text{forța inerțială; legea lui Newton}),$$

asupra căruia acționează forța externă  $f$ .

Echilibrul dinamic al sistemului este exprimat de ecuația de bilanț de forțe:

$$f_i + f_a + f_r = f$$

Din cele patru ecuații de mai sus rezultă modelul matematic al sistemului:

$$M \frac{dv}{dt} + K_f v + K \int_0^t v(t) dt = f(t) \quad (1.1)$$

Acestei ecuații i se asociază condițiile inițiale:

$$x(t_0) = x_0, \quad dx(t)/dt|_{t=t_0} = v(t_0) = v_0, \quad t_0 \geq 0, \quad \text{în care: } x(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Aceste două condiții inițiale definesc starea inițială a celor două elemente acumuloare de energie (și anume alungirea inițială a resortului și viteza inițială a masei inerte) prin care se precizează energia inițială acumulată în resort și energia cinetică inițială a masei inerte. □

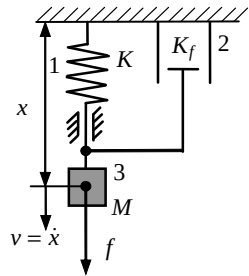


Fig.II.1. Sistemul format din resort (1), amortizor (2) și masă inertă (3) sub acțiunea forței externe  $f$

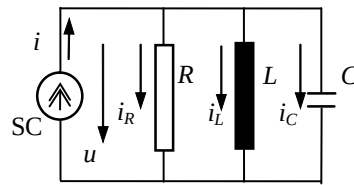


Fig.II.2. Sistemul «R,L,C» alimentat de la sursa de curent SC

**Exemplul 1.2** (sistemul «rezistență – inductanță – capacitate»)

Pentru a evidenția analogiile fizice conform tabelelor II.1 și II.2 se consideră în continuare sistemul electric «rezistență – inductanță – capacitate» reprezentat în fig.II.2. Acest sistem este format din următoarele:

- un element disipativ (rezistența) descris de:

$$i_R = \frac{1}{R} u \quad (\text{legea lui Ohm}),$$

- un element acumulator inductiv (inductanța) descris de:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt \quad (\text{consecință a legii inducției}),$$

- un element acumulator capacitiv (capacitatea) descris de:

$$i_C = C \frac{du}{dt} \quad (\text{consecință a definiției capacității electrice}),$$

conectate în paralel, în care se injectează curentul  $i$  furnizat de sursa de curent SC.

Ecuatia de bilanț a curenților (legea I a lui Kirchhoff) are forma:

$$i_C + i_R + i_L = i.$$

Din cele patru ecuații de mai sus rezultă modelul matematic al sistemului:

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt = i(t). \quad (1.2)$$

Acestei ecuații  $i$  se asociază două condiții inițiale, corespunzătoare stării inițiale a celor două elemente acumulator de energie (și anume tensiunea inițială la bornele capacității și curentul inițial prin inductanță) prin care se precizează energia electrică inițială acumulată în capacitate și energia electromagnetică inițială acumulată în inductanță. □

Comparând ecuațiile (1.1) și (1.2) rezultă că, pe de o parte, viteza  $v$  și tensiunea  $u$  (variabile transversale – tabelul II.1) și, pe de altă parte, forța  $f$  și curentul  $i$  (variabile longitudinale – același tabel) sunt respectiv într-o relație de similitudine. În fond sistemele însele (reprezentate în fig.II.1 și II.2) sunt similare sau izomorfe. La nivel abstract suportul lor comun este de același tip și anume modelul matematic:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t), \quad (1.3)$$

căruia  $i$  se asociază condițiile inițiale:  $y(t_0) = y_0$ ,  $dy(t)/dt|_{t=t_0} = \dot{y}_0$ ,  $t_0 \geq 0$ .

Formal, ecuația (1.3) se obține din (1.1) (înlocuind  $v \Rightarrow dy/dt$ ,  $f \Rightarrow u - K y_0$ ,  $K = a_0$ ,  $K_f = a_1$ ,  $M = a_2$ ) sau din (1.2) (înlocuind  $u \Rightarrow dy/dt$ ,  $i \Rightarrow u - L^{-1} y_0$ ,  $L^{-1} = a_0$ ,  $R^{-1} = a_1$ ,  $C = a_2$ ).

Este evident că sistemul reprezentat de ecuația (1.1) poate fi modelat izomorfic-fizic de sistemul reprezentat de ecuația (1.2) și viceversa. Ambele sisteme sunt modelate matematic de ecuația (1.3), care în fond este *modelul matematic* al unei *clase de sisteme izomorfe* între ele, fiecare sistem conținând un element disipativ, un element acumulator inductiv și un element acumulator capacitiv. Natura fizică a acestor elemente este subsidiară.

*Ordinul modelului matematic* (ordinul ecuației (1.3)) coincide cu numărul de elemente acumulator de energie independente conținute de sistem. Existența și numărul acestor elemente determină direct și numărul de condiții inițiale asociate modelului matematic. Ele corespund de fapt stării inițiale în care se află elementele acumulator de energie conținute de sistem și care, împreună cu acțiunea externă (forța  $f$  – fig.II.1, respectiv curentul  $i$  – fig.II.2), îi determină evoluția ulterioară.

Aceste concluzii sunt deosebit de utile analistului de sisteme deoarece îi oferă mijloace de înțelegere a unor clase foarte diverse de sisteme și de formalizare matematică a relațiilor care le caracterizează.

În aceste circumstanțe analiza și sinteza sistemelor dinamice (bazate pe utilizarea modelelor matematice) au condus la formarea **concepției sistemice**, respectiv la formularea unor rezultate cu caracter general, valabile pentru clase de sisteme izomorfe și particularizabile pentru o mare diversitate de sisteme concrete. În această ultimă situație



rezultatele generale trebuie interpretate conform naturii concrete a fenomenelor și specificului tehnologic al proceselor, deoarece numai în această ipostază ele pot fi efectiv operante în abordarea aplicațiilor.

Pe de altă parte, sub aspect profesional, se trage concluzia că *inginerul automatist*, pe lângă o viziune sistemică asupra realității, trebuie să aibă cunoștințe foarte variate la nivel conceptual – fenomenologic – tehnologic, o deschidere spre multi-, inter- trans- și metadisciplinaritate și, nu în ultimul rând, abilități de experimentator cu o bine exersată înțelegere a relațiilor de cauzalitate și a dinamicității fenomenelor.

### 1.3. Liniaritate și invarianță în timp

Marea majoritate a sistemelor reale au o comportare liniară în domenii de variație ale variabilelor bine precizate sau precizabile. De exemplu, sistemul «resort – amortizor – masă inertă» – fig.II.1 este liniar pentru micile variații ale variabilei  $x$  în jurul poziției de echilibru. Dacă  $x$  ia valori mari, resortul nu se mai comportă liniar (apar abateri față de legea lui Hooke).

Pentru formalizarea proprietății de liniaritate se are în vedere că un sistem materializează relația dintre **mărimea de intrare** (cauza) și **mărimea de ieșire** (efectul). Simbolizarea grafică a transferului mărimii de intrare  $u(t)$  în mărimea de ieșire  $y(t)$  este dată în fig.II.3.

Cele două mărimi sunt simbolizate prin segmente de dreaptă orientate (săgeți) prin care se indică totodată sensul (unic) al transferului intrare – ieșire prin sistem. Într-o formă mai puțin nuanțată acest fapt se poate exprima prin (v. I.5.4<sup>o</sup>):

$$u \rightsquigarrow y.$$

$$(1.4)$$



Fig.II.3. Simbolizarea grafică a unui sistem

Fie  $u(t) = u_1(t)$  și  $u(t) = u_2(t)$  două mărimi de intrare oarecare care se transferă, prin sistemul (1.4), în mărimile de ieșire  $y(t) = y_1(t)$  și respectiv  $y(t) = y_2(t)$ . Se scrie:

$$u = u_1 \rightsquigarrow y = y_1, \quad u = u_2 \rightsquigarrow y = y_2$$

#### Definiția 1

Sistemul (1.4) - fig.II.3 este *liniar* dacă pentru orice constante reale  $c_1$  și  $c_2$  mărimea de intrare  $u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  se transferă în  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ , adică:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \rightsquigarrow y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t). \quad \square$$

Această definiție explicitează binecunoscutul **principiu al suprapunerii efectelor**. Orice abatere de la acest principiu reprezintă o comportare *neliniară*, respectiv se referă la un *sistem neliniar*.

Sistemul descris de ecuația:  $y = u^2$  este neliniar deoarece nu satisface principiul suprapunerii efectelor.

Sistemul descris de ecuația  $y = au + b$ , în care  $a$  și  $b$  sunt două constante reale, este de asemenea neliniar dacă  $b \neq 0$  (se mai numește liniar afin). Se observă însă că acest sistem este liniar în jurul unui punct de funcționare. Fie  $(u_0, y_0)$  un punct de funcționare conform relației  $y_0 = au_0 + b$  și fie variațiile  $Du$  și  $Dy$  astfel încât  $u = u_0 + Du$ ,  $y = y_0 + Dy$ . Ca urmare se poate scrie  $y_0 + Dy = a(u_0 + Du) + b$ , ceea ce conduce la  $Dy = aDu$ , care este o ecuație liniară, dar numai pentru variațiile  $\Delta u$  și  $\Delta y$  în jurul punctului de funcționare  $(u_0, y_0)$ .

Pentru sistemele electrice și mecanice liniaritatea este de regulă asigurată pe domenii precizabile ale variabilelor. Pentru alte categorii de sisteme se constată frecvent prezența neliniarităților în structura lor. În mod obișnuit se practică liniarizări ale acestora pentru micile variații ale variabilelor în jurul unor puncte de funcționare.

Fie relația intrare – ieșire neliniară  $y = f(u)$ , în care  $f$  este o funcție cunoscută, de exemplu având graficul din fig.II.4.

Punctul normal de funcționare este  $(u_0, y_0)$  și este caracterizat de  $y_0 = f(u_0)$ .

În virtutea continuității și derivabilității funcției  $y = f(u)$  în punctul  $(u_0, y_0)$  se poate face uz de formula lui Taylor:

$$y = f(u) = f(u_0) + \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u_0} \frac{u - u_0}{1!} + R_2(u, u_0),$$

în care  $R_2(u, u_0)$  este restul seriei Taylor corespunzătoare.

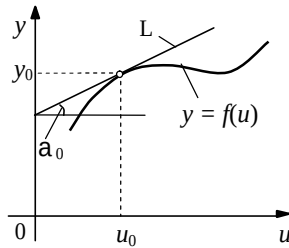


Fig. II.4. Aproximanta liniară a unei neliniarități

Pentru variațiile  $Du = u - u_0$ ,  $Dy = y - y_0$ , suficient de mici, se înlocuiește neliniaritatea cu aproximanta tangențială:

$$y - y_0 = k(u - u_0), \quad k = \left. \frac{df(u)}{du} \right|_{u_0} = \operatorname{tg} a_0,$$

așa cum se arată în fig. II.4 (dreapta L), și care reprezintă un sistem liniar afin. În fine, pentru micile variații  $Du$  și  $Dy$  se obține aproximanta liniară  $Dy = kDu$ , valabilă într-o vecinătate (admisibilă din punctul de vedere al erorilor de aproximare) al punctului de funcționare  $(u_0, y_0)$ . Evident, schimbarea

punctului de funcționare determină modificarea corespunzătoare a constantei  $k$ .

Eroarea pe care o introduce aproximanta liniară este dată de restul  $R_2(u, u_0)$ . Dacă valoarea absolută a erorii nu depășește o limită admisibilă impusă, atunci pe baza restului  $R_2(u, u_0)$  se pot determina  $\max |Du|$  și  $\max |Dy|$  pentru care aproximanta liniară este validă.

### Exemplul 1.3 ( ecuația pendulului)

Se consideră pendulul reprezentat schematic în fig.II.5. Cele trei cupluri care acționează asupra pendulului sunt:

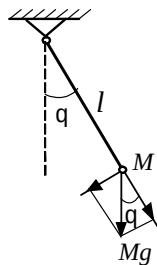


Fig.II.5 Pendulul – sistem dinamic neliniar

$$c_g = Mgl \sin q \quad (\text{cuplul forței de gravitație})$$

$$c_f = K_f \frac{dq}{dt} \quad (\text{cuplul de frecare vâscoasă})$$

$$c_i = J \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (\text{cuplul inerțial}).$$

Ecuția de bilanț de cupluri are forma:

$$c_i + c_f + c_g = 0,$$

ceea ce conduce la modelul matematic:

$$J \frac{d^2 q}{dt^2} + K_f \frac{dq}{dt} + Mgl \sin q = 0.$$

Evident, acesta este un model matematic neliniar. Neliniaritatea este:  $f(q) = \sin q$ .

Pentru punctul de funcționare  $q = 0$  (care în situația  $\dot{q} = 0$  reprezintă starea de echilibru stabil a pendulului) și pentru micile variații ale unghiului  $q$  în jurul acestui punct se poate scrie  $f(q) \approx q$  ceea ce conduce la modelul matematic liniarizat:

$$J \frac{d^2 q}{dt^2} + K_f \frac{dq}{dt} + Mglq = 0.$$

Se constată că modelul matematic liniarizat este acceptabil pentru  $|q| \leq p/6$ . De exemplu eroarea între  $q = p/6$  și  $f(p/6) = \sin(p/6)$  este  $0,523 - 0,5 = 0,023$ , ceea ce reprezintă mai puțin de 4,7%. □

În toate exemplele considerate până aici modelele matematice obținute sunt *ecuații diferențiale ordinare liniare cu coeficienți constanți*. Acest fapt nu este general valabil, dar existența lui este semnificativă. Această categorie de modele matematice caracterizează o clasă relativ largă de sisteme din realitatea fizico-tehnică (în care se includ și sistemele automate, care fac obiectul acestei cărți).

Liniaritatea a fost formalizată în cadrul definiției 1. Pentru formalizarea celorlalte atribute ale categoriei de sisteme (și modele matematice aferente) care va fi avută în vedere în prezenta carte se enunță următoarele două definiții.

### Definiția 2

Sistemul (1.4) – fig.II.3 se numește *neted și cu parametri concentrați* dacă el este reprezentat de o ecuație sau un set de ecuații diferențiale ordinare. □

Specificarea «neted» desemnează faptul că sistemul respectiv procesează (transferă, prelucrează) semnale în conformitate cu operația de derivare. Această specificare împreună cu a doua, și anume «cu parametri concentrați», se corelează cu ceea ce este o ecuație sau un set de ecuații diferențiale ordinare.

### Definiția 3

Sistemul (1.4) – fig.II.3 se numește *invariant în timp* dacă toți parametrii săi sunt invarianți în timp. □

Noțiunea de «parametru» are aici sensul bine cunoscut din fizică (tabelul I.1).

Calitatea esențială a unui astfel de sistem este aceea că, sub acțiunea mărimii de intrare  $u(t)$ , evoluția mărimii de ieșire  $y(t)$  este invariantă în raport cu orice translație a momentului inițial al acestei evoluții, cu condiția ca starea inițială a sistemului să fie de fiecare dată aceeași și mărimea de intrare să fie translată corespunzător în timp. Această proprietate este ilustrată în fig.II.6, din care transpare și deosebita ei importanță practică și anume că transferul

$$u \rightsquigarrow y$$

este repetabil oricare ar fi momentul inițierii lui, starea inițială a sistemului fiind de fiecare dată aceeași și mărimea de intrare fiind translată corespunzător în timp.

Pe cale de consecință, un *sistem neted, cu parametri concentrați și invariant în timp* este reprezentat de o ecuație sau un set de ecuații diferențiale ordinare (liniare sau neliniare) cu coeficienți constanți în timp.

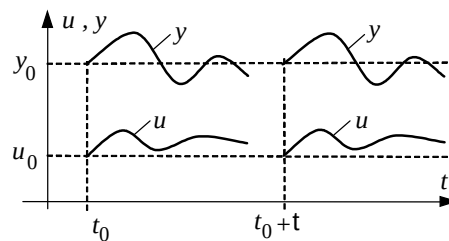


Fig.II.6 Ilustrarea invarianței în timp

#### 1.4. Funcția de transfer

În general un sistem dinamic neted, cu parametri concentrați, liniar și invariant în timp, cu o singură mărime de intrare și o singură mărime de ieșire (ambele funcții scalare de timp, motiv pentru care sistemul se mai numește *monovariabil*) este descris de o ecuație diferențială ordinară, liniară, cu coeficienți constanți, de forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.5)$$

în care  $a_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $b_j \in \mathbf{R}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Numerele naturale  $m$  și  $n$  sunt corelate cu numărul de elemente acumulate de energie, independente între ele, conținute de sistem.

Pentru fixarea cadrului tratării și în conformitate cu definiția transformării Laplace (Anexele A.1, B.2.2), care se utilizează în continuare, se admite că până la momentul inițial  $t_0 = 0$  sistemul descris de ecuația (1.5) se află în repaus, ceea ce analitic se exprimă prin:

$$u(t) \equiv 0, \quad y(t) \equiv 0, \quad t < 0. \quad (1.6)$$

##### Observația 1.1

În conformitate cu *principiul cauzalității* condiția (1.6) poate fi citită și în felul următor: *cauza* nulă produce *efectul* nul. Întrucât în (1.6) se definește starea de repaus în timp a sistemului (pentru  $t < 0$ ), principiul cauzalității se exprimă aici și sub forma mai nuanțată a *principiului non-anticipării*, conform căruia *efectul* nu anticipează *cauza*. □

##### Definiția 4

Un sistem care satisface (1.6) se numește *non-anticipativ*. În cazul în care pentru  $t < 0$ ,  $u(t) \equiv 0$  implică  $y(t) \neq 0$ , sistemul se numește *anticipativ*. □

Experiența acumulată până în prezent a înverdat faptul că în lumea (macroscopică sublinară) reală sistemele (naturale sau fizico-tehnice) sunt non-anticipative.

O abordare riguroasă a problemelor care decurg din definiția 4 (și în general din principiul cauzalității) se va face în subcap.VI.3.

Din (1.6) rezultă că:

$$u^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (1.7)$$

$$y^{(k)}(-0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.8)$$

Aplicând ecuației (1.5) transformarea Laplace (Anexele A.1, B.2.2), cu condițiile inițiale (1.7), (1.8), se obține:

$$\left( a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0 \right) Y(s) = \left( b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0 \right) U(s), \quad (1.9)$$

în care  $U(s) = \mathcal{L} \{u(t)\}$ ,  $Y(s) = \mathcal{L} \{y(t)\}$ .

Din (1.9) se obține:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} U(s), \quad (1.10)$$

care exprimă transferul intrare – ieșire în domeniul transformatorilor Laplace (al funcțiilor imagine).

**Definiția 5**

Raportul dintre transformatele Laplace ale mărimilor de ieșire și de intrare ale sistemului dinamic (modelului matematic) (1.5) se numește *funcția de transfer*. □

Se notează funcția de transfer cu  $G(s) = Y(s)/U(s)$  și conform ecuației (1.9) rezultă:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (1.11)$$

Ca urmare transferul intrare – ieșire, ecuația (1.10), se exprimă și sub forma:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (1.12)$$

cu (1.11), căreia i se asociază schema bloc din fig.II.7, corespunzătoare aceleia din fig.II.3.

Se remarcă faptul că în (1.12) mărimea de intrare (cauza)  $U(s)$  apare în membrul drept (împreună cu  $G(s)$ ), și mărimea de ieșire (efectul) apare în membrul stâng. În acest fel se evidențiază în mod clar că  $Y(s)$  este rezultatul acțiunii lui  $U(s)$  prin intermediul lui  $G(s)$ .

Funcția de transfer (1.11) este o funcție (fracție) rațională de variabila complexă  $s$ . În virtutea liniarității sistemului pe care îl reprezintă, funcția de transfer nu depinde nici de mărimea de intrare  $U(s)$  și nici de mărimea de ieșire  $Y(s)$ , ci numai de structura și parametrii sistemului însuși, așa cum rezultă de altfel și din (1.11).

Întrucât  $G(s)$  este o fracție rațională (raportul a două polinoame cu coeficienți reali), ea mai poate fi scrisă sub forma factorizată:

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad (1.13)$$

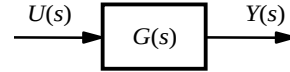


Fig.II.7. Schema bloc a sistemului (1.4)  
(reprezentat de funcția de transfer (1.11))

în care  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , sunt *zerourile finite* ale funcției

de transfer (sistemului) și  $p_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = \overline{1, n}$ , sunt *polii finiți* ai funcției de transfer (sistemului). Pentru cele ce urmează se admite că cele două polinoame din (1.13) sunt relativ prime între ele (nu au nici un divizor comun, iar dacă ei au existat, au fost deja eliminați prin simplificare), astfel că se scrie:

$$z_i \neq p_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \quad (1.14)$$

Denumirile adoptate pentru  $z_i$  și  $p_j$  sunt justificate de:

$$G(z_i) = 0, i = \overline{1, m}, \quad (1.15)$$

$$|G(p_j)| = +\infty, j = \overline{1, n}. \quad (1.16)$$

**Definiția 6**

Polinoamele monice (cu coeficientul termenului de grad maxim egal cu 1):

$$z(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i), \quad (1.17)$$

$$p(s) = \prod_{j=1}^n (s - p_j) \quad (1.18)$$

se numesc respectiv *polinomul zerourilor* și *polinomul polilor* ale sistemului descris de funcția de transfer  $G(s)$ . □

Este ușor de observat că polinomul polilor funcției de transfer  $G(s)$  – relația (1.11) – este identic cu polinomul caracteristic al ecuației (1.5) (exceptând eventual o constantă multiplicativă, aceeași pentru toți coeficienții).

Dacă

$$m > n,$$

la cei  $n$  poli finiți ai lui  $G(s)$  se adaugă și punctul de la infinit ( $|s| = +\infty$ ) ca pol de multiplicitate  $m - n$ , deoarece în acest caz pentru  $|s| = +\infty$  rezultă  $|G(s)| = +\infty$ . Așadar  $G(s)$  are în total  $n + (m - n) = m$  poli (egal cu numărul de zerouri finite).

Dacă

$$m < n,$$

la cele  $m$  zerouri finite ale lui  $G(s)$  se adaugă și punctul de la infinit ( $|s| = +\infty$ ) ca zero de multiplicitate  $n - m$ , deoarece în acest caz pentru  $|s| = +\infty$  rezultă  $|G(s)| = 0$ . Așadar  $G(s)$  are în total  $m + (n - m) = n$  zerouri (egal cu numărul de poli finiți).

Dacă  $m = n$ , punctul de la infinit nu este nici pol și nici zero al funcției  $G(s)$ .

Numărul  $r = \max(m, n)$  se numește *ordinul sistemului* și el este egal cu numărul minim de elemente acumulator de energie (conservative), conținute de sistem și independente între ele, corespunzătoare ecuației (1.5), respectiv funcției de transfer (1.13), cu (1.14).

Cele două polinoame al căror raport este funcția de transfer (1.11) au roluri *operatoriale* diferite în cadrul transferului temporal intrare – ieșire. Acest fapt poate fi intuit pe baza teoremelor derivatei originalului și integralei originalului (transformarea Laplace – Anexele A1.1.b.2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 5<sup>o</sup> și B.2.2.b.2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>).

Concret, pentru evidențierea caracterului operatorial diferit al polinoamelor (1.17) și (1.18) se consideră în continuare două cazuri limită semnificative (a căror simplitate facilitează expunerea):

1<sup>o</sup>  $G(s) = s$ . Conform ecuației (1.12), transferul intrare – ieșire are forma  $Y(s) = sU(s)$ , căreia în domeniul timpului, în condițiile (1.6), îi corespunde:

$$y(t) = \dot{u}(t)$$

Rezultă că sistemul considerat este un derivator.

Pentru  $w > 0$ , fixat, și  $u(t) = \sin wt$ ,  $t > 0$ , răspunsul sistemului este:

$$y(t) = w \cos wt, \quad t > 0.$$

Este ușor de observat (îndeosebi pe baza reprezentărilor grafice din fig.II.8) că  $y(t)$  este în avans de fază cu  $\pi/2$  față de  $u(t)$ , ceea ce conduce la concluzia că în acest caz derivatorul produce o mărime de ieșire care anticipează evoluția mărimii de intrare.

2<sup>o</sup>  $G(s) = 1/s$ . Conform ecuației (1.12), transferul intrare – ieșire are expresia  $Y(s) = U(s)/s$  căreia, în domeniul timpului, îi corespunde:

$$y(t) = \int_0^t u(q) dq.$$

Rezultă că sistemul considerat este un integrator.

Pentru aceeași mărime de intrare (ca la cazul 1<sup>o</sup>) răspunsul sistemului este

$$y(t) = (1 - \cos wt)/w, \quad t > 0$$

a cărei componentă periodică (sinusoidală) este:

$$y_s(t) = -(\cos wt)/w, \quad t > 0.$$

Și în acest caz este ușor de observat (fig.II.9) că  $y_s(t)$  este în întârziere de fază cu  $p/2$  față de  $u(t)$ , ceea ce conduce la concluzia că în acest caz integratorul produce o întârziere a mărimii de ieșire față de mărimea de intrare.

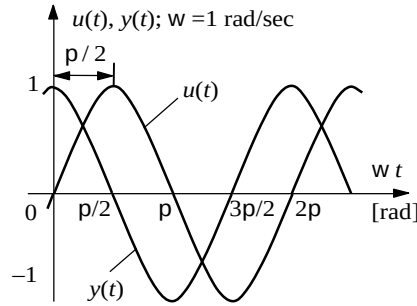


Fig.II.8. Ilustrarea efectului de anticipare produs de derivatorul  $G(s) = s$

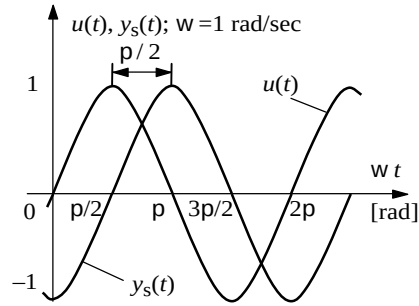


Fig.II.9. Ilustrarea efectului de întârziere produs de integratorul  $G(s) = 1/s$

#### Observația 1.2

Față de aceste două cazuri limită, foarte simple, se poate afirma, în general, că:

- Polinomul zerourilor  $z(s)$  – relația (1.17), al funcției de transfer  $G(s)$  – relația (1.13), modelează, în esență, operații de amplificare și derivare (cu o anumită complexitate, conform expresiei polinomului  $z(s)$ ); în cadrul transferului temporal intrare – ieșire acesta are un efect de *amplificare – anticipare* a mărimii de ieșire față de mărimea de intrare.
- Inversul polinomului polilor  $p(s)$  – relația (1.18), al funcției de transfer  $G(s)$  – relația (1.13), modelează, în esență, operații bazate pe integrare (cu o anumită complexitate, conform expresiei polinomului  $p(s)$ ); în cadrul transferului temporal intrare – ieșire acesta are un efect de *întârziere* a mărimii de ieșire față de mărimea de intrare.

Alte considerații privitoare la aceste două concluzii se vor face la 2.4.a (fig.II.26). □

#### Observația 1.3

S-a arătat la observația 1.1 că în lumea reală (macroscopică sublunară) procesele se desfășoară în timp cu respectarea principiului *non-anticipării*: efectul nu anticipează cauza. Din punct de vedere practic se poate afirma chiar mai mult și anume că efectul devine sesizabil cu o anumită întârziere față de cauză în sensul că relația de la cauză la efect nu este nici anticipativă și nici instantanee, ea introducând de fapt o *întârziere* a efectului față de cauză. Ca urmare, în funcția de transfer  $G(s)$ , care respectă această condiție, operatorul bazat pe integrare (inversul polinomului polilor) trebuie să fie *dominant* față de operatorul de amplificare – derivare (polinomul zerourilor). Aceasta are loc numai dacă:

$$m < n. \quad (1.19)$$

În această situație (de asemenea pentru  $m \leq n$ ) ordinul sistemului este  $r = n$ .

Considerații riguroase privitoare la condiția (1.19) se vor face în subcap.VI.3. □

#### Definiția 7

O funcție rațională care satisface inegalitatea (1.19) se numește *strict proprie*. În caz contrar ea se numește *proprie* (pentru  $m = n$ ) și respectiv *improprie* (pentru  $m > n$ ). □

**Exemplul 1.4** (amplificatorul electronic de curent continuu)

Pot apărea situații în care  $G(s)$  nu satisface condiția (1.19) datorită faptului că pe parcursul elaborării modelului matematic (1.5) s-au făcut idealizări și / sau simplificări care au avut ca rezultat  $m \geq n$ . În acest sens un exemplu elocvent este cel al amplificatorului electronic de curent continuu.

În mod obișnuit se adoptă (pentru zona de liniaritate a amplificatorului) modelul matematic:

$$y(t) = Ku(t)$$

pentru care  $m = n = 0$ . Rezultă că amplificatorul realizează o relație de la cauză la efect (intrare – ieșire) instantanee.

Această relație nu este riguros conformă cu rezultatele experimentale. O analiză corectă bazată pe aceste rezultate conduce la o funcție de transfer de forma:

$$G(s) = \frac{K}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1},$$

în care coeficienții polinomului polilor satisfac condițiile  $0 < a_i < 1$ ,  $i = \overline{1,3}$ . Conform acestei funcții de transfer amplificatorul introduce o întârziere a mărimii de ieșire față de mărimea de intrare, fapt evidențiat de rezultatele experimentale. Totodată trebuie remarcat faptul că pentru  $u(t)$  suficient de lent variabil în timp, întârzierea devine neglijabilă. Evident, considerând  $a_i \cong 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ , se obține:

$$G(s) \cong K,$$

dar acest lucru este posibil pentru  $|s|$  suficient de mic (respectiv pentru  $t$  suficient de mare, conform teoremei valorii finale; Anexa A.1.2.b.3<sup>o</sup>) și pentru  $u(t)$  suficient de lent variabil în timp.  $\square$

**Observația 1.4**

Există și situații în care, în mod deliberat, se lucrează cu funcții de transfer proprii sau improprii (care nu satisfac (1.19)). Trebuie remarcat faptul că se ajunge în astfel de ipostaze în urma unor idealizări și / sau simplificări realizate (relativ frecvent) pe parcursul modelării matematice sau direct în modelul matematic. Rezultatele care se obțin în astfel de situații trebuie privite cu o anumită doză de circumspecție deoarece ele încalcă principiul non-anticipării (în forma din observația 1.1 sau în forma mai nuanțată din observația 1.3). Evident, interpretarea rezultatelor obținute cu astfel de modele matematice implică interpretarea pertinentă a tuturor idealizărilor și / sau simplificărilor care au condus la respectivele funcții raționale proprii sau improprii.  $\square$

**Observația 1.5**

Exemplul 1.4 și observația 1.4 arată că este necesară și utilă o distincție între următoarele două categorii de modele matematice: modele *explicative* și modele *predictive*.

Un model explicativ asigură o cunoaștere aprofundată a unui sistem real. Implicit, un astfel de model are, de regulă, o anumită complexitate care îi limitează sfera de aplicabilitate. În același timp, un model predictiv reflectă într-o formă simplificată și, eventual idealizată, proprietățile esențiale ale unui sistem real, în condițiile unor erori acceptabile între evoluția sistemului real și evoluția similară furnizată de modelul predictiv. Proiectarea sistemelor automate se bazează, de regulă, pe modele matematice predictive.  $\square$



## 2. Scheme bloc structurale

### 2.1. Preliminarii

S-a arătat la 1.4 că prin aplicarea transformării Laplace ecuația diferențială (modelul matematic) (1.5) se transformă în ecuația algebrică (1.10) care permite explicitarea (1.12) cu (1.11), respectiv reprezentarea grafică din fig.II.7, corespunzătoare transferului intrare – ieșire (de la cauză la efect, conform săgeților) realizat de sistem.

De regulă *modelul matematic* este rezultatul unei proceduri care de la debut are caracter analitic. Acest caracter derivă din aplicarea *metodei analitice* ca metodă (clasică) de investigare științifică. Ea este rezultatul structurii secvențiale a procesului cunoașterii de către om a naturii (ca și a altor activități umane, conform dictonului „divide et impera”).

Aplicarea metodei analitice constă în împărțirea sistemului analizat în elementele sale componente cele mai simple, urmată de studiul lor separat, cu descrierea matematică a fenomenelor conform legilor care le guvernează și evidențierea mărimilor cauze și mărimilor efecte pentru fiecare element în parte. În cazul în care elementele sunt liniare se poate aplica transformarea Laplace (Anexele A.1, B.2.2), astfel că se poate asocia fiecărui element, luat de sine stătător, câte o schemă bloc parțială. Prin reunirea adecvată a tuturor schemelor bloc parțiale, în cadrul unei operații de *sinteză*, bazată pe conexiunile existente între elemente, se obține *schema bloc structurală* a sistemului analizat.

#### Exemplul 2.1 (motorul electric de curent continuu)

Se consideră un motor electric de curent continuu, cu excitație separată, a cărui schemă funcțional – tehnologică este reprezentată în fig.II.10. Pentru simplificarea analizei se au în vedere numai fenomenele electrice, electromagnetice și electromecanice. Se face abstracție de fenomenele termice și de neliniaritățile de tip feromagnetic. În aceste condiții sistemul poate fi împărțit în următoarele cinci elemente (pentru care se scriu și ecuațiile corespunzătoare):

- (a) Circuitul rotorului (CR):

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e \quad (\text{legea II Kirchhoff});$$

- (b) CR – sediu al t.c.e.m.:

$$e = k_1 w \quad (\text{cf. } e = Blv);$$

- (c) Rotorul – mișcarea de rotație:

$$J \frac{dw}{dt} = m_m - m_f - m \quad (\text{legea lui Newton});$$

- (d) Rotorul – cuplul electromagnetic:

$$m_m = k_2 i \quad (\text{cf. } f = Bil);$$

- (e) Rotorul – cuplul de frecare:

$$m_f = k_3 w \quad (\text{legea frecării vâscoase}).$$

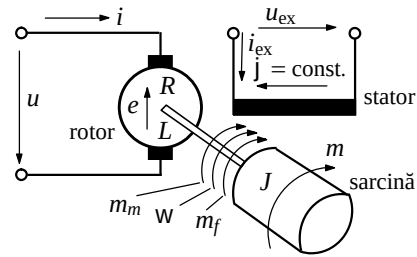


Fig. II.10. Schema motorului electric de c.c. (exemplul 2.1);  $u$  – tensiunea de comandă,  $i$  – curentul rotorului,  $e$  – t.c.e.m. (tensiunea contra-electromotoare),  $R, L$  – rezistența și inductanța rotorice,  $w$  – viteza unghiulară,  $m$  – cuplul de sarcină (perturbator),  $m_m$  – cuplul motor,  $m_f$  – cuplul de frecare,  $J$  – momentul de inerție al rotorului,  $j = \text{const.}$  – fluxul de excitație

Mărimile fizice și parametrii au semnificațiile din fig. II.10 și  $k_1$ ,  $k_2$  și  $k_3$  sunt coeficienți (constructiv – funcționali) constanți.

Cea mai frecventă utilizare a motorului electric de c.c. este în cadrul acționărilor electrice cu turație (viteză unghiulară) reglabilă. Astfel, prin reglarea tensiunii de comandă  $u$  (prin dispozitive adecvate, nereprezentate în fig. II.10) se modifică viteza unghiulară  $w$ . Prin schimbarea semnelui tensiunii  $u$  se obține inversarea sensului de rotație a rotorului.

În același timp creșterea / scăderea cuplului de sarcină (perturbator) provoacă scăderea / creșterea vitezei unghiulare, ceea ce poate avea consecințe nedorite asupra procesului tehnologic în care este implicată acționarea electrică. Din acest motiv acționările electrice de acest tip se automatizează. Ele sunt incluse în cadrul unor sisteme automate de reglare a turației (exemplul 2.1, pag. 96). Proiectarea unui astfel de sistem se bazează în primul rând pe analiza proprietăților de transfer ale motorului electric de c.c. cu ajutorul schemei bloc structurale.

Pentru obținerea schemelor bloc parțiale ale celor cinci elemente și în final a schemei bloc structurale a motorului electric de c.c. se aplică transformarea Laplace (Anexa A.1) ecuațiilor elementelor (cu condiții inițiale nule). Explicitând fiecare rezultat în conformitate cu relația de cauzalitate materializată de fiecare element, luat de sine stătător, se obține:

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R} [U(s) - E(s)] \quad (a), \quad E(s) = k_1 W(s) \quad (b),$$

$$W(s) = \frac{1}{Js} [M_m(s) - M_f(s) - M(s)] \quad (c), \quad M_m(s) = k_2 I(s) \quad (d), \quad M_f(s) = k_3 W(s) \quad (e).$$

Schemele bloc parțiale asociate acestor ecuații sunt reprezentate în fig. II.11 (a – e), în care cercelețele simbolizează sumatoarele algebrice (semnele operanzilor sunt plasate lângă săgețile care simbolizează mărimile).

În această fază se poate alcătui schema bloc structurală prin sinteza schemelor bloc parțiale din fig. II.11, respectiv prin înlănțuirea acestora pe baza mărimilor comune (intrare / ieșire). La această operație se ține seama de utilizarea efectivă a sistemului și anume că transferul principal este  $u(t) \rightarrow w(t)$ . Ca urmare, schema de înlănțuire are forma:

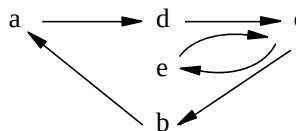
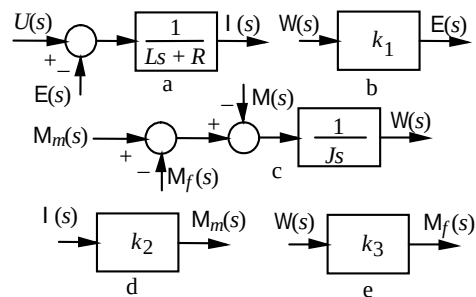


Fig. II.11. Schemele bloc parțiale la exemplul 2.1 (corespunzătoare ecuațiilor (a) – (e)).

și rezultatul obținut este reprezentat în fig. II.12. Este vizibil faptul că sistemul

conține, în mod natural, două reacții negative.

Cu ajutorul acestei scheme se pot interpreta cantitativ și calitativ relațiile de cauzalitate existente între mărimile sistemului (inclusiv privind rolul celor două reacții negative). De exemplu, la creșterea (prin salt, de la o valoare constantă la o altă valoare constantă) a tensiunii  $u$ , prin (1) și (2) – fig. II.12, urmează o creștere a curentului  $i$  (mai lentă, datorită elementului cu întârziere (2)) și a cuplului motor  $m_m$  (prin (3)) și apoi, prin (4), (5), (6), o creștere a lui  $w$  (mai lentă ca a lui  $i$ , datorită integratorului (6)). Această creștere, prin reacția negativă (7), (5), duce la scăderea cuplului rezultat  $m_m - m - m_f$ , ceea ce determină

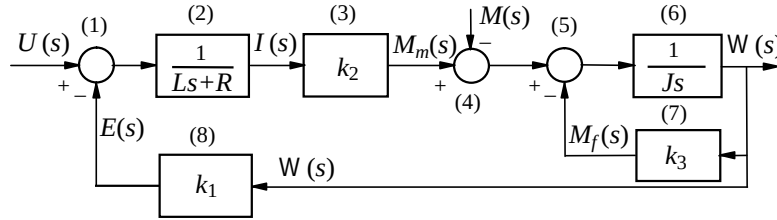


Fig. II.12. Schema bloc structurală a motorului electric de c.c. (exemplul 2.1).

scăderea vitezei de creștere a lui  $w$ . În același timp, prin reacția negativă (8), (1), scade tensiunea rezultantă  $u - e$ , ceea ce duce la o reducere (cu întârziere, prin (2)) a curentului  $i$ , a cuplului motor  $m_m$  (prin (3)) și în final, prin (6), la o reducere suplimentară a vitezei de creștere a lui  $w$ . Procesul continuă în acest fel până la atingerea unei anumite turații constante. Evaluări similare se pot face privitor la efectele cuplului de sarcină (perturbator)  $m$  asupra turației.  $\square$

După cum rezultă și din exemplul precedent, **schema bloc structurală** a unui sistem este imaginea grafică a relațiilor de cauzalitate existente între mărimile sistemului, exprimate prin intermediul funcțiilor de transfer și pe baza conexiunilor blocurilor cu transfer unidirecțional asociate acestor funcții de transfer.

## 2.2. Conexiuni elementare

Este cunoscut faptul că mulțimea funcțiilor (fracțiilor) raționale formează o structură algebrică de corp comutativ (grup aditiv comutativ și grup multiplicativ comutativ). În acest context rezultă că orice combinații de funcții de transfer (conform operațiilor de sumare și înmulțire) constituie de asemenea funcții de transfer.

În mulțimea combinațiilor posibile ale elementelor descrise de funcții de transfer se disting trei combinații minimale tipice care reprezintă cele trei **conexiuni elementare**: **conexiunea «serie»**, **conexiunea «paralel»** și **conexiunea «cu reacție»**.

### 1. Conexiunea «serie»

Conform denumirii, conexiunea are forma din fig. II.13.

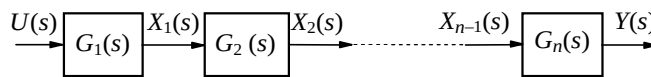


Fig. II. 13. Conexiunea «serie»

Relațiile care o guvernează sunt:

$$X_i(s) = G_i(s)X_{i-1}(s), i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

$$X_0(s) = U(s), X_n(s) = Y(s). \quad (2.2)$$

Eliminând  $X_i(s)$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , între ecuațiile (2.1) și ținând seama de (2.2) se obține:

$$Y(s) = G(s)U(s), G(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s). \quad (2.3)$$

Pe baza rezultatului (2.3) se poate formula următoarea regulă: **funcția de transfer echivalentă a conexiunii «serie» este egală cu produsul funcțiilor de transfer ale elementelor componente.**

### 2<sup>o</sup> Conexiunea «paralel»

Această conexiune, conform denumirii, are forma din fig. II.14.

Relațiile care o guvernează sunt:

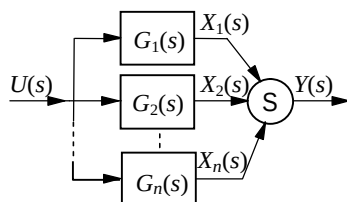


Fig. II.14. Conexiunea «paralel»

$$X_i(s) = G_i(s)U(s), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.4)$$

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s). \quad (2.5)$$

Înlocuind (2.4) în (2.5) se obține:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s). \quad (2.6)$$

Rezultatul (2.6) conduce la următoarea regulă: *funcția de transfer echivalentă a conexiunii «paralel» este egală cu suma funcțiilor de transfer ale elementelor componente*

### 3<sup>o</sup> Conexiunea «cu reacție»

Structura cea mai simplă de acest tip este prezentată în fig. II.15. Se disting: *calea directă* – sumatorul și blocul reprezentat de  $G_1(s)$ , *calea de reacție* – blocul reprezentat de  $G_2(s)$  și *sumatorul*; *bucă deschisă* în punctul P – blocurile înseriate reprezentate de  $G_1(s)G_2(s)$ . Reacția poate fi: fie *negativă* ( $X_2(s)$  intră în sumator cu semnul [-]), fie *pozitivă* ( $X_2(s)$  intră în sumator cu semnul [+]). Structura din fig. II.15, în care reacția este negativă, este tipică pentru sistemele automate.

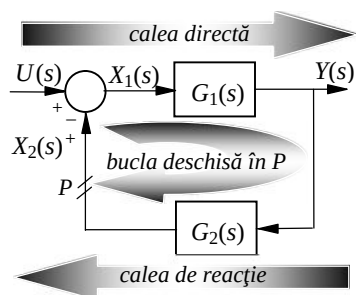


Fig. II.15. Conexiunea cu «reacție»; reacția negativă:  $[-X_2]$ ; reacția pozitivă:  $[+X_2]$

Conform fig. II. 15 se pot scrie ecuațiile:

$$X_1(s) = U(s) \mp X_2(s) \quad (2.7)$$

$$Y(s) = G_1(s)X_1(s) \quad (2.8)$$

$$X_2(s) = G_2(s)Y(s). \quad (2.9)$$

Eliminând  $X_1(s)$  și  $X_2(s)$  între (2.7) – (2.9) se obține:

$$[1 \pm G_1(s)G_2(s)]Y(s) = G_1(s)U(s), \quad (2.10)$$

din care rezultă:

$$Y(s) = G_0(s)U(s), \quad G_0(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s)G_2(s)}. \quad (2.11)$$

Din (2.11) se extrage următoarea regulă: *funcția de transfer echivalentă a conexiunii «cu reacție» este egală cu raportul dintre funcția de transfer a căii directe și  $1 \pm$  funcția de transfer a buclei deschise în punctul P (semnul [+] pentru reacția negativă și semnul [-] pentru reacția pozitivă).*

### Exemplul 2.2 (motorul electric de c.c.; continuare)

Pentru exemplificarea aplicării celor trei reguli se consideră schema bloc a motorului electric de c.c. din fig. II.12. În cadrul acestei scheme se disting: o conexiune «serie» – blocurile (2), (3), și o conexiune «cu reacție» – blocurile (5) – (7). Aplicând regulile de la 1<sup>o</sup> și 3<sup>o</sup> se ajunge la schema bloc echivalentă din fig. II.16. Prelucrarea în continuare a acestei scheme utilizând regula de la 3<sup>o</sup> nu mai este posibilă deoarece pe calea directă există un sumator, situație care va fi avută în vedere la punctul 2.3.5<sup>o</sup>. □

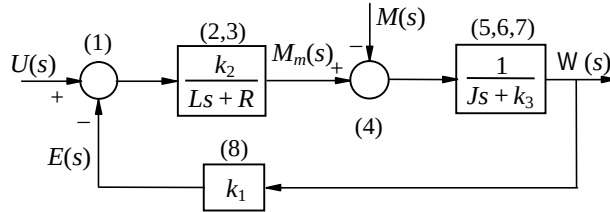


Fig. II.16. Schema bloc structurală echivalentă a celeia din fig. II.12 (motorul electric de c.c.), obținută prin aplicarea regulilor de la 1° și 3° ((2), (3) și (5), (6), (7) din fig. II.12 au devenit (2,3) și respectiv (5,6,7)).

### 2.3. Transfigurarea schemelor bloc structurale

Posibilitățile de aplicare a regulilor de la 2.2 sunt limitate deoarece ele se referă numai la trei tipuri de conexiuni elementare identificabile în schemele bloc structurale întâlnite uzual în aplicații.

Pe de altă parte, necesitățile de analiză și de sinteză ale sistemelor dinamice reclamă frecvent determinarea relațiilor care există între două sau mai multe mărimi ale schemei bloc structurale. Acestea implică efectuarea unor operații de *transfigurare* a unor părți din schema bloc structurală sau a acesteia în întregime.

Evident, transfigurările, pentru a produce rezultate echivalente, nu trebuie să altereze relațiile cantitative existente în schema bloc structurală inițială. Pentru a se respecta această condiție, transfigurările se execută în conformitate cu anumite **identități de transfigurare**. După cum se va vedea în continuare, aceste identități de transfigurare corespund unor artificii și manipulări matematice foarte simple aplicabile relațiilor intrare – ieșire avute în vedere. Se vor prezenta în continuare șapte astfel de identități de transfigurare care vor fi numerotate cu 4° – 10° (ca o continuare a regulilor 1° – 3° de la 2.2).

#### 4<sup>o</sup> Deplasarea unui sumator de la intrarea la ieșirea unui bloc

Structura inițială avută în vedere este cea din fig. II.17.4°.a. Relația intrare – ieșire corespunzătoare are forma:

$$Y(s) = G(s)[U_1(s) \pm U_2(s)] \quad (2.12)$$

În virtutea distributivității operației de înmulțire față de cea de adunare, relația (2.12) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$Y(s) = G(s)U_1(s) \pm G(s)U_2(s), \quad (2.13)$$

căreia îi corespunde schema din fig. II.17.4°.b, la care se dorea să se ajungă.

#### 5<sup>o</sup> Deplasarea unui sumator de la ieșirea la intrarea unui bloc

Relația intrare – ieșire corespunzătoare (fig. II.17.5°. a) are forma:

$$Y(s) = G(s)U_1(s) \pm U_2(s). \quad (2.14)$$

Se scoate \$G(s)\$ forțat în factor în (2.14) și se obține expresia echivalentă:

$$Y(s) = G(s)[U_1(s) \pm G^{-1}(s)U_2(s)], \quad (2.15)$$

căreia îi corespunde schema din fig. II.17.5°.b.

#### 6<sup>o</sup> Deplasarea unui punct de ramificare de la intrarea la ieșirea unui bloc

Structura inițială este cea din fig. II.17.6°.a. Relațiile intrare – ieșire corespunzătoare transferului prin \$G(s)\$ și respectiv ramificației sunt:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad U(s) = U(s). \quad (2.16)$$

Este evident că cea de a doua relație din (2.16) poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$U(s) = G^{-1}(s)G(s)U(s), \quad (2.17)$$

astfel că în final se ajunge la schema din fig. II.17.6°.b.

#### 7<sup>o</sup> Deplasarea unui punct de ramificare de la ieșirea la intrarea unui bloc

Inițial structura avută în vedere este cea din fig. II.17.7°.a. Relația intrare – ieșire corespunzătoare transferului prin  $G(s)$  și respectiv ramificației sunt:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad Y(s) = Y(s). \quad (2.18)$$

Ca și la 6°, relația a doua din (2.18) poate fi scrisă și sub forma echivalentă:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (2.19)$$

astfel că în final se ajunge la schema din fig. II.17.7 .b.

#### 8<sup>o</sup> Comutativitatea sumatoarelor

Se are în vedere schema inițială din fig.II.17.8°.a. Relația corespunzătoare are forma:

$$Y(s) = [U_1(s) \pm U_2(s)] \pm U_3(s). \quad (2.20)$$

În virtutea comutativității și asociativității operației de sumare relația (2.20) poate fi scrisă și sub forma echivalentă:

$$Y(s) = [U_1(s) \pm U_3(s)] \pm U_2(s), \quad (2.21)$$

căreia îi corespunde schema din fig.II.17.8 .b.

#### 9<sup>o</sup> Deplasarea unui sumator din interiorul unei conexiuni «cu reacție» la ieșire

Conform schemei inițiale din fig.18.9°.a pentru mărimea de intrare  $U_2(s) \neq 0$  (și  $U_1(s) \equiv 0$ ), conform regulii de la 2.2.3° (conexiunea «cu reacție»), se poate scrie:

$$Y(s) = \pm \frac{1}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} U_2(s), \quad (2.22)$$

care exprimă efectul lui  $U_2(s)$  asupra lui  $Y(s)$  atât pe calea directă (funcția de transfer a căii directe de la  $U_2(s)$  la  $Y(s)$  este  $\pm 1$ ) cât și prin calea de reacție. În aceste condiții schema la care se ajunge în mod echivalent este prezentată în fig.II.18.9°.b.

#### 10<sup>o</sup> Deplasarea unui sumator de la ieșirea unei conexiuni «cu reacție» în interior

De această dată schema inițială are forma din fig.II.18.10°.a. Întrucât acum se face operația inversă aceleia de la 9°, la obținerea schemei finale din fig.II.18.10°.b se ține seama că, pentru  $U_2(s) \neq 0$  (și  $U_1(s) \equiv 0$ ) în situația inițială funcția de transfer dintre  $U_2(s)$  și  $Y(s)$  era  $\pm 1$ , iar în situația finală (conform regulii de la 2.2.3°) este:

$$\pm [1 \pm G_1(s)G_2(s)] \frac{1}{1 \pm G_1(s)G_2(s)} = \pm 1. \quad (2.23)$$

#### Exemplul 2.3 (motorul electric de c.c.; continuare)

Utilizând identitățile de transfigurare de mai sus se poate prelucra schema bloc structurală din fig.II.16 (a motorului electric de c.c.) până la forma echivalentă cea mai simplă. Astfel se pot utiliza:

- identitățile 4° și 9° pentru deplasarea la ieșirea sistemului a sumatorului în care se aplică  $M(s)$ , după care se aplică regulile de la 2.2.1° și 3° (conexiunile «serie» și «cu reacție»);

|    | a. Schema inițială                    | b. Schema finală                      |
|----|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 4° | $Y = G(U_1 \pm U_2)$                  | $Y = GU_1 \pm GU_2$                   |
| 5° | $Y = GU_1 \pm U_2$                    | $Y = G(U_1 \pm G^{-1}U_2)$            |
| 6° | $Y = GU$                              | $Y = GU, U = G^{-1}GU$                |
| 7° | $Y = GU$                              | $Y = GU$                              |
| 8° | $Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm U_3(s)$ | $Y(s) = U_1(s) \pm U_3(s) \pm U_2(s)$ |

Fig. II. 17. Identități de transfigurare: deplasarea sumatorului la ieșire (4°) și la intrare (5°); deplasarea punctului de ramificare la ieșire (6°) și la intrare (7°); comutativitatea sumatoarelor (8°).

|     | a. Schema inițială                          | b. Schema finală                            |
|-----|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 9°  | $Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm G_1(s)U_2(s)$ | $Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm G_1(s)U_2(s)$ |
| 10° | $Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm G_1(s)U_2(s)$ | $Y(s) = U_1(s) \pm U_2(s) \pm G_1(s)U_2(s)$ |

Fig.II.18. Deplasarea sumatorului din interiorul la ieșirea (9°) și de la ieșirea în interiorul (10°) unei conexiuni «cu reacție».

• identitățile 5° și 8° pentru deplasarea aceluiași sumator la intrarea sistemului, după care se aplică regulile 2.2.1° și 3°.

Procedând conform celei de a doua variante, după aplicarea identităților 5° și 8° și a regulii 2.2.1° rezultatul este cel din fig.II.19.

Aplicând apoi regula de la 2.2.3° se obține schema din fig.II.20 în care se pun în evidență separat efectele asupra vitezei unghiulare  $W(s)$  ale tensiunii de comandă  $U(s)$  și respectiv cuplului de sarcină (perturbator)  $M(s)$ . Cele două funcții de transfer:

$$G_0(s) = \frac{\frac{k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}} = \frac{k_2}{LJs^2 + (RJ + Lk_3)s + Rk_3 + k_1 k_2},$$

$$G_{0m}(s) = \frac{\frac{Ls+R}{k_2} \cdot \frac{k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}}{1 + \frac{k_1 k_2}{(Ls+R)(Js+k_3)}} = \frac{Ls+R}{LJs^2 + (RJ + Lk_3)s + Rk_3 + k_1 k_2}$$

pun în evidență modul concret în care tensiunea de comandă  $U(s)$  și cuplul perturbator  $M(s)$  influențează viteza unghiulară  $W(s)$  a motorului electric de c.c, conform relației:

$$W(s) = G_0(s)U(s) - G_{0m}(s)M(s). \quad \square$$

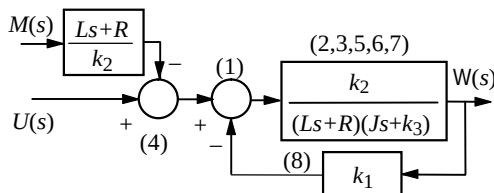


Fig.II.19. Rezultatul transfigurării schemei bloc structurale din fig.II.16 (motorul electric de c.c., exemplele 2.1, 2.2) prin identitățile 5°, 8° și a regulii 2.2.1°, la exemplul 2.3

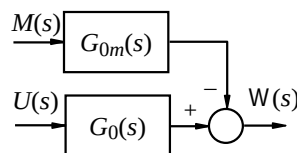


Fig.II.20. Transferul intrare – ieșire al motorului electric de c.c. (exemplele 2.1 – 3) obținut cu 2.2.3° în schema din fig. II.19

*Transfigurările* operabile într-o schemă bloc structurală dată au în vedere întotdeauna scopul final care trebuie realizat. Pentru atingerea acestuia se parcurg următorii pași:

- Se reduc la elemente echivalente elementele conectate în serie (fără puncte de ramificare între elemente) prin aplicarea regulii de la 2.2.1°.
- Se reduc la elemente echivalente elementele conectate în paralel (fără puncte de ramificare la ieșirile elementelor) prin aplicarea regulii de la 2.2.2°.
- Se reduc la elemente echivalente elementele în conexiune «cu reacție» (fără puncte de ramificare și / sau sumatoare în interiorul conexiunii «cu reacție») prin aplicarea regulii de la 2.2.3°.
- Se deplasează convenabil punctele de ramificare și / sau sumatoarele prin aplicarea identităților de transfigurare 4° – 10°.
- Se repetă operațiile de la pașii a – d în funcție de natura schemei și de scopul care trebuie realizat.

#### Exemplul 2.4 (operații de transfigurare)

Se consideră sistemul cu schema bloc structurală din fig.II.21 și se cere determinarea relației intrare – ieșire ( $Y(s)$  în funcție de  $U_1(s)$  și  $U_2(s)$ ).

Rezolvarea pe baza ecuațiilor sistemului este relativ laborioasă. Evident, se pot scrie 10 ecuații (pentru cele 6 blocuri și pentru cele 4 sumatoare) între care urmează să se elimine 9 mărimi intermediare. Aceste calcule pot fi evitate dacă se procedează la aplicarea regulilor 2.2.1°– 3° și a identităților 4° – 10°. Un analist de sisteme suficient de experimentat poate ajunge astfel foarte repede la rezultatul cerut.

Procedura de transfigurare se prezintă în detaliu, pe baza unor scheme intermediare (în mod normal nu se mai desenează) și a pașilor succesivi care conduc la rezultatul cerut.



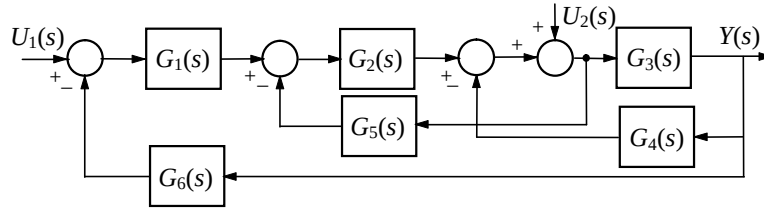
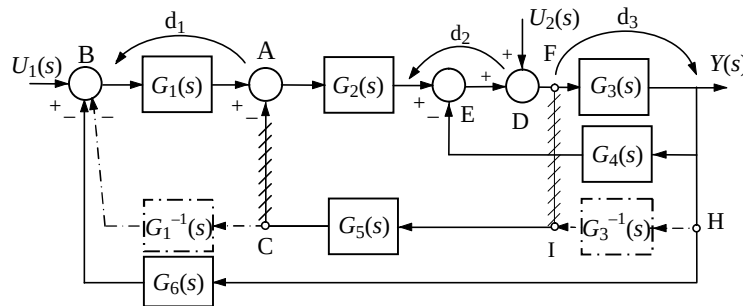


Fig.II.21. Schema bloc structurală la exemplul 2.4.

**– Pasul I**

Cu referire la fig.II.22 se fac următoarele deplasări:

- $d_1$  sumatorul A se suprapune peste sumatorul B; dispăre legătura CA (hașurată) și apare legătura CB prin  $G_1^{-1}(s)$  (conform cu 5°);
- $d_2$  sumatorul D trece la stânga sumatorului E (conform cu 8°);
- $d_3$  punctul de ramificare F trece în H; dispăre legătura IF (hașurată) și apare legătura HI prin  $G_3^{-1}(s)$  (conform cu 6°).

Fig.II.22. Deplasările  $d_1$ ,  $d_2$  și  $d_3$  ale sumatoarelor A, D și a punctului de ramificare F, operabile în fig.II.21

Se obține în acest fel schema din fig.II.23.

**– Pasul II**

În schema din fig.II.23 se pot opera următoarele:

- echivalarea conexiunilor «serie» formate de  $G_1(s)$  și  $G_2(s)$  și respectiv  $G_3^{-1}(s)$ ,  $G_5(s)$  și  $G_1^{-1}(s)$  (conform cu 2.2.1°);
- echivalarea conexiunii «cu reacție» formate de  $G_3(s)$  și  $G_4(s)$  (conform cu 2.2.3°).

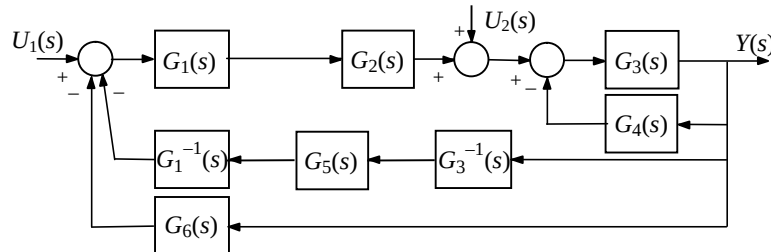


Fig. II.23. Rezultatul transfigurărilor operate în schema din fig.II.21, conform cu fig.II.22 (după aplicarea operațiilor de la pasul I)

Se obține pe această cale schema din fig.II.24 în care:

$$G_7(s) = G_1(s)G_2(s), \quad G_8(s) = \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)}, \quad G_9(s) = G_1^{-1}(s)G_3^{-1}(s)G_5(s).$$

– **Pasul III**

În fine, în schema din fig.II.24 se pot opera:

- echivalarea conexiunii «paralel» formate de  $G_6(s)$  și  $G_9(s)$  (conform cu 2.2.2°);
- $d_4$  – deplasarea sumatorului de la ieșirea lui  $G_7(s)$  la intrarea sa (conform cu 5°) și comutarea cu celălalt sumator (conform cu 8°);
- echivalarea conexiunii «serie» formate din  $G_7(s)$  și  $G_8(s)$  (conform cu 2.2.1°).

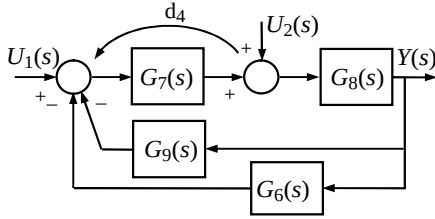


Fig.II.24. Rezultatul echivalărilor operate în fig.II.23 (exemplul 2.4, după aplicarea pasului II)

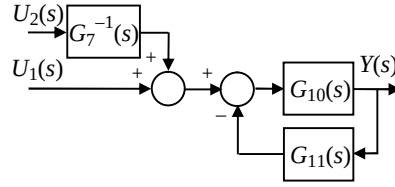


Fig.II.25. Rezultatul echivalărilor operate în fig.II.24 (exemplul 2.4, după aplicarea pasului III)

Se ajunge în acest fel la schema din fig.II.25 în care:

$$G_{10}(s) = G_7(s)G_8(s), \quad G_{11}(s) = G_6(s) + G_9(s) = G_6(s) + G_1^{-1}(s)G_3^{-1}(s)G_5(s).$$

Aplicând acum regula de la 2.2.3° (pentru conexiunea «cu reacție») se scrie relația intrare – ieșire:

$$Y(s) = G_{01}(s)U_1(s) + G_{02}(s)U_2(s),$$

cu funcțiile de transfer:

$$\begin{aligned} G_{01}(s) &= \frac{G_{10}(s)}{1 + G_{10}(s)G_{11}(s)} = \frac{G_7G_8}{1 + G_7G_8(G_6 + G_1^{-1}G_3^{-1}G_5)} = \\ &= \frac{\frac{G_1G_2G_3}{1 + G_3G_4}}{1 + \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_3G_4}(G_6 + \frac{G_5}{G_1G_3})} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_5 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_6}, \\ G_{02}(s) &= \frac{G_7^{-1}(s)G_{10}(s)}{1 + G_{10}(s)G_{11}(s)} = \frac{G_8}{1 + G_7G_8(G_6 + G_1^{-1}G_3^{-1}G_5)} = \\ &= \frac{\frac{G_3}{1 + G_3G_4}}{1 + \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_3G_4}(G_6 + \frac{G_5}{G_1G_3})} = \frac{G_3}{1 + G_2G_5 + G_3G_4 + G_1G_2G_3G_6}, \end{aligned}$$

în care s-a renunțat, pentru simplificare, la scrierea explicită a variabilei  $s$ .

În concluzie, se poate aprecia că un analist de sisteme (suficient de experimentat) poate scrie direct expresiile funcțiilor de transfer  $G_{01}(s)$  și  $G_{02}(s)$  (încadrate în dreptunghiurile trasate cu linie-punct), aplicând direct regulile de la 2.2.1° – 3° și identitățile 4° – 10°. □

## 2.4. Scheme bloc operaționale asociate unei funcții de transfer

### a. Schema bazată pe derivatoare și integratoare

Pentru început se are în vedere o ilustrare a observației 1.2 și anume evidențierea faptului că în funcția de transfer (1.11) polinomul zerourilor (1.17) corespunde unui operator de amplificare și derivare și inversul polinomului polilor (1.18) corespunde unui operator bazat pe integrare.

Mai întâi se observă că în conformitate cu (1.12) și (1.11) se pot scrie ecuațiile:

$$X(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s) \quad (2.24)$$

$$Y(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} X(s). \quad (2.25)$$

Ecuației (2.24) i se poate asocia schema bloc operațională din fig.II.26.a, ceea ce învederează faptul că polinomul zerourilor lui  $G(s)$  corespunde unui operator de amplificare – derivare (cu efect de amplificare – anticipare).

Pentru a asocia și ecuației (2.25) o schemă bloc operațională adecvată, se are în vedere că funcția de transfer din (2.25) se poate obține din următoarele relații de recurență:

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{\frac{1}{a_n s}}{1 + \frac{1}{a_n s} a_{n-1}} = \frac{1}{a_n s + a_{n-1}}, & G_2(s) &= \frac{\frac{1}{s} G_1(s)}{1 + \frac{1}{s} G_1(s) a_{n-2}} = \frac{1}{a_n s^2 + a_{n-1} s + a_{n-2}}, \\ &\dots\dots\dots & & \\ G_k(s) &= \frac{\frac{1}{s} G_{k-1}(s)}{1 + \frac{1}{s} G_{k-1}(s) a_{n-k}} = \frac{1}{a_n s^k + a_{n-1} s^{k-1} + \dots + a_{n-k}}, \\ &\dots\dots\dots & & \\ G_n(s) &= \frac{\frac{1}{s} G_{n-1}(s)}{1 + \frac{1}{s} G_{n-1}(s) a_0} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}. \end{aligned}$$

Se observă ușor că  $G_i(s), i = \overline{1, n}$ , corespund unor conexiuni «cu reacție», fig. 26.b.

### b. Schema bazată numai pe integratoare

În situația în care se dorește simularea (analogică sau numerică a) sistemului descris de ecuația diferențială (1.5), cu (1.7) și (1.8), respectiv de (1.12), cu (1.11), schema operațională din fig.II.26 este inadecvată datorită dificultăților implicate de realizarea derivatoarelor. Practic, derivatoarele (analogice sau numerice) introduc erori (adesea inacceptabile) față de derivarea în sens matematic, fapt explicabil conform observației 1.3. În contrast, realizarea integratoarelor (analogice sau numerice) este mai simplă și erorile față de integrarea în sens matematic sunt de regulă acceptabile. În acest context ar fi foarte

utilă o schemă bloc operațională bazată numai pe integratoare și conexiuni «cu reacție», așa cum s-a obținut în fig.II.26.b, dar care să se refere tot la funcția de transfer (1.11).

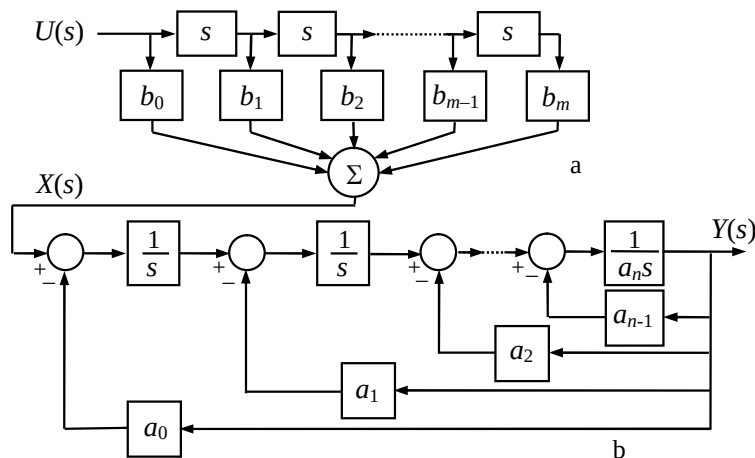


Fig.II.26. Schema bloc operațională pentru ilustrarea observației 1.2: a – polinomul zerourilor (structură cu derivatoare; b – inversul polinomului polilor (structură cu integratoare și conexiuni «cu reacție»

În ipoteza  $m \leq n$  (fără a reduce generalitatea se consideră  $m = n$  urmând ca valoarea efectivă a lui  $m$  să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul:  $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, \dots, b_1, b_0$ ), ecuația (1.12), cu (1.11), după împărțirea la  $a_n s^n$ , poate fi scrisă sub forma:

$$\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{s} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{s^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{s^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{s^n}\right) Y(s) = \left(\frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1}}{a_n} \frac{1}{s} + \frac{b_{n-2}}{a_n} \frac{1}{s^2} + \dots + \frac{b_1}{a_n} \frac{1}{s^{n-1}} + \frac{b_0}{a_n} \frac{1}{s^n}\right) U(s).$$

Din aceasta rezultă:

$$Y(s) = \frac{b_n}{a_n} U(s) + \frac{1}{s} \left( \frac{b_{n-1}}{a_n} U(s) - \frac{a_{n-1}}{a_n} Y(s) + \frac{1}{s} \left( \frac{b_{n-2}}{a_n} U(s) - \frac{a_{n-2}}{a_n} Y(s) + \dots + \frac{1}{s} \left( \frac{b_1}{a_n} U(s) - \frac{a_1}{a_n} Y(s) + \frac{1}{s} \left( \frac{b_0}{a_n} U(s) - \frac{a_0}{a_n} Y(s) \right) \right) \right) \right),$$

căreia îi corespunde schema bloc operațională din fig.II.27. Aceasta se bazează exclusiv pe integratoare incluse în structuri adecvate («serie», «paralel» și «cu reacție»), fiind în același timp structura cu numărul minim de elemente conservative (acumulatoare de energie), independente între ele, corespunzătoare ecuației (1.5), pentru  $m \leq n$ . Ea poate fi utilizată pentru *simularea* (analogică sau numerică) a sistemelor dinamice descrise de ecuații diferențiale ordinare cu coeficienți constanți, cu condiții inițiale nule. Extinderea la cazul condițiilor inițiale nenule constă în introducerea la ieșirea fiecărui integrator a câte unui sumator în care se aplică adecvat condițiile inițiale (stările inițiale ale integratoarelor).

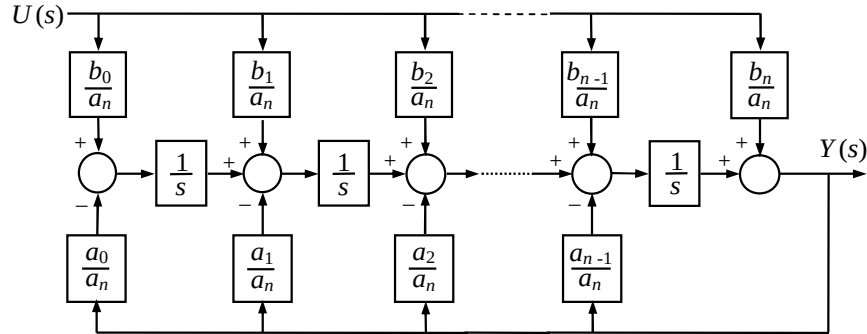


Fig.II.27. Schema bloc pentru simularea sistemului descris de ecuația diferențială (1.4), cu (1.6) (1.7), respectiv de (1.12), cu (1.11), pentru  $m \leq n$

## 2.5. Grafuri de fluență

Este ușor de constatat că transformarea echivalentă a schemelor bloc structurale pe baza regulilor 2.2.1° – 3°, a identităților de transfigurare 2.3.4° – 10° și a secvențelor 2.3.a – e face apel la experiența și intuiția analistului. Firește, acestea sunt două calități esențiale ale unui analist de sisteme și ca urmare ele trebuie exersate pe exemple cât mai variate de scheme bloc structurale, mai ales în faza de instruire a analistului.

Pe de altă parte, în situația formulării unor scopuri clare, prelucrarea unei scheme bloc structurale trebuie să fie expeditivă. Acest lucru se poate realiza utilizând conceptul de graf de fluență de tip Mason.

Un *graf de fluență de tip Mason* este o rețea formată din *noduri* legate prin *arce orientate*. Nodurile inițial și final ale unui arc au semnificația de *mărime de intrare* și *mărime de ieșire*. În aceste condiții arcul orientat este caracterizat de *funcția de transfer* (în general – *transmitanța*), conform reprezentării din fig.II.28, asociată aceleia din fig.II.7.

Pentru exemplificare se dau în fig.II.29.a – c grafurile de fluență corespunzătoare conexiunilor «serie» (fig.II.13), «paralel» (fig.II.14) și «cu reacție» (fig.II.15).

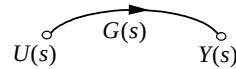


Fig.II.28. Graful de fluență asociat schemei bloc din fig.II.7

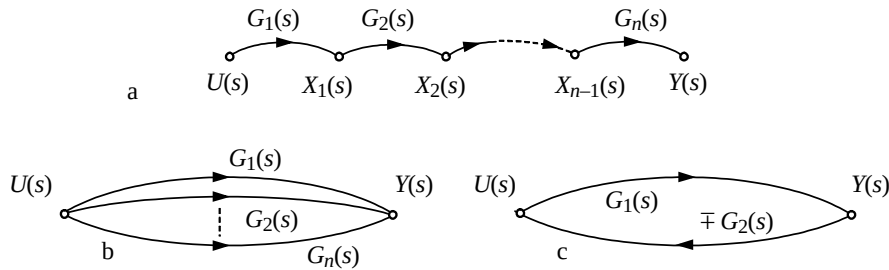


Fig.II.29. Grafurile de fluență asociate conexiunilor elementare: a – «serie» (fig.II.13), b – «paralel» (fig.II.14), c – «cu reacție» (fig.II.15)

**Exemplul 2.5** (graf asociat unui sistem algebric)

Fie sistemul algebric:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + b_1u_1 = y_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + b_2u_2 = y_2, \end{cases}$$

(obținut ca atare în cazul unei aplicații), în care  $u_1, u_2$  sunt cunoscute (intrări),  $y_1, y_2$  sunt necunoscute (ieșiri) și  $a_{11}, \dots, a_{22}$  sunt coeficienți cunoscuți. Graful de fluentă corespunzător este reprezentat în fig.II.30. Evident, sistemul poate fi scris sub forma:

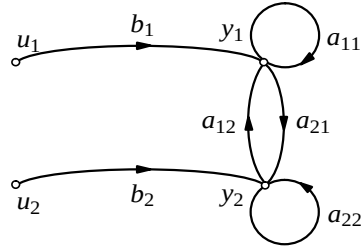


Fig.II.30. Graful de fluentă de la exemplul 2.5

$$\begin{cases} (1 - a_{11})y_1 - a_{12}y_2 = b_1u_1 \\ -a_{21}y_1 - (1 - a_{22})y_2 = b_2u_2 \end{cases},$$

Acesta poate fi rezolvat prin utilizarea regulii lui Cramer:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1 - a_{22}}{D} b_1u_1 + \frac{a_{12}}{\Delta} b_2u_2 \\ y_2 = \frac{1 - a_{11}}{D} b_2u_2 + \frac{a_{21}}{\Delta} b_1u_1 \end{cases},$$

cu  $D = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 1 - a_{11} - a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \neq 0$

Se remarcă faptul că numitorul  $D$  este egal cu 1 minus suma coeficienților tuturor buclor ( $a_{11}$ ,  $a_{22}$  și  $a_{12}a_{21}$ ) plus produsul coeficienților buclor care nu au noduri comune ( $a_{11}a_{22}$ ).

Numărătorii pentru  $y_1$ :

- asociat lui  $u_1$  apare  $(1 - a_{22})b_1$  care se obține din  $D$  prin păstrarea numai a coeficienților arcelor care nu au noduri comune cu arcul de la  $u_1$  la  $y_1$ , adică  $(1 - a_{22})$  care se înmulțește cu coeficientul  $b_1$  al arcului dintre  $u_1$  și  $y_1$ ;
- asociat lui  $u_2$  apare  $a_{12}b_2 \cdot 1$ ;  $a_{12}b_2$  este coeficientul arcelor de la  $u_2$  la  $y_1$  (în sensul *fluenței*) și 1 este valoarea lui  $D$  din care s-au eliminat coeficienții tuturor buclor care au noduri comune cu nodurile situate pe calea de la  $u_2$  la  $y_1$ .

Numărătorii lui  $y_2$  au aceeași semnificație (*mutatis mutandis*) ca și cei ai lui  $y_1$ .  $\square$

În general, valoarea transmitanței  $T_{ij}$  dintre nodurile  $i$  și  $j$ , respectiv dintre mărimile  $x_i$  și  $x_j$ , se obține cu *formula lui Mason*:

$$T_{ij} = \frac{1}{D} \sum_k (C_{ij})_k (D_{ij})_k, \quad (2.26)$$

în care:

- Suma după  $k$  se face pentru numărul maxim de căi între nodurile  $i$  și  $j$  (toate arcele fiind parcurse în sensul fluenței).
- $(C_{ij})_k$  este transmitanța căii directe (nu se trece de două ori prin același nod), de indice  $k$ , între nodurile  $i$  și  $j$ .
- $D$  este determinantul grafului, care se calculează cu formula:

$$D = 1 - \sum_{n=1}^N B_n + \sum_{m,q=1}^{M,Q} B_m B_q - \sum B_r B_s B_t + \dots, \quad (2.27)$$

unde  $B_q$ ,  $q = \overline{1, N}$ , sunt transmitanțele buclelor existente în graf. Regula de determinare a lui  $D$  este:

$D = 1 -$  (suma transmitanțelor tuturor buclelor) + (suma produselor transmitanțelor tuturor combinațiilor de câte două bucle care nu au noduri comune) – (suma produselor transmitanțelor tuturor combinațiilor de câte trei bucle care nu au noduri comune) + ... .

- $(D_{ij})_k$  este cofactorul (relativ la  $D$ ) al căii  $k$ . Aceasta se determină din  $D$  eliminând buclele care au noduri comune cu calea  $k$ .

**Exemplul 2.6** (aplicarea formulei lui Mason la exemplul 2.4)

Se consideră graful de fluentă corespunzător schemei bloc structurale de la exemplul 2.4 (fig.II.21), având forma din fig.II.31.

Numărul de bucle este  $N = 3$ , având transmitanțele:  $B_1 = -G_2 G_5$ ,  $B_2 = -G_3 G_4$ ,  $B_3 = -G_1 G_2 G_3 G_6$ . Determinantul grafului este:  $D = 1 + G_2 G_5 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_6$ , deoarece toate buclele au noduri comune.

Căile directe sunt:

- de la  $U_1$  la  $Y$ :  $(C_1)_1 = G_1 G_2 G_3$ ; rezultă  $(D_1)_1 = 1$ ;
- de la  $U_2$  la  $Y$ :  $(C_2)_1 = G_3$ ; rezultă  $(D_2)_1 = 1$ .

Cele două funcții de transfer (transmitanțe), conform formulei (2.26) au expresiile:

$$G_{01} = \frac{Y}{U_1} = \frac{G_1 G_2 G_3}{D}, G_{02} = \frac{Y}{U_2} = \frac{G_3}{D}. \quad \square$$

**Exemplul 2.7** (aplicarea formulei lui Mason)

Se consideră schema bloc structurală din fig.II.32. Se cere  $G_0 = Y / U$ .

Având în vedere modul în care s-a procedat la exemplul 2.6, se constată că nu este necesar să se deseneze graful corespunzător schemei din fig.II.32. Pentru aplicarea formulei lui Mason se numerează toate mărimile sistemului, așa cum s-a făcut deja în fig.II.32.

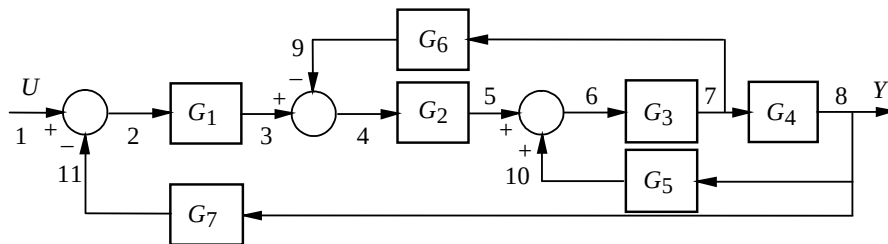


Fig.II.32. Schema bloc structurală de la exemplul 2.7

Numărul de bucle este  $N = 3$ . Buclele, ca succesiune de mărimi (noduri) și transmitanțele lor sunt:

$$4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 4,$$

$$B_1 = -G_2 G_3 G_6,$$

$$6 - 7 - 8 - 10 - 6,$$

$$B_2 = G_3 G_4 G_5,$$

$$2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 11 - 2,$$

$$B_3 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_7.$$

Determinantul grafului este:

$$D = 1 + G_2 G_3 G_6 - G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7,$$

deoarece toate buclele au noduri comune

Calea directă de la  $U$  la  $Y$  este:

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8,$$

$$(C_1)_1 = G_1 G_2 G_3 G_4; \text{ rezultă } D_1 = 1.$$

Funcția de transfer (transmitanța) dintre  $U$  și  $Y$  are expresia:

$$G_0 = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4}{1 + G_2 G_3 G_6 - G_3 G_4 G_5 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7}. \quad \square$$

Grafurile de fluentă de la exemplele 2.6 și 2.7 fac parte dintr-o clasă caracterizată prin:

- Toate buclele au noduri comune. Ca urmare:

$$D = 1 - (\text{suma transmitanțelor tuturor buclelor}).$$

- Toate căile directe au noduri comune cu toate buclele. Ca urmare:

$$D_k = 1, \quad k = \overline{1, N}.$$

Schemele bloc structurale ale sistemelor automate fac parte, de regulă, din această clasă de grafuri de fluentă. Pentru aplicarea formulei lui Mason în astfel de cazuri se utilizează următoarea regulă.

#### **Regula lui Mason** (pentru sisteme automate)

Funcția de transfer echivalentă între mărimea de intrare și mărimea de ieșire este egală cu raportul dintre suma funcțiilor de transfer ale căilor directe între cele două mărimi și 1 minus suma algebrică a funcțiilor de transfer ale buclelor (care au, după caz, semnul  $[-]$  pentru reacția negativă și semnul  $[+]$  pentru reacția pozitivă).  $\square$



### 3. Răspunsul la impulsul Dirac

#### 3.1. Definiție

Se consideră un sistem dinamic liniar descris de funcție de transfer  $G(s)$  (fig.II.7). Se aplică la intrare impulsul Dirac (Anexa B.1):

$$u(t) = d(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d(t)dt = 1. \quad (3.1)$$

Întrucât:

$$U(s) = \mathcal{L}\{d(t)\} = 1, \quad (3.2)$$

din ecuația intrare – ieșire (1.12), cu (1.11), rezultă:

$$Y(s) = G(s). \quad (3.3)$$

Se notează cu  $g(t)$  originalul lui  $G(s)$  și se scrie:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}, g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}. \quad (3.4)$$

Rezultă că în domeniul timpului, răspunsul (3.3) al sistemului (la aplicarea impulsului Dirac (3.1)) este:

$$y(t) = g(t). \quad (3.5)$$

#### Definiția 1

Răspunsul (3.5) al sistemului (1.12) (la aplicarea la intrare a impulsului Dirac (3.1)) se numește *răspunsul la impulsul Dirac*. □

#### 3.2. Proprietăți

**a.** Conform *principiului cauzalității* (non-anticipării, observația 1.1) răspunsul la impulsul Dirac are proprietatea:

$$g(t) \equiv 0, t < 0, \quad (3.6)$$

pentru care se dă o ilustrare în fig.II.33.

**b.** Răspunsul la impulsul Dirac este soluția ecuației diferențiale:

$$\begin{aligned} a_n D^n g(t) + a_{n-1} D^{n-1} g(t) + \dots + a_1 Dg(t) + a_0 g(t) = \\ b_m D^m d(t) + b_{m-1} D^{m-1} d(t) + \dots + b_1 Dd(t) + b_0 d(t), t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

în care  $D$  simbolizează *derivata generalizată* sau *în sens distribuții* (Anexa B.1).

Într-adevăr, aplicând transformarea Laplace ecuației (3.7) se obține:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)G(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0)1. \quad (3.8)$$

Înlocuind (1.11) în (3.8) rezultă că aceasta este satisfăcută.

Conform ecuației (3.7) rezultă că în general răspunsul la impulsul Dirac,  $g(t)$ , este o *funcție generalizată* sau o *distribuție* (Anexa B.1).

**c.** Pentru  $t > 0$  răspunsul la impulsul Dirac,  $g(t)$ , este o funcție continuă, soluție a ecuației diferențiale omogene:

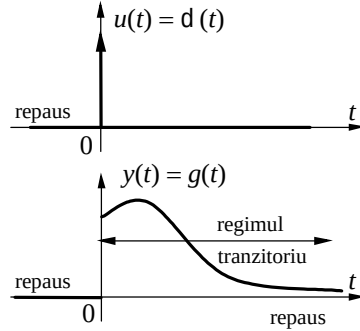


Fig.II.33. Răspunsul la impulsul Dirac; ilustrarea proprietăților (3.6) și (3.15)

$$a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 g'(t) + a_0 g(t) = 0, \quad t > 0. \quad (3.9)$$

Într-adevăr, pentru  $t > 0$  rezultă  $d(t) = 0$ ; din (3.7), în care operația de derivare generalizată se înlocuiește cu cea de derivare obișnuită, se obține (3.9).

**d.** În cazul  $m \leq n - 1$  răspunsul la impulsul Dirac,  $g(t)$ , are cel mult o discontinuitate de speța I la stânga punctului  $t = 0$  și este o funcție continuă în rest.

Într-adevăr, pentru  $t \neq 0$ , de la **a** și **c** rezultă că  $g(t)$  este o funcție continuă. În plus, pentru  $m \leq n - 1$ ,  $G(s)$  este o funcție strict proprie, ceea ce înseamnă că prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor câtul este 0. Urmează că  $g(t)$  nu conține impulsul Dirac și nici derivatele sale (a se vedea punctul **f**).

Valorile lui  $g(t)$  și ale derivatelor sale pentru  $t = +0$  se obțin cu ajutorul teoremei valorii inițiale (Anexa A.1.2.b.2<sup>o</sup>).

Pentru  $m = n - 1$  (urmând ca valoarea efectivă a lui  $m$  să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ ) rezultă:

$$g(0) = g(+0) = \lim_{t \downarrow 0} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{b_{n-1}}{a_n},$$

$$\begin{aligned} g'(+0) &= \lim_{t \downarrow 0} g'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sG(s) - g(+0)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} s \frac{a_n b_{n-1} s^n + a_n b_{n-2} s^{n-1} + \dots - a_n b_{n-1} s^n - a_{n-1} b_{n-1} s^{n-1} - \dots}{a_n (a_n s^n + \dots + a_0)} = \\ &= \frac{a_n b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-1}}{a_n^2} = \begin{vmatrix} \frac{b_{n-1}}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(+0) &= \lim_{t \downarrow 0} g''(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 G(s) - g(+0)s - g'(+0)] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ s^2 \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} - \frac{b_{n-1}}{a_n} s - \frac{a_n b_{n-2} - a_{n-1} b_{n-1}}{a_n^2} \right] = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{b_{n-1}}{a_n} & -1 & 0 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-3}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

.....,

$$g^{(n-1)}(+0) = \lim_{t \downarrow 0} g^{(n-1)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^{n-1} G(s) - g(+0)s^{n-2} - g'(+0)s^{n-3} - \dots - g^{(n-2)}(+0)] =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{b_{n-1}}{a_n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 & \dots & 0 \\ \frac{b_{n-3}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -1 \\ \frac{b_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Se remarcă faptul că minorii principali diagonali ai acestui determinant coincid respectiv cu  $g(+0)$ ,  $g'(+0)$ , ...,  $g^{(n-2)}(+0)$ ,  $g^{(n-1)}(+0)$ .

Pentru  $b_{n-1} \neq 0$  rezultă  $g(-0) \neq g(0) = g(+0)$ , ceea ce înseamnă că  $g(t)$  are o discontinuitate de speța I la stânga punctului  $t = 0$ . În schimb pentru  $b_{n-1} = 0$  rezultă  $g(-0) = g(0) = g(+0)$ , adică  $g(t)$  este o funcție continuă pe  $\mathbf{R}$ .

Este desigur evident că valorile  $g(+0)$ ,  $g'(+0)$ , ...,  $g^{(n-1)}(+0)$  reprezintă condițiile inițiale asociate ecuației diferențiale (3.9).

### Exemplul 3.1 (aplicație la c și d)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = (s+3)/(s^2+3s+2)$  și se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac utilizând ecuația (3.9) și condițiile inițiale obținute cu ajutorul teoremei valorii inițiale.

Ecuația diferențială corespunzătoare funcției de transfer date este:

$$g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 0, \quad t > 0.$$

Ecuația caracteristică are forma:  $s^2 + 3s + 2 = 0$  ale cărei rădăcini sunt  $p_1 = -2$  și  $p_2 = -1$ .

Soluția generală a ecuației diferențiale are expresia:

$$g(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Pentru determinarea constantelor  $C_1$  și  $C_2$  se utilizează:  $g'(+0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$  din care rezultă și  $g(0) = g(+0) = 1$ . Înlocuind  $t = +0$  în  $g(t)$  și  $g'(t)$  se obține:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 = 0, \end{cases}$$

din care rezultă  $C_1 = -1$ ,  $C_2 = 2$ .

Așadar răspunsul la impulsul Dirac are expresia:

$$g(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-t})s(t). \quad \square$$

e. În cazul  $m \leq n-1$  răspunsul la impulsul Dirac se poate calcula și cu ajutorul teoremei dezvoltării (Anexa A.1.2.b.1<sup>o</sup>).

Fie  $p_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , polii distincți, fiecare de multiplicitate  $q_i \geq 1$ , ai funcției de transfer  $G(s)$ , cu

$$\sum_{i=1}^r q_i = n.$$

Funcția  $g(t)$  are expresia:

$$g(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i-j} e^{p_i t} s(t), \quad (3.10)$$

în care:

$$K_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[ (s - p_i)^{q_i} G(s) \right] \right\} \Big|_{s=p_i}; \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, q_i}. \quad (3.11)$$

**Exemplul 3.2** (aplicație la **e**)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = (s+1)/(s+2)^2$  și se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac cu ajutorul formulelor (3.10) și (3.11).

Polii sistemului sunt  $p_1 = -2$ ,  $q_1 = 2$ . Conform formulei (3.11) se scrie:

$$K_{11} = \left\{ (s+2)^2 \frac{s+1}{(s+2)^2} \right\} \Big|_{s=-2} = -1, \quad K_{12} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s+2)^2 \frac{s+1}{(s+2)^2} \right] \right\} \Big|_{s=-2} = 1.$$

Cu acești coeficienți și utilizând formula (3.10) se obține:

$$g(t) = (1-t)e^{-2t} s(t). \quad \square$$

**f.** În cazul  $m \geq n$ , răspunsul la impulsul Dirac este o funcție generalizată (distribuție; Anexa B.1) datorită faptului că ea conține impulsul Dirac și derivatele sale până la ordinul  $m - n$  inclusiv.

Într-adevăr, efectuând împărțirea dintre polinoamele de la numărătorul și numitorul funcției de transfer  $G(s)$  (relația (1.11)) rezultă:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = c_{m-n} s^{m-n} + \dots + c_0 + \frac{b_{n-1}^1 s^{n-1} + \dots + b_0^1}{a_n s^n + \dots + a_0}, \quad (3.12)$$

în care  $c_{m-n} s^{m-n} + \dots + c_0$  este câtul și  $b_{n-1}^1 s^{n-1} + \dots + b_0^1$  este restul.

Trecând la domeniul timpului, din (3.12) se obține:

$$g(t) = c_{m-n} D^{m-n} d(t) + \dots + c_0 d(t) + g^1(t), \quad (3.13)$$

în care:

$$g^1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G^1(s) \right\}, \quad G^1(s) = \frac{b_{n-1}^1 s^{n-1} + \dots + b_0^1}{a_n s^n + \dots + a_0}. \quad (3.14)$$

Se remarcă faptul că  $G^1(s)$  satisface condițiile de la **d** și **e** și ca urmare  $g^1(t)$  poate fi determinat cu ajutorul ecuației (3.9) cu condițiile inițiale de la **d** sau cu ajutorul formulelor (3.10), (3.11).

**Exemplul 3.3** (aplicație la **f**)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = (s^3 + 4s^2 + 6s + 5)/(s^2 + 3s + 2)$  și se cere să se determine răspunsul la impulsul Dirac.

Mai întâi se scrie  $G(s)$  după cum urmează:  $G(s) = s + 1 + (s + 3)/(s^2 + 3s + 2)$ . Ținând seama de rezultatul de la exemplul 3.1, din această formă a lui  $G(s)$  se obține:

$$g(t) = Dd(t) + d(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-t})s(t). \quad \square$$

**g.** Răspunsul la impulsul Dirac are proprietatea:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0 \quad (3.15)$$

dacă și numai dacă funcția de transfer  $G(s)$  are toți polii situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$  (a se vedea și fig.II.33).

Într-adevăr, relația (3.15) are loc dacă și numai dacă în (3.10)  $\text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}$ .

Limita nulă din (3.15) denotă faptul că sistemul revine *asimptotic* la starea de *repaus*. Aceasta poate fi efectiv atinsă pentru  $t = +\infty$  dacă și numai dacă  $\text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}$ . Trecerea de la o stare de repaus (pentru  $t < 0$ ) la cealaltă (pentru  $t = +\infty$ ) se face prin intermediul *regimului tranzitoriu* (fig. II.33).

În situația în care există cel puțin un  $p_j, j = \overline{1, r}$ , pentru care  $\text{Re } p_j \geq 0$ , atunci (3.15) nu are loc. Concret, sunt posibile următoarele cazuri:

- $p_j = 0, q_j = 1$ , pentru un singur  $j = \overline{1, r}$ , și  $\text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}, i \neq j; b_0 \neq 0$ ; în acest caz:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \text{constant} \neq 0$ ;
- $\text{Re } p_j = \text{Re } p_k = 0, \text{Im } p_j = -\text{Im } p_k \neq 0, q_j = q_k = 1, j, k \in I \subseteq \{1, \dots, r\}, I \neq F$ ;  
 $p_l = 0, q_l = 1$  pentru cel mult un  $l = \overline{1, r}$ , și  $\text{Re } p_i < 0, i \in \{1, \dots, r\} \setminus (I \cup \{l\})$ ; în acest caz  $g(t)$  nu are limită pentru  $t \rightarrow +\infty$ ;
- $\text{Re } p_j = 0, q_j > 1$ , sau  $\text{Re } p_j > 0, q_j \geq 1$  pentru cel puțin un  $j = \overline{1, r}$ ; în acest caz:  
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} |g(t)| = +\infty$ .

**3.3. Produsul de convoluție**

Proprietățile prezentate în paragraful precedent permit determinarea efectivă a răspunsului la impulsul Dirac. Totodată ele evidențiază importanța acestuia și a funcției de transfer ca entități matematice utilizate în descrierea transferului intrare – ieșire al sistemelor dinamice liniare. În acest context ecuația transferului intrare – ieșire (1.12), pe baza teoremei lui Borel (Anexa A.1.1.b.11°), se exprimă în domeniul timpului prin *produsul de convoluție*:

$$y(t) = (g * u)(t) \quad s(t) = \int_0^t g(t-q)u(q)dqs(t) = \int_0^t g(q)u(t-q)dqs(t). \quad (3.16)$$

În afară de utilizarea ecuației (3.16) pentru calculul efectiv al lui  $y(t)$  atunci când se cunosc  $g(t)$  și  $u(t)$ , aceasta are în sine o importanță teoretică similară cu cea a ecuației (1.12). Motivul este că ecuația (3.16) exprimă o relație funcțională în domeniul timpului: de la cauza  $u(t)$  la efectul  $y(t)$ , suportul acestui transfer fiind sistemul caracterizat prin răspunsul la impulsul Dirac  $g(t)$ .

O analiză detaliată a ecuației (3.16) conduce la evidențierea caracterului dinamic al transferului de la  $u(t)$  la  $y(t)$ . Într-adevăr, „citind” produsul de convoluție (3.16) rezultă că  $y$  în momentul  $t$  nu depinde numai de produsul  $g(t-q)u(q)$  în același moment  $t$ , ci și de

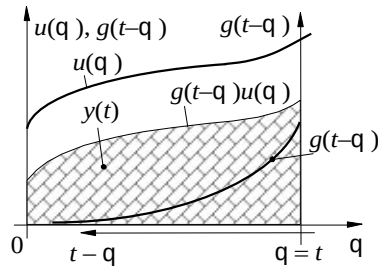


Fig. II.34. Ilustrarea caracterului dinamic al transferului intrare – ieșire descris de ecuația (3.16)

acțiunilor intrării  $u(q)$ ,  $q \in [0, t]$  asupra sa pe parcursul „istoriei” transferului temporal intrare – ieșire. Această „memorie” actualizează la ieșire (în momentul  $t$ ) în mod selectiv (ponderat), prin  $g(t-q)$ , efectele acestor acțiuni, motiv pentru care răspunsul la impulsul Dirac se mai numește și *funcția* (generalizată) *pondere*.

#### Exemplul 3.4 (aplicație la produsul de convoluție)

Se consideră răspunsul la impulsul Dirac de la exemplul 3.3 și se cere să se calculeze mărimea de ieșire cu ajutorul relației (3.16) pentru:  $u(t) = e^{lt}S(t)$ , în care  $l \in \mathbf{R}$  este un parametru.

Conform ecuației (3.16) se poate scrie:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= (g * u)(t)S(t) = (Dd * u)(t)S(t) + (d * u)(t)S(t) + \left(-\int_0^t e^{-2(t-q)} e^{lq} dq + \right. \\
 &+ 2\int_0^t e^{-(t-q)} e^{lq} dq)S(t) = Du(t) + u(t) + \left[-\frac{1}{l+2}(e^{lt} - e^{-2t}) + \frac{2}{l+1}(e^{lt} - e^{-t})\right]S(t) = \\
 &= d(t) + \left(\frac{1}{l+2}e^{-2t} - \frac{2}{l+1}e^{-t}\right)S(t) + \frac{l^3 + 4l^2 + 6l + 5}{l^2 + 3l + 2}e^{lt}S(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

valorile acestui produs în toate momentele  $q \in [0, t]$  (intervalul  $[0, t]$  este parcurs de variabila de integrare  $q$ ), însumate conform operației de integrare. Se poate deci afirma că  $y(t)$  cumulează toate efectele cauzate de  $u(t)$ ,  $q \in [0, t]$  (adică produse pe parcursul „istoriei” procesului în intervalul  $[0, t]$ ). Aceste efecte sunt actualizate (în momentul  $t$ ) în mod selectiv, respectiv sunt *ponderate* de celălalt factor al produsului de convoluție:  $g(t-q)$ ,  $q \in [0, t]$ . O ilustrare adecvată a acestor detalii se dă în fig. II.34. Se mai spune că sistemul dinamic are o „memorie” a

## 4. Răspunsul indicial

### 4.1. Definiție

Se consideră un sistem dinamic liniar descris de funcția de transfer  $G(s)$  (fig.II.7). Se aplică la intrare funcția Heaviside (funcția treaptă unitară):

$$u(t) = s(t) = \int_{-\infty}^t d(q) dq = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Întrucât :

$$U(s) = \mathcal{L}\{s(t)\} = 1/s,$$

din ecuația intrare – ieșire (1.12), cu (1.11), rezultă :

$$Y(s) = H(s) = \frac{1}{s} G(s).$$

Se notează cu  $h(t)$  originalul lui  $H(s)$  și se scrie:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \quad (4.4)$$

Rezultă că, în domeniul timpului, răspunsul (4.3) al sistemului la aplicarea funcției Heaviside este:

$$y(t) = h(t) = \left( \int_0^t g(q) dq \right) s(t). \quad (4.5)$$

Din (4.5) se obține:

$$g(t) = Dh(t). \quad (4.6)$$

#### Definiția 1

Răspunsul (4.5) al sistemului (1.12) (la aplicarea la intrare a funcției Heaviside (funcția treaptă unitară (4.1)) se numește *răspunsul indicial* sau *răspunsul la treaptă unitară*. □

### 4.2. Proprietăți

În virtutea relației dintre  $h(t)$  și  $g(t)$ , conform relațiilor (4.5) și (4.6), este de așteptat ca  $h(t)$  să aibă proprietăți similare cu cele ale lui  $g(t)$ .

**a.** Conform *principiului cauzalității* (non-anticipării, observația 1.1) răspunsul indicial are proprietatea:

$$h(t) \equiv 0, t < 0, \quad (4.7)$$

pentru care se dă o ilustrare în fig.II.35.

**b.** Răspunsul indicial este soluția ecuației diferențiale:

$$\begin{aligned} a_n D^n h(t) + a_{n-1} D^{n-1} h(t) + \dots + a_1 Dh(t) + a_0 h(t) = \\ = b_m D^m s(t) + b_{m-1} D^{m-1} s(t) + \dots + b_1 Ds(t) + b_0 s(t), t \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Într-adevăr, aplicând transformarea Laplace ecuației (4.8) se obține:

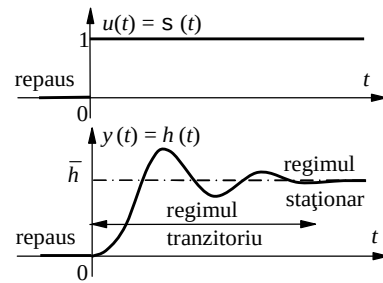


Fig.II.35. Răspunsul indicial; ilustrarea proprietăților (4.7) și (4.22)

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) H(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) / s. \quad (4.9)$$

Înlocuind (4.3), cu (1.11), în (4.9) rezultă că aceasta este satisfăcută.

Conform ecuației (4.8) rezultă că în general răspunsul indicial  $h(t)$  este o funcție generalizată sau o distribuție (Anexa B.1).

c. Pentru  $t > 0$  răspunsul indicial  $h(t)$  este o funcție continuă, soluție a ecuației diferențiale neomogene:

$$a_n h^{(n)}(t) + a_{n-1} h^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 h'(t) + a_0 h(t) = b_0, t > 0. \quad (4.10)$$

Într-adevăr, pentru  $t > 0$  rezultă:

$$s(t) = 1, D^k s(t) = s^{(k)}(t) = 0, k = \overline{1, m}. \quad (4.11)$$

Substituind (4.11) în (4.8) și înlocuind derivata generalizată cu cea obișnuită, se obține (4.10).

d. În cazul  $m \leq n$  răspunsul indicial  $h(t)$  are cel mult o discontinuitate de speța I la stânga punctului  $t = 0$  și este o funcție continuă în rest.

Într-adevăr, pentru  $t \neq 0$ , de la a și c rezultă că  $h(t)$  este continuă. În plus, pentru  $m \leq n$ ,  $H(s)$  este o funcție rațională strict proprie, ceea ce înseamnă că prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor se obține câtul 0. Urmează că  $h(t)$  nu conține impulsul Dirac și nici derivatele sale (a se vedea și punctul f).

Valorile lui  $h(t)$  și ale derivatelor sale pentru  $t = +0$  se obțin cu ajutorul teoremei valorii inițiale (Anexa A.1.2.b.2<sup>o</sup>).

Pentru  $m = n$  (urmând ca valoarea efectivă a lui  $m$  să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul:  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ ) rezultă:

$$h(0) = h(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{b_n s^n + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = \frac{b_n}{a_n},$$

$$h'(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h'(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sH(s) - h(+0)] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{a_n b_n s^n + a_n b_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_n b_n s^n - a_{n-1} b_n s^{n-1} - \dots}{a_n (a_n s^n + \dots + a_0)} = \frac{a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n}{a_n^2} = \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix},$$

$$h''(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h''(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2 H(s) - h(+0)s - h'(+0)] = \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 & 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix},$$

.....,



$$h^{(n-1)}(+0) = \lim_{t \downarrow 0} h^{(n-1)}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ s^{n-1} H(s) - h(+0)s^{n-1} - \dots - h^{(n-2)}(+0) \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{b_n}{a_n} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{b_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -1 & \dots & 0 \\ \frac{b_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{b_2}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \dots & -1 \\ \frac{b_1}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \vdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{vmatrix}.$$

Se remarcă faptul că minorii principali diagonali ai acestui determinant coincid respectiv cu  $h(+0), h'(+0), \dots, h^{(n-1)}(+0)$ .

Pentru  $b_n \neq 0$  rezultă  $h(-0) \neq h(0) = h(+0)$ , ceea ce înseamnă că  $h(t)$  are o discontinuitate de speța I la stânga punctului  $t=0$ . În schimb, pentru  $b_n = 0$  rezultă  $h(-0) = h(0) = h(+0) = 0$ , adică  $h(t)$  este o funcție continuă pe  $\mathbf{R}$ .

Este evident că valorile  $h(+0), h'(+0), \dots, h^{(n-1)}(+0)$  reprezintă condițiile inițiale asociate ecuației diferențiale (4.10).

#### Exemplul 4.1 (aplicație la c și d)

Se consideră funcția de transfer de la exemplul 3.1 și se cere să se determine răspunsul indicial utilizând ecuația (4.10) și condițiile inițiale obținute cu ajutorul teoremei valorii inițiale.

Ecuația diferențială corespunzătoare este:  $h''(t) + 3h'(t) + 2h(t) = 3$ ,  $t > 0$ . Rădăcinile ecuației caracteristice, determinate la exemplul 3.1, sunt:  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -1$ . Soluția generală a ecuației diferențiale are expresia:  $h(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + 3/2$ ,  $t > 0$ . Pentru determinarea

constantelor  $C_1$  și  $C_2$  se calculează condiția inițială:  $h'(+0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1$ , din care rezultă

și  $h(0) = h(+0) = 0$ . În locuind  $t = +0$  în  $h(t)$  și  $h'(t)$  se obține:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{3}{2} = 0 \\ -2C_1 - C_2 = 1, \end{cases}$$

din care rezultă:  $C_1 = 1/2$  și  $C_2 = -2$ .

Așadar răspunsul indicial are expresia:  $h(t) = (e^{-2t}/2 - 2e^{-t} + 3/2) \mathbf{s}(t)$ .

Având în vedere expresia lui  $g(t)$  obținută la exemplul 3.1, se pot aplica acum și relațiile (4.5) și (4.6):

$$h(t) = \left( \int_0^t g(q) dq \right) \mathbf{s}(t) = \left( \int_0^t (-e^{-2q} + 2e^{-q}) dq \right) \mathbf{s}(t) = \left( \frac{1}{2} e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2} \right) \mathbf{s}(t);$$

$$\begin{aligned} g(t) &= Dh(t) = D\left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}\right)S(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)S(t) + \left(\frac{1}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} + \frac{3}{2}\right)d(t) = \\ &= \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)S(t) + \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2}\right)d(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-t}\right)S(t). \quad \square \end{aligned}$$

**e.** În cazul  $m \leq n$  răspunsul indicial se poate calcula și cu ajutorul teoremei dezvoltării (Anexa A.1.2.b.1<sup>o</sup>).

Fie  $p_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , polii distincți, fiecare de multiplicitate  $q_i \geq 1$ , ai funcției de transfer  $G(s)$ . Întrucât  $H(s)$  (relația (4.3)) are deja un pol în origine, pentru generalitate se consideră că  $G(s)$  are și un pol în origine  $p_0 = 0$ , de multiplicitate  $q_0 \geq 0$ . Evident,  $p_i \neq 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ , și  $\sum_{i=1}^r q_i + q_0 = n$ . În acest caz funcția  $h(t)$  are expresia:

$$h(t) = \left( \sum_{j=1}^{q_0+1} \frac{M_{0j}}{(q_0 - j + 1)!} t^{q_0-j+1} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i-j} e^{p_i t} \right) S(t), \quad (4.12)$$

în care:

$$M_{0j} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[ s^{q_0} G(s) \right] \right\} \Big|_{s=0}, \quad j = \overline{1, q_0+1}, \quad (4.13)$$

$$M_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[ (s - p_i)^{q_i} \frac{1}{s} G(s) \right] \right\} \Big|_{s=p_i}, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, q_i}. \quad (4.14)$$

În situația în care  $G(s)$  nu are nici un pol în origine, respectiv pentru  $q_0 = 0$ , din (4.3), cu (1.11), se obține:

$$M_{01} = G(0) = b_0 / a_0, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.15)$$

Cu  $q_0 = 0$  și (4.15) expresia (4.12) a răspunsului indicial are forma:

$$h(t) = \left( \frac{b_0}{a_0} + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{M_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i-j} e^{p_i t} \right) S(t). \quad (4.16)$$

#### Exemplul 4.2 (aplicație la e)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = (s+3)/(s^3+3s^2+2s)$  și se cere să se determine răspunsul indicial cu ajutorul formulelor (4.12) – (4.14).

Polii sistemului sunt  $p_0=0$ , cu multiplicitatea  $q_0 = 1$ , și  $p_1=-2$ ,  $p_2=-1$ , cu  $q_1=q_2=1$ . Conform formulelor (4.13), (4.14) se scrie :

$$\begin{aligned} M_{01} &= \{sG(s)\} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2}, \quad M_{02} = \left\{ \frac{d}{ds} [sG(s)] \right\} \Big|_{s=0} = -\frac{7}{4}, \\ M_{11} &= \left\{ (s+2) \frac{1}{s} G(s) \right\} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{4}, \quad M_{21} = \left\{ (s+2) \frac{1}{s} G(s) \right\} \Big|_{s=-1} = 2. \end{aligned}$$

Cu acestea și cu formula (4.12) rezultă:  $h(t) = (-7/4 + 3t/2 - e^{-2t}/4 + 2e^{-t}) S(t)$ .  $\square$

**f.** În cazul  $m \geq n + 1$  răspunsul indicial este o funcție generalizată (distribuție) datorită faptului că ea conține impulsul Dirac și derivatele sale până la ordinul  $m - n - 1$  inclusiv.

Într-adevăr, efectuând împărțirea dintre polinoamele de la numărătorul și numitorul funcției  $H(s)$  (relațiile (4.3) și (1.11)) rezultă :

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s} \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0} = d_{m-n-1} s^{m-n-1} + \dots + d_0 + \frac{b_n^1 s^n + \dots + b_0^1}{s(a_n s^n + \dots + a_0)}, \quad (4.17)$$

în care  $d_{m-n-1} s^{m-n-1} + \dots + d_0$  este câtul și  $b_n^1 s^n + \dots + b_0^1$  este restul.

Trecând la domeniul timpului din (4.17) se obține :

$$h(t) = d_{m-n-1} D^{m-n-1} d(t) + \dots + d_0 d(t) + h^1(t), \quad (4.18)$$

în care:

$$h^1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H^1(s)\}, \quad H^1(s) = \frac{b_n^1 s^n + \dots + b_0^1}{s(a_n s^n + \dots + a_0)}. \quad (4.19)$$

Se remarcă faptul că  $H^1(s)$  satisface condițiile de la **d** și **e** și în consecință  $h^1(t)$  poate fi determinat cu ajutorul ecuației (4.10) cu condițiile inițiale de la **d** sau cu ajutorul formulelor (4.12) – (4.14).

Utilizând (4.5) și (3.13) se obține:

$$h(t) = \left( \int_0^t g(q) dq \right) s(t) = c_{m-n} D^{m-n-1} d(t) + \dots + c_1 d(t) + c_0 s(t) + \int_0^t g^1(q) dq s(t). \quad (4.20)$$

Comparând acest rezultat cu (4.18) rezultă:

$$d_k = c_{k+1}, k = 0, m-n-1, \quad h^1(t) = \left( c_0 + \int_0^t g^1(q) dq \right) s(t). \quad (4.21)$$

#### Exemplul 4.3 (aplicație la **f**)

Se consideră funcția de transfer de la exemplul 3.3 și se cere să se determine răspunsul indicial.

În conformitate cu (4.17) se scrie:

$$H(s) = \frac{1}{s} \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 5}{s^2 + 3s + 2} = 1 + \frac{s^2 + 4s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = 1 + \frac{5}{2s} + \frac{1}{2(s+2)} - \frac{2}{s+1}.$$

Trecând la domeniul timpului se obține:  $h(t) = d(t) + 5s(t)/2 + (e^{-2t}/2 - 2e^{-t})s(t)$ . Pentru verificare se aplică (4.6):

$$\begin{aligned} g(t) &= Dh(t) = Dd(t) + 5d(t)/2 + (1/2 - 2)d(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-t})s(t) = \\ &= Dd(t) + d(t) + (-e^{-2t} + 2e^{-t})s(t). \end{aligned}$$

Acest rezultat coincide cu cel obținut la exemplul 3.3.  $\square$

**g.** Răspunsul indicial are proprietatea:

$$\bar{h} = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = b_0 / a_0 \quad (4.22)$$

dacă și numai dacă funcția de transfer  $G(s)$  are toți polii situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$  (a se vedea și fig.II.35).

Într-adevăr, având în vedere (4.16), relația (4.22) are loc dacă și numai dacă  $q_0 = 0$  și  $\text{Re } p_i < 0, i = \overline{1, r}$ .

Valoarea  $\bar{h}$  care se obține conform relației (4.22) se numește *valoarea de regim staționar* a răspunsului indicial. Regimul staționar poate fi efectiv atins pentru  $t = +\infty$  dacă și numai dacă  $q_0 = 0$  și  $\operatorname{Re} p_i < 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ . Trecerea de la starea de repaus (pentru  $t < 0$ ) la regimul staționar se face prin intermediul *regimului tranzitoriu* (fig.II.35).

În situația în care  $q_0 \geq 1$  sau există un  $j$ ,  $j = \overline{1, r}$ , pentru care  $\operatorname{Re} p_j \geq 0$ , atunci (4.22) nu are loc. Concret sunt posibile următoarele cazuri:

- $q_0 = 0$ ,  $\operatorname{Re} p_j = \operatorname{Re} p_k = 0$ ,  $\operatorname{Im} p_j = -\operatorname{Im} p_k \neq 0$ ,  $q_j = q_k = 1$ ,  $j, k \in I \subseteq \{1, \dots, r\}$ ,  $I \neq F$ , și  $\operatorname{Re} p_i < 0$ ,  $i \in \{1, \dots, r\} \setminus I$ ; în acest caz  $h(t)$  nu are limită pentru  $t \rightarrow +\infty$ ;
- $q_0 \geq 1$  sau  $\operatorname{Re} p_j = 0$ ,  $q_j > 1$ , sau  $\operatorname{Re} p_j > 0$ ,  $q_j \geq 1$ , pentru cel puțin un  $j = \overline{1, r}$ ; în acest caz:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |h(t)| = +\infty$ .

#### 4.3. Integrala Duhamel

În conformitate cu (4.6) se poate scrie:

$$g(t) = Dh(t) = (h * Dd)(t)S(t). \quad (4.23)$$

Înlocuind (4.23) în (3.16) se obține:

$$y(t) = ((h * Dd) * u)(t)S(t). \quad (4.24)$$

Ținând seama că produsul de convoluție este asociativ și comutativ, din (4.24) rezultă:

$$y(t) = D[(h * u)(t)S(t)] = D\left(\int_0^t h(t-q)u(q) dq S(t)\right) = D\left(\int_0^t h(q)u(t-q) dq S(t)\right). \quad (4.25)$$

Transferul temporal intrare – ieșire (4.25) este exprimat prin derivata (generalizată) a produsului de convoluție în care rolul de ponderare este jucat de răspunsul indicial. Pentru  $t > 0$  funcția  $h(t)$  fiind continuă și derivabilă se poate scrie:

$$y(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-q)u(q) dq = h(+0)u(t) + \int_0^t \frac{dh(t-q)}{dt} u(q) dq, \quad t > 0, \quad (4.26)$$

care este cunoscută sub numele de *integrala Duhamel*. În aceste circumstanțe (4.25) este o generalizare a ecuației (4.26).

##### Exemplul 4.4 (aplicație la integrala Duhamel)

Se consideră răspunsul indicial de la exemplul 4.3 și se cere să se calculeze mărimea de ieșire cu ajutorul ecuației (4.25) pentru:  $u(t) = e^{lt}S(t)$ , în care  $l \in \mathbf{R}$  este un parametru.

Conform ecuației (4.25) se poate scrie:

$$\begin{aligned} y(t) &= D\left(e^{lt} + \frac{5}{2} \int_0^t e^{lq} dq + \frac{1}{2} e^{-2t} \int_0^t e^{(l+2)q} dq - 2e^{-t} \int_0^t e^{(l+1)q} dq\right)S(t) = \\ &= D\left[e^{lt} + \frac{5}{2l}(e^{lt} - 1) + \frac{1}{2(l+2)}(e^{(l+2)t} - e^{-2t}) - \frac{2}{l+1}(e^{(l+1)t} - e^{-t})\right]S(t) = \\ &= d(t) + \left(\frac{1}{l+2}e^{-2t} - \frac{2}{l+1}e^{-t}\right)S(t) + \frac{l^3 + 4l^2 + 6l + 5}{l^2 + 3l + 2}e^{lt}S(t). \quad \square \end{aligned}$$

## 5. Polii și zerourile funcției de transfer

### 5.1. Răspunsul la semnalul exponențial

Din cele prezentate în subcapitolele 3 și 4 rezultă că polii finiți ai funcției de transfer  $G(s)$  au un rol determinant în ceea ce privește evoluția mărimii de ieșire pe durată, teoretic infinită, a regimului tranzitoriu (a se vedea expresiile răspunsului la impulsul Dirac – (3.10) și răspunsul indicial – (4.12), (4.16) și respectiv 3.2.g și 4.2.g).

În cazul unei mărimi de intrare  $U(s)$  oarecare, mărimea de ieșire,  $Y(s)$ , depinde în plus și de polii finiți ai lui  $U(s)$ .

Pentru a susține această afirmație se va utiliza teorema dezvoltării (Anexa A.1.2.b.1<sup>o</sup>) în cazul ecuației (1.12), cu (1.13) și  $m \leq n$ . Pentru simplificarea expunerii, se consideră că polii  $p_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ , sunt simpli. În mod obișnuit  $u(t)$ , ca mărime generată de un alt sistem dinamic, liniar și invariant în timp, este o combinație liniară de funcții de forma  $t^a e^{lt}$ . Din acest motiv, pentru concizia analizei care urmează se consideră:

$$u(t) = u_0 e^{lt} \quad (5.1)$$

Din (5.1) rezultă:

$$U(s) = u_0 / (s - l), \quad (5.2)$$

în care  $l$  (polul) și  $u_0$  (amplitudinea) sunt doi parametri ale căror valori (reale sau complexe) se vor alege conform necesităților analizei.

Înlocuind (5.2) și (1.13) în (1.12) și aplicând teorema dezvoltării (membrul drept în (1.12) este o funcție strict proprie) rezultă:

$$y(t) = \underbrace{\left( \sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t} \right)}_{y_T(t)} s(t) + \underbrace{d e^{lt}}_{y_P(t)} s(t), \quad (5.3)$$

$$c_k = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) G(s) U(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p_k - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (p_k - p_j)} \frac{u_0}{p_k - l}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

$$d = \lim_{s \rightarrow l} (s - l) G(s) U(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (l - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (l - p_j)} u_0. \quad (5.5)$$

Se remarcă faptul că în (5.3) există două categorii de termeni:

- $y_T(t)$ , grupați în prima sumă, reprezintă *componenta de regim tranzitoriu*, în care evoluția temporală este determinată de exponențialele  $e^{p_k t}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , corespunzătoare polilor finiți ai lui  $G(s)$ , și de coeficienții  $c_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , dependenți de zerourile și de polii (exclusiv  $p_k$ ) lui  $G(s)$  și de polul lui  $U(s)$ , conform relației (5.4).
- $y_P(t)$  – ultimul termen din (5.3) – reprezintă *componenta de regim permanent*, în care evoluția temporală este determinată de exponențiala  $e^{lt}$  (existentă și în  $u(t)$ !) și de coeficientul  $d$ , dependent de zerourile și de polii lui  $G(s)$ , conform relației (5.5).

Între componentele  $y_T(t)$  și  $y_P(t)$  există deosebiri remarcabile. Astfel, componenta de regim tranzitoriu,  $y_T(t)$ , este o manifestare a modificării *echilibrului* (energetic) *intern* al sistemului ca urmare a *excitării externe* (prin  $u(t)$ ). În același timp, componenta de regim permanent,  $y_P(t)$ , este expresia dinamică la ieșire a mărimii de intrare, conform structurii și parametrilor sistemului, în sensul că  $y_P(t)$  are o formă similară cu  $u(t)$  (în general dacă  $u(t)$  este o combinație liniară de funcții de forma  $t^a e^{lt}$ , atunci  $y_P(t)$  este de asemenea o combinație liniară de același tip).

În cazul mărimii de intrare (5.1), comparând (5.5) cu (1.13), pentru componenta de regim permanent din (5.3) se poate scrie:

$$y_P(t) = G(l)u(t), \quad (5.6)$$

în care:

$$G(l) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (l - z_i)}{a_n \prod_{j=1}^n (l - p_j)}. \quad (5.7)$$

Relația (5.6) confirmă faptul că  $y_P(t)$  are o formă similară cu  $u(t)$ .

#### Observația 5.1

Teorema dezvoltării (Anexa A.1.2.b.1<sup>o</sup>) permite determinarea separată a componentei de regim tranzitoriu și a componentei de regim permanent;  $y_T(t)$  rezultă pe baza cunoașterii polilor lui  $G(s)$  și  $y_P(t)$  rezultă pe baza cunoașterii polilor lui  $U(s)$ . □

#### Observația 5.2

Componenta de regim tranzitoriu este de regulă indezirabilă, dar datorită caracterului ei inerent, este în același timp inevitabilă. În opoziție cu această situație, de regulă, componenta de regim permanent constituie rațiunea de a fi a sistemului, menirea acestuia fiind aceea de a furniza la ieșire o mărime dinamic similară cu mărimea de intrare. Ca și în cazul răspunsului la impulsul Dirac și al răspunsului indicial (a se vedea 3.2.g și respectiv 4.2.g), se poate afirma că  $y(t) \rightarrow y_P(t)$ , respectiv  $y_T(t) \rightarrow 0$ , pentru  $t \rightarrow +\infty$  dacă și numai dacă toți polii lui  $G(s)$  sunt situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ . □

#### Exemplul 5.1 (intrare exponențială)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = 3 / [(s+1)(s+2)]$ . Se cere să se determine răspunsul sistemului la mărimea de intrare:  $u(t) = e^{0,5t} \sigma(t)$ ,  $U(s) = 1 / (s+0,5)$ .

Conform formulelor (5.4) și (5.5) rezultă:

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s-0,5} = 1,2,$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s-0,5} = -2$$

$$d = \lim_{s \rightarrow 0,5} (s-0,5) \frac{3}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s-0,5} = 0,8.$$

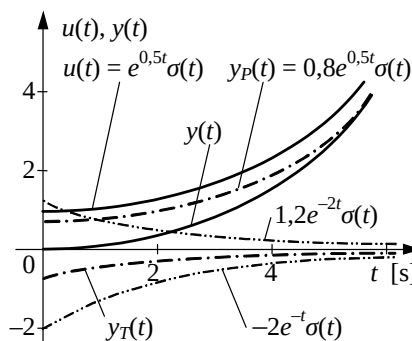


Fig.II.36 Transferul temporal intrare – ieșire la exemplul 5.1

Răspunsul sistemului are expresia:

$$y(t) = \underbrace{(1,2e^{-2t} - 2e^{-t})}_{y_T(t)} s(t) + \underbrace{0,8e^{0,5t}}_{y_P(t)} s(t).$$

Graficul corespunzător este reprezentat în fig.II.36. Se remarcă faptul că  $t \rightarrow +\infty$  implică  $y_T(t) \rightarrow 0$  și  $y(t) \rightarrow y_P(t)$ , deoarece polii sistemului sunt negativi. În consecință, pentru  $t > 3$  sec. are loc  $y(t) \cong y_P(t)$ ,  $y_P(t)$  având o evoluție similară cu a lui  $u(t)$ .  $\square$

Din cele expuse până aici, având ca suport expresia (5.3), cu (5.4), (5.5), a răspunsului sistemului, rezultă că polii, pe de o parte, și zerourile, pe de altă parte, au roluri diferite în determinarea caracteristicilor cantitative și calitative ale transferului temporal intrare – ieșire. În timp ce polii determină în mod exclusiv evoluția în timp a exponențialelor din (5.3), coeficienții acestora depind atât de polii (exclusiv polii care apar în propriile exponențiale) cât și de zerourile lui  $G(s)$ . Acest fapt se corelează într-un anumit sens și cu rolul operatorial diferit al polinomului zerourilor și al inversului polinomului polilor, așa cum s-a arătat la observația 1.2.

## 5.2. Transferul „rezonant”

Este ușor de observat că pentru fiecare  $l = p_r$ ,  $r = \overline{1, n}$ , în (5.1), din (5.7) se obține:

$$|G(p_r)| = +\infty, \quad r = \overline{1, n}. \quad (5.8)$$

Fenomenul ilustrat de (5.8) este de tipul rezonanței și anume pe „frecvența proprie” (a sistemului)  $p_r$  atunci când  $p_r$  există și în mărimea de intrare  $u(t)$ .

La această calificare se ajunge prin extensie de la cazul particular  $l = p_r = j\omega_r$  când în sistemul reprezentat de  $G(s)$  are loc rezonanța propriu-zisă. În acest caz,  $e^{j\omega_r t}$ , existent în  $u(t)$ , este o componentă elementară a unei oscilații sinusoidale reale de forma:  $\cos \omega_r t = (e^{j\omega_r t} + e^{-j\omega_r t})/2$ , iar  $\omega_r$  este în același timp una din pulsațiile naturale ale sistemului. Răspunsul unui sistem la semnalul sinusoidal va face obiectul cap. VI.

Analizând componenta  $y_T(t)$  din (5.3) pentru  $l \rightarrow p_r$ , din (5.4) se constată că  $|c_r| \rightarrow +\infty$ . Rezultă deci că pentru  $l \rightarrow p_r$  are loc  $|y_T(t)| \rightarrow +\infty$ . Se trage concluzia că în (5.3) se produce de fapt o nedeterminare pentru  $l \rightarrow p_r$ . Într-adevăr, izolând termenul de indice  $r$  din  $y_T(t)$  împreună cu  $y_P(t)$ , se poate scrie:

$$\lim_{l \rightarrow p_r} \left( c_r e^{p_r t} + d e^{l t} \right) s(t) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p_r - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n (p_r - p_j)} u_0 s(t) \lim_{l \rightarrow p_r} \frac{e^{l t} - e^{p_r t}}{l - p_r} = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p_r - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n (p_r - p_j)} t u(t).$$

Rezultă că în (5.6), pentru  $l = p_r$ ,  $G(l)$  are forma:

$$G(p_r) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p_r - z_i)}{a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n (p_r - p_j)} t. \quad (5.9)$$

Este evident că din (5.9), pentru  $t \rightarrow +\infty$ , rezultă  $|G(p_r)| \rightarrow +\infty$ , ceea ce, în alt mod, este confirmat de (5.8).

În ceea ce privește rezonanța propriu-zisă, adică pentru  $l = p_r = j\omega_r$  în (5.9), se constată că pentru orice  $u_0$ , cu  $|u_0| < +\infty$ , respectiv pentru:

$$|u(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (5.10)$$

din (5.6) cu (5.9) rezultă:

$$|y_P(t)| \rightarrow +\infty \quad \text{pentru } t \rightarrow +\infty, \quad (5.11)$$

fapt care constituie nota distinctă a rezonanței propriu-zise.

În cazul  $\operatorname{Re} p_r < 0$  din (5.6), cu (5.9) și (5.10), rezultă:

$$|y_P(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (5.12)$$

deoarece  $t e^{p_r t} \rightarrow 0$  pentru  $t \rightarrow +\infty$ . În schimb, în cazul  $\operatorname{Re} p_r > 0$ , are loc (5.11) datorită faptului că  $|u(t)| \rightarrow +\infty$  și  $|G(p_r)| \rightarrow +\infty$  pentru  $t \rightarrow +\infty$  (în (5.1) și respectiv (5.9)).

Din cele de mai sus rezultă că *transferul „rezonant”* (5.6), cu (5.9), se corelează cu (5.8), respectiv că numitorul funcției de transfer  $G(s)$  se anulează pentru  $s = p_r$ ,  $r = \overline{1, n}$ . Din acest motiv „frecvențele proprii” (inoculabile prin mărimea de intrare  $u(t)$ ) se numesc *polii* funcției de transfer  $G(s)$ , respectiv ai sistemului reprezentat de  $G(s)$  (a se vedea 1.4).

### 5.3. Transferul blocat

Pentru fiecare  $l = z_m$ ,  $m = \overline{1, m}$ , în (5.1), din (5.7) rezultă:

$$G(z_m) = 0, \quad m = \overline{1, m}. \quad (5.13)$$

În aceste condiții, pentru  $l = z_m$  și  $u_0 \neq 0$ , adică pentru:

$$u(t) \neq 0, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (5.14)$$

din (5.6), cu (5.13), se obține:

$$y_P(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (5.15)$$

Fenomenul evidențiat de (5.14), (5.15) se numește *transferul blocat* intrare – ieșire. În contrast cu transferul „rezonant” se poate vorbi în acest caz de o *antirezonanță* pe „frecvențele”  $l = z_m$ ,  $m = \overline{1, m}$ , (inoculabile prin mărimea de intrare  $u(t)$ ), care din acest motiv se numesc *zerourile de transmisie* ale funcției de transfer  $G(s)$ , respectiv ale sistemului (a se vedea 1.4).



## 6. Stabilitatea intrare – ieșire

### 6.1. Definiția BIBO-stabilității

Un sistem dinamic este suportul unui transfer intrare – ieșire. S-a arătat la observația 5.2 că în (5.3) componenta de regim permanent,  $y_p(t)$ , este rațiunea de a fi a sistemului (1.12) și că  $y_T(t)$  – componenta de regim tranzitoriu, deși indezirabilă, este inerentă și ca atare inevitabilă. Întrucât  $y_T(t)$  și  $y_p(t)$  coexistă cronologic, este în mod firesc de dorit ca:

$$|u(t)| \leq K < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.1)$$

cu  $K > 0$ , să implice:

$$|y_p(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (6.2)$$

simultan cu:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_T(t) = 0, \quad (6.3)$$

astfel încât începând cu un anumit moment  $t_s > 0$ , finit și nu excesiv de mare, să aibă loc:

$$y_T(t) \equiv 0, \quad t \geq t_s > 0, \quad (6.4)$$

respectiv:

$$y(t) \equiv y_p(t), \quad t \geq t_s > 0. \quad (6.5)$$

Momentul  $t_s$  – numit și *durata componentei de regim tranzitoriu* – se definește în mod convențional pe baza inegalității:

$$|y_T(t)| \leq e, \quad t \geq t_s > 0, \quad (6.6)$$

în care  $e > 0$  are semnificația de eroare prin care se justifică aproximația (6.5).

Din cele expuse până aici este clar că problematica abordată este aceea a calității transferului intrare – ieșire. În mod specific (având în vedere premisa (6.1) și condițiile (6.2) și (6.3)) este vorba de **BIBO-stabilitate** (BIBO = bounded input – bounded output = intrare mărginită – ieșire mărginită). În conformitate cu observația 5.2 se poate afirma că acest tip de stabilitate se realizează dacă și numai dacă funcția de transfer  $G(s)$  are toți polii în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$  (fapt echivalent cu (6.2) și (6.3)). Această afirmație urmează să fie demonstrată în mod riguros în 6.2.

#### Definiția 1

Un sistem dinamic descris de ecuația (1.12), care se află în repaus pentru  $t < 0$ , se numește **BIBO-stabil** dacă pentru orice mărime de intrare,  $u(t)$ , mărginită în valoare absolută (relația (6.1)), sistemul răspunde cu o mărime de ieșire,  $y(t)$ , mărginită în valoare absolută, adică:

$$|y(t)| < +\infty, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (6.7)$$

În caz contrar (adică există un  $u(t)$ , cu (6.1), pentru care (6.7) nu are loc) sistemul se numește **BIB-instabil**.  $\square$

#### Exemplul 6.1 (sisteme BIBO-instabile)

Se consideră sistemele descrise de funcțiile de transfer: a)  $G(s) = 1/(s^2 - s + 1)$ , b)  $G(s) = 1/(s^2 + 1)$ . Se cere să se găsească acele mărimi de intrare mărginite în valoare

absolută pentru care mărimile de ieșire corespunzătoare sunt nemărginite în valoare absolută.

a) Polii sistemului sunt:  $p_{1,2} = 1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . Întrucât  $\operatorname{Re} p_{1,2} > 0$ , este de așteptat ca pentru  $u(t) = S(t)$  (mărimă mărginită în valoare absolută) răspunsul indicial să fie nemărginit. Într-adevăr:  $h(t) = [1 - (2e^{t/2}/3)\sin(\sqrt{3}t/2 - p/2)]S(t)$  este o funcție nemărginită deoarece pentru  $t \rightarrow +\infty$  rezultă  $e^{t/2} \rightarrow +\infty$ .

b) Polii sistemului sunt:  $p_{1,2} = \pm j$ . Întrucât  $\operatorname{Re} p_{1,2} = 0$  este de așteptat ca pentru o anumită mărime de intrare mărginită în valoare absolută să se obțină o mărime de ieșire nemărginită în valoare absolută. Pentru  $u(t) = S(t)$  rezultă:  $h(t) = (1 - \cos t)S(t)$ , care este o funcție mărginită. În schimb pentru  $u(t) = \sin t S(t)$ , care produce o rezonanță (pulsăția intrării,  $w = 1$ , coincide cu pulsăția proprie a sistemului,  $w_p = w_n = 1$ ), se obține:  $y(t) = (\sin t - t \cos t)S(t)/2$ . Evident, această funcție este nemărginită în valoare absolută.  $\square$

### Exemplul 6.2 (sistem BIBO-stabil)

Se consideră sistemul descris de funcția de transfer:  $G(s) = 1/(s^2 + s + 1)$ . Se cere să se arate că pentru orice mărime de intrare mărginită în valoare absolută, adică:  $|u(t)| \leq M < +\infty$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ , în care  $M > 0$  este maximul absolut al funcției  $|u(t)|$ , mărimea de ieșire este mărginită în valoare absolută.

În acest caz:  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = (2e^{-t/2}/\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}t/2)S(t)$  Utilizând expresia (3.16) a transferului temporal intrare – ieșire (produsul de convoluție) se pot face următoarele evaluări:

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_0^t |g(q)| |u(t-q)| dq \leq M \int_0^t |g(q)| dq = \frac{2M}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{t}{2}} \left| \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right| dt S(t) \leq \\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{3}} \int_0^t e^{-\frac{t}{2}} dt S(t) \leq \frac{2M}{\sqrt{3}} \left( \int_0^t e^{-\frac{t}{2}} dt + \int_t^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt \right) = \frac{2M}{\sqrt{3}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = \frac{4M}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice  $u(t)$ , cu  $|u(t)| \leq M$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ , s-a obținut  $|y(t)| \leq 4M/\sqrt{3}$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ .  $\square$

### 6.2. Caracterizări ale BIBO-stabilității

Rezultatul care urmează să se demonstreze se referă la echivalența dintre BIBO-stabilitatea conform definiției 1 și localizarea tuturor polilor funcției de transfer  $G(s)$  în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ . Pentru a se ajunge la acest rezultat se demonstrează mai întâi următoarea teoremă.

#### Teorema 1

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO-stabil dacă și numai dacă:

$$\int_0^{+\infty} |g(q)| dq < +\infty. \quad (6.8)$$

*Ţ. Suficiența.* Prin ipoteză  $g(t)$  este absolut integrabilă (conform relației (6.8)). Utilizând ecuația (3.16) (echivalentă cu (1.12)), pentru orice  $u(t)$ , satisfăcând (6.1), se pot face următoarele evaluări:

$$|y(t)| \leq \int_0^t |g(q)| |u(t-q)| dq \leq K \int_0^t |g(q)| dq \leq K \left( \int_0^t |g(q)| dq + \int_t^{+\infty} |g(q)| dq \right) = K \int_0^{+\infty} |g(q)| dq < +\infty.$$

Aceasta înseamnă că sistemul este BIBO-stabil.

*Necesitatea.* Prin ipoteză sistemul este BIBO-stabil.

Se presupune prin absurd că (6.8) nu este adevărată. Ca urmare, pentru orice  $M > 0$  există  $t_M > 0$  (dependent de  $M$ ) astfel încât:  $\int_0^{t_M} |g(q)| dq \geq M$ . Se alege ca mărime de intrare:  $u(t) = \text{sgn } g(t_M - t)$ , care, în mod evident, satisface (6.1) pentru  $K = 1$ .

În aceste condiții pentru  $t = t_M$  din (3.16) rezultă:  $|y(t_M)| = \left| \int_0^{t_M} g(q) u(t_M - q) dq \right| = \left| \int_0^{t_M} g(q) \text{sgn } g(q) dq \right| = \left| \int_0^{t_M} |g(q)| dq \right| = \int_0^{t_M} |g(q)| dq \geq M$ , ceea ce este în contradicție cu faptul că sistemul este BIBO-stabil. Urmează că (6.8) este adevărată.  $\square$

### Teorema 2

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO-stabil dacă și numai dacă toți polii funcției de transfer  $G(s)$  sunt situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

*Ţ. Suficiența.* Se ştie de la 3.2.e și f că:

$$g(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}, \quad t > 0.$$

Întrucât  $\text{Re } p_i < 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ , rezultă că  $g(t)$  este o funcție absolut integrabilă. Conform teoremei 1 sistemul considerat este BIBO-stabil.

*Necesitatea.* Sistemul este BIBO-stabil. Se ştie că:  $G(s) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt$ .

Întrucât pentru  $\{\text{Re } s \geq 0\}$  și  $t \geq 0$  are loc  $|e^{-st}| \leq 1$ , urmează că în conformitate cu teorema 1 se poate scrie:  $|G(s)| \leq \int_0^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty$ ,  $\text{Re } s \geq 0$ .

Aceasta înseamnă că  $|G(s)|$  este mărginită în  $\{\text{Re } s \geq 0\}$ . În consecință toți polii funcției de transfer  $G(s)$  sunt situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .  $\square$

În virtutea relațiilor (4.5), (4.6) dintre  $g(t)$  și  $h(t)$  și în conformitate cu 4.2.g. se poate enunța (fără a mai fi necesară o demonstrație) și următorul rezultat.

### Teorema 3

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO-stabil dacă și numai dacă  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$  există și este finită.  $\square$

### 6.3. O condiție necesară de BIBO-stabilitate

Conform teoremei 2 problema BIBO-stabilității este echivalentă cu aceea a localizării în  $\{\text{Re } s < 0\}$  a polilor funcției de transfer  $G(s)$ .

În conformitate cu forma (1.11) a funcției de transfer  $G(s)$ , fie:

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (6.9)$$

polinomul de la numitorul lui  $G(s)$  și

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (6.10)$$

polinomul (monic al) polilor lui  $G(s)$  ( $D(s) \equiv p(s)$ , relația (1.18)), în care:

$$a_i = a_{n-i}/a_n, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_n \neq 0. \quad (6.11)$$

### Definiția 2

Polinomul  $P(s)$  (sau echivalentul monic  $D(s)$ ) se numește *hurwitzian* dacă toate zerourile sale sunt situate în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ .  $\square$

Conform cu definiția 2, urmează că teorema 2 este echivalentă cu următorul rezultat.

### Teorema 4

Sistemul descris de ecuația (1.12) este BIBO-stabil dacă și numai dacă polinomul polilor ( $P(s)$  sau  $D(s)$ ) este hurwitzian.  $\square$

Cu referire directă la polinomul monic  $D(s)$  se poate demonstra acum următoarea condiție necesară ca sistemul (1.12) să fie BIBO-stabil.

### Teorema 5

O condiție necesară ca  $D(s)$  să fie hurwitzian este ca:

$$a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.12)$$

$\mathcal{D}.D(s)$  (monic) având coeficienți reali, zerourile sale sunt reale sau complex conjugate. Fie  $p_m = -b_m$ ,  $m = \overline{1, n_1}$ , zerourile reale, și  $p_n = -g_n \pm j d_n$ ,  $n = \overline{1, n_2}$ , zerourile complex conjugate ale polinomului  $D(s)$ , cu  $n_1 + 2n_2 = n$ . Prin ipoteză  $D(s)$  este hurwitzian, ceea ce este echivalent cu:  $b_m > 0$ ,  $m = \overline{1, n_1}$ ;  $g_n > 0$ ,  $n = \overline{1, n_2}$ . Ca urmare, exprimând  $D(s) (\equiv p(s))$  conform (1.18)) sub forma factorizată:  $D(s) = \prod_{m=1}^{n_1} (s + b_m) \prod_{n=1}^{n_2} (s^2 + 2g_n s + g_n^2 + d_n^2)$  se constată că toți factorii (binoame sau trinoame) au toți coeficienții strict pozitivi. Mai mult, efectuând toate calculele se obține (6.10) care în mod evident satisface (6.12), deoarece după toate înmulțirile și grupările de termeni (după puterile lui  $s$ ) rezultatul conține toți termenii de la gradul  $n$  la 0 și toți coeficienții sunt strict pozitivi.  $\square$

Condiția necesară (6.12) este foarte ușor de utilizat în aplicații. Este simplu de verificat că pentru  $n = 1$  și  $n = 2$  condiția (6.12) este și suficientă. Pentru  $n \geq 3$  condiția (6.12) nu este și suficientă, după cum se poate vedea din următorul exemplu.

### Exemplul 6.3 (polinom hurwitzian)

Se consideră polinomul:  $D(s) = s^3 + s^2 + s + 6$ . Se cere să se arate (prin calculul rădăcinilor) că deși condiția (6.12) este satisfăcută, polinomul nu este hurwitzian.

Căutând zerourile numere întregi printre divizorii termenului liber, se constată că pentru  $p_1 = -2$  rezultă  $D(-2) = 0$ . Efectuând împărțirea lui  $D(s)$  prin  $s + 2$  rezultă câtul:  $s^2 - s + 3$ . Zerourile acestui polinom, respectiv următoarele două zerouri ale lui  $D(s)$ , sunt:  $p_{2,3} = (1 \pm j\sqrt{11})/2$ , ceea ce confirmă faptul că  $D(s)$  nu este hurwitzian.  $\square$

Faptul că teorema 5 este o condiție necesară conduce în mod firesc, prin negarea teoremei 5, la următorul rezultat foarte util în aplicații.

**Teorema 6**

Dacă  $D(s)$  are cel puțin un coeficient nul sau negativ, atunci  $D(s)$  nu este hurwitzian.  $\square$

Evident, acest rezultat este o condiție suficientă de BIBO-instabilitate, la fel de ușor de utilizat în aplicații ca și condiția (6.12).

**6.4. Criteriul Hurwitz**

Fie matricea pătratică de ordinul  $n$ :

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

în care diagonala principală este formată din  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pe linii, la stânga diagonalei principale, se scrie  $a_k = 0$  pentru toți  $k > n$ .  $H_n$  se numește *matricea Hurwitz* asociată polinomului monic  $D(s)$ .

**Teorema 7 (Hurwitz)**

O condiție necesară și suficientă ca  $D(s)$  să fie hurwitzian este ca:

$$\det H_k > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad \square \quad (6.14)$$

**Exemplul 6.4 (domeniul parametric de BIBO-stabilitate)**

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.II.37, în care:

$$G_F(s) = \frac{8}{2s^2 + 34s + 1},$$

$$G_R(s) = k + \frac{1}{ts}; \quad k \geq 0, t > 0.$$

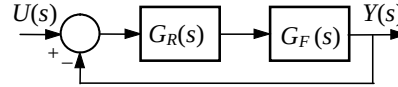


Fig.II.37. Structura sistemului automat de la exemplul 6.4;  $G_F(s)$  – funcția de transfer a părții fixe (instalația automatizată),  $G_R(s)$  – funcția de transfer a regulatorului (partea cu parametri ajustabili)

Se cere să se determine în planul parametrilor ajustabili ai regulatorului,  $(k, t)$ , acel domeniu pentru care sistemul automat este BIBO-stabil.

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{G_R(s)G_F(s)}{1 + G_R(s)G_F(s)} = \frac{4(ks + 1/t)}{s^3 + 17s^2 + (1/2 + 4k)s + 4/t},$$

în care polinomul polilor este:

$$D(s) = s^3 + 17s^2 + (1/2 + 4k)s + 4/t.$$

Matricea Hurwitz asociată polinomului  $D(s)$  are forma:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4/t & 1/2 + 4k & 17 \\ 0 & 0 & 4/t \end{bmatrix}.$$

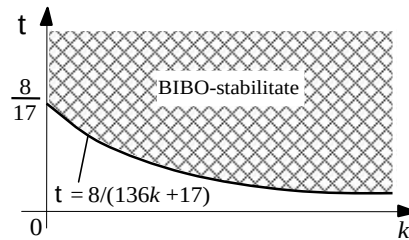


Fig.II.38. Domeniul de stabilitate BIBO la exemplul 6.4

Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO-stabil dacă și numai dacă:

$$\det H_1 = 17 > 0, \det H_2 = 17(1/2 + 4k) - 4/t > 0, \det H_3 = (4/t) \det H_2 > 0.$$

Întrucât prima inegalitate este satisfăcută și a treia este echivalentă cu a doua, rezultă că sistemul automat este BIBO-stabil dacă și numai dacă:  $t > 8/(136k + 17)$ . Domeniul de BIBO-stabilitate corespunzător acestei inegalități este reprezentat în fig.II.38.  $\square$

Condițiile (6.14) au dezavantajul că pentru  $n \geq 4$  calculul determinanților (minorilor principali diagonali ai matricei  $H_n$ ) devine laborios. Un rezultat care se obține în mod echivalent din teorema 7 și în care numărul de determinanți necesar de calculat se reduce la jumătate este următorul.

**Teorema 8** (Liénard – Chipart)

O condiție necesară și suficientă ca  $D(s)$  să fie hurwitzian este ca să aibă loc unul din următoarele patru șiruri de inegalități:

- 1°  $a_n > 0, a_{n-2} > 0, a_{n-4} > 0, \dots,$   
 $\det H_1 > 0, \det H_3 > 0, \dots;$
- 2°  $a_n > 0, a_{n-2} > 0, a_{n-4} > 0, \dots,$   
 $\det H_2 > 0, \det H_4 > 0, \dots;$
- 3°  $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots,$   
 $\det H_1 > 0, \det H_3 > 0, \dots;$
- 4°  $a_n > 0, a_{n-1} > 0, a_{n-3} > 0, \dots,$   
 $\det H_2 > 0, \det H_4 > 0, \dots. \quad \square$

### 6.5. Criteriul Routh

Și teorema 8 implică, pentru  $n \geq 4$ , calculul unor determinanți de ordin ridicat.

Pentru a se ajunge la un rezultat echivalent cu teoremele 7 sau 8, dar mai ușor de utilizat în aplicații, se face observația că pentru  $n = 3$  are loc egalitatea:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/a_1 & -a_1/(a_1 - a_1 a_2) \\ 0 & 1 & -a_1^2/(a_3 - a_1 a_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ r_{12} & r_{21} & 0 \\ r_{13} & r_{22} & r_{31} \end{bmatrix},$$

în care  $r_{11} = \det H_1, r_{21} = \det H_2 / \det H_1, r_{31} = \det H_3 / \det H_2$ . Se poate afirma că  $\det H_i > 0; i = \overline{1,3}$ , dacă și numai dacă  $r_{i1} > 0, i = \overline{1,3}$ .

Acest rezultat se generalizează sub forma:

$$H_n S = R,$$

în care  $S$  și  $R$  sunt matrice triunghiulare respectiv superior și inferior. Elementele diagonale ale matricei  $R$  au expresiile:

$$r_{11} = \det H_1, r_{i1} = \det H_i / \det H_{i-1}, i = \overline{2, n},$$

care pot fi calculate mult mai simplu utilizând *schema Routh* asociată polinomului  $D(s)$ :

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 s^n & r_{01} & r_{02} & r_{03} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 s^{n-1} & r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 s^{n-2} & r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 s^{n-i+2} & r_{i-21} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-2j} & r_{i-2j+1} & \cdots \\
 s^{n-i+1} & r_{i-11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{i-1j} & r_{i-1j+1} & \cdots \\
 s^{n-i} & r_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & r_{ij} & r_{ij+1} & \cdots \\
 \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 s^0 & r_{n1} & & & & & & & 
 \end{array} \quad (6.15)$$

în care

$$\begin{aligned}
 r_{01} &= 1, r_{02} = a_2, r_{03} = a_4, \dots, \dots, \\
 r_{11} &= a_1, r_{12} = a_3, r_{13} = a_5, \dots, \dots, \dots; \\
 r_{ij} &= -\frac{1}{r_{i-11}} \begin{vmatrix} r_{i-21} & r_{i-2j+1} \\ r_{i-11} & r_{i-1j+1} \end{vmatrix}, i = \overline{2, n}, j = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

### Teorema 9 (Routh)

O condiție necesară și suficientă ca  $D(s)$  să fie hurwitzian este ca toate elementele primei coloane din schema Routh să fie strict pozitive.  $\square$

#### Exemplul 6.5 (utilizarea schemei Routh)

Se consideră polinomul:  $D(s) = s^4 + 2s^3 + 9s^2 + s + 4$ . Se cere să se afle dacă  $D(s)$  este sau nu hurwitzian. Schema Routh asociată polinomului  $D(s)$  are forma:

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^4 & 1 & & 9 & 4 \\
 s^3 & 2 & & 1 & 0 \\
 s^2 & -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{17}{2} & & -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 & \\
 s^1 & -\frac{2}{17} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 17/2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{17} & & 0 & \\
 s^0 & -17 \begin{vmatrix} 17/2 & 4 \\ 1/17 & 0 \end{vmatrix} = 4 & & & 
 \end{array}$$

Conform teoremei 9 polinomul este hurwitzian.  $\square$

### 6.6. Stabilitatea relativă

În conformitate cu teorema 3 rezultă că  $h(t)$ , în cazul unui sistem BIBO-stabil, poate fi utilizat pentru aprecierea calităților de BIBO-stabilitate, respectiv pentru aprecierea „apropierii” de situația de BIBO-instabilitate. În domeniul timpului această apreciere se poate face pe baza abaterilor pe care le evidențiază  $h(t)$  față de:





**Exemplul 6.6** (domeniul parametric de rezervă de BIBO-stabilitate dată)

Se consideră polinomul:  $D(s)=s^3+9s^2+26s+24$ , în care coeficienții au valorile nominale. Se cere să se verifice dacă sistemul corespunzător are rezerva de BIBO-stabilitate  $a_{\min} = 1$  în condițiile în care  $a_2 (= 26)$  este incert, deoarece  $a_2 \in [21,31]$ .

Se face schimbarea  $s = z - 1$  și se înlocuiește  $a_2 = 26$  cu  $a_2 = 26 + e$ ,  $e \in [-5, +5]$ . Se obține:  $D(z-1) = (z-1)^3 + 9(z-1)^2 + (26+e)(z-1) + 24 = z^3 + 6z^2 + (11+e)z + 6 - e$ .

Matricea Hurwitz asociată are forma:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 6-e & 11+e & 6 \\ 0 & 0 & 6-e \end{bmatrix},$$

din care rezultă:  $\det H_1 = 6 > 0$ ,  $\det H_2 = 60 + 7e > 0$ ,  $\det H_3 = (6-e)\det H_2 > 0$ . A doua și a treia inegalitate sunt satisfăcute dacă și numai dacă  $e \in (-60/7, +6)$ . Întrucât  $e \in [-5, +5] \subset (-60/7, +6)$  rezultă că rezerva de BIBO-stabilitate  $a_{\min} = 1$  este asigurată oricare ar fi  $a_2 \in [21,31]$ .  $\square$

*Gradul de BIBO-stabilitate* este prin definiție distanța  $a$  dintre axa imaginară a planului complex și polul cel mai apropiat al funcției de transfer  $G(s)$  – fig.II.39. Este de la sine înțeles că încă din faza de proiectare, dar și ulterior, în timpul funcționării sistemului, trebuie să se asigure:

$$a \geq a_{\min}. \quad (6.18)$$

Aceasta în condițiile în care gradul de BIBO-stabilitate  $a$  nu poate fi determinat cu exactitate (datorită anumitor incertitudini în cunoașterea valorilor parametrilor) sau se poate modifica sub influența factorilor de mediu și datorită îmbătrânirii materialelor.

**6.7. Domenii parametrice de BIBO-stabilitate**

Din varii motive (tehnice, economice) este necesar să se cunoască între ce limite se pot modifica parametrii unui sistem fără ca prin aceasta sistemul să-și piardă BIBO-stabilitatea sau să i se reducă rezerva de BIBO-stabilitate. În acest context se are în vedere faptul că pe lângă anumiți parametri care se modifică sub influența factorilor de mediu și datorită îmbătrânirii materialelor, un sistem (automat) are și **parametri ajustabili** (prin elemente din *dispozitivul de automatizare* – în speță din *regulator*). Ei pot fi modificați (de operator) oricând este necesar (de exemplu pentru o anumită calitate a transferului intrare – ieșire).

După cum s-a văzut deja la exemplul 6.4, pentru sistemele de ordin  $n \leq 3$ , cu doi parametri ajustabili, determinarea domeniului parametric de BIBO-stabilitate se poate face utilizând criteriile Hurwitz sau Routh.

În cazul sistemelor de ordin ridicat ( $n \geq 4$ ) se pune problema rezolvării unui sistem de  $n$  inecuații neliniare (de exemplu obținute din (6.13)), ceea ce adesea, în condiții concrete este o problemă dificilă.

O posibilitate de simplificare a procedurii de determinare a domeniului parametric de BIBO-stabilitate constă în a determina mai întâi acele valori ale parametrilor pentru care polinomul  $D(s)$ , inițial hurwitzian, devine nehurwitzian ca urmare a variației parametrilor săi. Întrucât zerourile lui  $D(s)$  depind continuu de coeficienții săi (conform formulelor lui Viète – (6.17)), rezultă că  $D(s)$  devine nehurwitzian atunci când unele din zerourile sale se

deplasează din semiplanul complex stâng spre cel drept și cel puțin unul dintre ele atinge axa imaginară.

Se poate demonstra că  $D(s)$  devine nehurwitzian (în sensul precizat în aliniatul precedent) exact atunci când:

$$a_n = 0, \det H_{n-1} = 0. \quad (6.19)$$

Într-adevăr,  $a_n = 0$  dacă și numai dacă  $s = 0$  este un zero al lui  $D(s)$ . De asemenea, utilizând formula lui Orlando:

$$\det H_{n-1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (p_i + p_j),$$

rezultă că  $\det H_{n-1} = 0$ , în condițiile precizate, este echivalentă cu existența unei perechi  $p_m, p_n$ , cu  $\operatorname{Re} p_m = \operatorname{Re} p_n = 0$ .

Este evident că ecuațiile (6.19) reprezintă frontiera dintre domeniile de BIBO-stabilitate și de BIBO-instabilitate în spațiul parametrilor sistemului. Pentru a determina efectiv natura fiecărui domeniu se consideră un punct situat într-unul din ele, căruia îi corespund valori bine precizate ale parametrilor sistemului. Cu acestea se particularizează coeficienții lui  $D(s)$  după care se aplică criteriile Hurwitz sau Routh. În funcție de rezultatul obținut se trage o concluzie privind natura întregului domeniu căruia îi aparține punctul considerat.

Făcând schimbarea de variabilă  $s = z - a_{\min}$  se pot utiliza ecuațiile (6.19) și pentru polinomul  $D(z - a_{\min})$ . În acest caz se poate determina în spațiul parametrilor sistemului domeniul de rezervă de BIBO-stabilitate  $a_{\min}$ .

#### Exemplul 6.7 (domeniul parametric de BIBO-stabilitate)

Se consideră polinomul:  $D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + as + b$ . Se cere să se determine în planul  $(a, b)$  domeniul de BIBO-stabilitate.

Se calculează mai întâi:

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & b & a \end{vmatrix} = a - b - a^2.$$

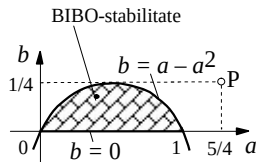


Fig.II.40. Domeniul parametric de BIBO-stabilitate la exemplul 6.7

Ecuațiile (6.19) ale frontierei domeniului de BIBO-stabilitate sunt:  $b = 0$ ,  $b = a - a^2$ . Graficele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.II.40. Având în vedere că  $a > 0$  și  $b > 0$  (conform teoremei 5)

rezultă că domeniul căutat este situat în primul cadran al planului  $(a, b)$ . Considerând punctul P (fig.II.40) de coordonate  $a = 5/4$ ,  $b = 1/4$ , se obține:

$$D(s) = s^4 + s^3 + s^2 + (5/4)s + 1/4.$$

În schema Routh asociată lui  $D(s)$  rezultă  $r_{21} = -1/4$ , adică punctul P se află în domeniul de BIBO-instabilitate. În consecință domeniul de BIBO-stabilitate este cel indicat în fig.II.40. □

## 7. Corelația dintre calitatea răspunsului indicial și configurația poli – zerouri

### 7.1. Indici de calitate ai răspunsului indicial

În funcție de localizarea polilor, sistemele dinamice liniare invariante în timp se împart în următoarele două categorii:

- a<sub>1</sub>) sisteme BIBO-stabile ale căror poli sunt toți situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ ;
- a<sub>2</sub>) sisteme BIBO-instabile, care au cel puțin câte un pol situat în  $\{\text{Re } s \geq 0\}$ .

În funcție de localizarea zerourilor, sistemele dinamice liniare, invariante în timp, BIBO-stabile se împart în următoarele două grupe:

- a<sub>11</sub>) sisteme BIBO-stabile ale căror zerouri sunt toate situate în  $\{\text{Re } s < 0\}$ ;
- a<sub>12</sub>) sisteme BIBO-stabile care au cel puțin câte un zero situat în  $\{\text{Re } s \geq 0\}$ .

Sistemele din grupa a<sub>11</sub> se mai numesc și *sisteme de defazaj minim* iar cele din grupa a<sub>12</sub> – *sisteme de defazaj neminim*. Caracterizarea acestor tipuri de sisteme va face obiectul paragrafului VI.3.3.

Marea majoritate a sistemelor dinamice liniare invariante în timp întâlnite în aplicațiile uzuale fac parte din grupa a<sub>11</sub>. Răspunsul indicial al acestor sisteme poate fi:

- oscilatoriu amortizat – fig.II.41;
- aperiodic – fig.II.42.

În cazul răspunsului indicial oscilatoriu amortizat pentru aprecierea calităților sale se utilizează următorii indici de calitate (fig.II.41):

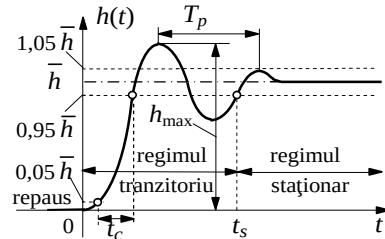


Fig.II.41. Răspunsul indicial de tip oscilatoriu amortizat; indicii de calitate  $s$ ,  $t_s$ ,  $t_c$

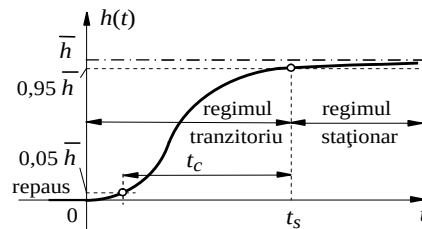


Fig.II.42. Răspunsul indicial de tip aperiodic; indicii de calitate  $t_s$  și  $t_c$

- **Suprareglarea:**

$$s = (h_{\max} - \bar{h}) / \bar{h}, \quad s \% = s \cdot 100. \quad (7.1)$$

- **Durata regimului tranzitoriu,  $t_s$ ,** care este durata până când  $h(t)$  intră definitiv într-o bandă centrată pe  $\bar{h}$  (bandă aleasă în mod convențional), de exemplu o bandă de  $\pm 5\% \bar{h}$  centrată pe  $\bar{h}$ ; cu alte cuvinte are loc:

$$0,95 \bar{h} \leq h(t) \leq 1,05 \bar{h}, t \geq t_s. \quad (7.2)$$

În acest fel regimul tranzitoriu are o durată finită (fapt cu consecințe practice remarcabile, deoarece teoretic durata regimului tranzitoriu este infinită), iar pentru  $t \geq t_s$  se consideră că sistemul a intrat în regimul staționar.

- *Durata de creștere*,  $t_c$ , care este durata în care  $h(t)$  crește de la  $0,05\bar{h}$  la  $0,95\bar{h}$  (sau de la  $0,1\bar{h}$  la  $0,9\bar{h}$ ); în acest context  $1/t_c$  este un indicator al *rapidității* răspunsului indicial.

În cazul răspunsului indicial aperiodic (fig.II.42) se utilizează (din motive evidente) numai indicii de calitate  $t_s$  și  $t_c$ .

Se consideră că răspunsul indicial este de bună calitate pentru  $s \% \leq 20\%$  și  $t_s$ ,  $t_c$  să aibă valorile minime posibile (având în vedere că regimul tranzitoriu este inevitabil). După cum se va vedea la 7.5 valorile acestor indici de calitate sunt corelate cu localizarea polilor sistemului în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

## 7.2. Elemente de transfer tipice

Analiza sistemelor dinamice liniare invariante în timp, oricât de complicate (inclusiv ca funcții de transfer) se bazează pe faptul că ele pot fi discretizate structural, corespunzător conexiunilor «serie» și «paralel» (respectiv conform operațiilor algebrice de multiplicare și de sumare a fracțiilor raționale, într-un număr finit de elemente de transfer simple numite și *elemente de transfer tipice*. Acestea sunt:

- elementul *proporțional* (P)
- elementul de *întârziere de ordinul 1* (T1)
- elementul de *întârziere de ordinul 2* (T2)
- elementul *integrator* (I)
- elementul *derivator* (D)

Deși nu are o funcție de transfer de tip fracție rațională, la acestea se adaugă și

- elementul cu  *timp mort* (TM) sau cu timp de întârziere.

În continuare se prezintă o analiză a proprietăților dinamice ale acestor șase elemente de transfer tipice pe baza răspunsului indicial

**a) Elementul proporțional (P)** are funcția de transfer:

$$G_P(s) = K, \quad (7.3)$$

în care  $K$  este *factorul de amplificare* (a cărei dimensiune este raportul unităților de măsură ale lui  $y$  și  $u$ ). Răspunsul indicial al acestui element este funcția treaptă de amplitudine  $K$ .

În cazul sistemelor dinamice reale, se ajunge la funcții de transfer de forma (7.3) prin idealizări și/sau simplificări pe parcursul elaborării modelului matematic (exemplul 1.4).

**b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)** are funcția de transfer:

$$G_{T1}(s) = 1/(Ts + 1),$$

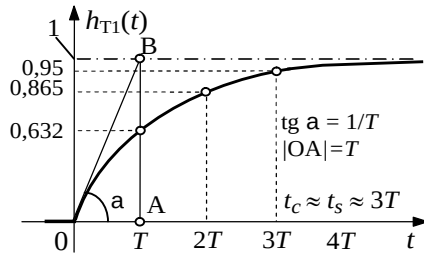


Fig.II.43. Răspunsul indicial al elementului (T1) și semnificația constantei de timp  $T$

în care  $T > 0$  este *constanta de timp* (exprimată în secunde). Sistemul are polul  $p_1 = -1/T$  și răspunsul indicial are forma:

$$h_{T1}(t) = (1 - e^{-t/T}) s(t),$$

care este reprezentat grafic în fig.II.43.

Se constată că  $\dot{h}_{T1}(0) = 1/T$ , ceea ce înseamnă că, în triunghiul OAB:

$$\text{tg } a = \dot{h}_{T1}(0) = 1/T.$$

Ca urmare lungimea subtangentei OA la graficul lui  $h_{T1}(t)$  este  $|OA| = T$ . Acest fapt, pe de o parte, prilejuiește o interpretare fizică a constantei de timp  $T$  și, pe de altă parte,

evidențiază o modalitate de determinare, pe baza unei înregistrări experimentale a lui  $h_{T1}(t)$ , a constantei de timp  $T$ . În acest caz se poate face uz de  $h_{T1}(T) = 1 - e^{-1} \cong 0,631$ , adică  $T$  este durata după care  $h_{T1}(t)$  crește de la 0 la 63,1% din valoarea sa finală (de regim staționar).

Se remarcă faptul că pentru  $t = 3T$  se obține  $h_{T1}(3T) = 1 - e^{-3} \cong 0,95$ , ceea ce înseamnă că durata regimului tranzitoriu este  $t_s \cong 3T$ ; se poate aprecia de asemenea că  $t_c \cong t_s$ .

### Exemplul 7.1 (termometrul cu mercur)

Se consideră un termometru format dintr-un tub capilar din sticlă, umplut parțial cu mercur și vidat, având temperatura  $q_m(t) = q_0$ . La  $t = 0$  termometrul este introdus într-un lichid având temperatura  $q_i$ . Se cere să se determine funcția de transfer între variațiile de temperatură:  $Dq_i = q_i - q_0$  (la intrare) și  $Dq_m = q_m - q_0$  (la ieșire).

Într-o primă aproximație se face abstracție de capacitatea termică a tubului capilar (din sticlă). Conform tabelor II.1 și II.2 se pot scrie ecuațiile:

$$q_m = \frac{1}{R_m}(Dq_i - Dq_m), \quad q_m = C_m \frac{dDq_m}{dt},$$

în care  $R_m$  și  $C_m$  sunt rezistența termică și capacitatea termică ale mercurului și  $q_m$  este fluxul termic în mercur.

Din relațiile de mai sus rezultă ecuația diferențială:

$$T_m \frac{dDq_m}{dt} + Dq_m = Dq_i,$$

în care  $T_m = R_m C_m$  este constanta de timp. Funcția de transfer a termometrului este (7.4). ■

**c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2) are funcția de transfer:**

$$G_{T2}(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2}, \quad (7.6)$$

în care  $w_n > 0$  este *pulsajia naturală* (exprimată în radiani/secundă) și  $z \geq 0$  este *factorul de amortizare* (adimensional). Sistemul are doi poli care pot fi de următoarele două categorii:

- complex conjugați:

$$p_{1,2} = w_n \left( -z \pm j\sqrt{1-z^2} \right), \quad 0 \leq z < 1; \quad (7.7)$$

- reali:

$$p_{1,2} = w_n \left( -z \pm \sqrt{z^2 - 1} \right), \quad z \geq 1. \quad (7.8)$$

În cazul (7.8) elementul T2 este echivalent cu două elemente T1 înseriate, motiv pentru care în locul funcției de transfer (7.6) se poate utiliza și:

$$G_{T2}(s) = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}, \quad (7.9)$$

în care:

$$T_{1,2} = 1/w_n [z \pm \sqrt{z^2 - 1}], \quad z \geq 1, \quad (7.10)$$

sunt cele două constante de timp.

Răspunsul indicial al elementului T2 are forma:

$$h_{T2}(t) = \begin{cases} \left[ 1 - \frac{e^{-z w_n t}}{\sqrt{1-z^2}} \sin \left( w_n \sqrt{1-z^2} t + \arctg \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right) \right] s(t); & 0 \leq z < 1 \\ 1 - (1 + w_n t) e^{-w_n t} s(t); & z = 1 \\ \left[ 1 - \frac{e^{-z w_n t}}{\sqrt{z^2-1}} \operatorname{sh} \left( w_n \sqrt{z^2-1} t + \operatorname{argth} \frac{\sqrt{z^2-1}}{z} \right) \right] s(t); & z > 1. \end{cases} \quad (7.11)$$

Graficul acestei funcții este reprezentat în fig.II.44.

Pentru  $\zeta = 0$  răspunsul indicial al elementului T2 este neamortizat, de forma:

$$h_{T2}(t) = \left[ 1 - \sin \left( w_n t + \frac{p}{2} \right) \right] s(t), \quad (7.12)$$

în care pulsația oscilației sinusoidale este chiar pulsația naturală  $w_n$ .

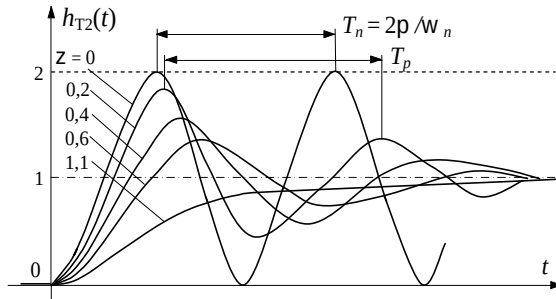


Fig.II.44. Răspunsul indicial al elementului T2 pentru diferite valori ale factorului de amortizare  $z$

Spre deosebire de această situație, pentru  $0 < \zeta < 1$  pulsația oscilației sinusoidale amortizate este:

$$w_p = w_n \sqrt{1-z^2} < w_n \quad (7.13)$$

și se numește *pulsația proprie*. Pe baza acesteia se poate determina *perioada proprie* (exprimată în secunde) a oscilației sinusoidale amortizate:

$$T_p = 2p / w_p. \quad (7.14)$$

**c1)** Pentru  $0 \leq \zeta < 1$  extremele succesive ale funcției  $h_{T2}(t)$  se obțin pentru:

$$t_{k\text{ext}} = kT_p / 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.15)$$

și ele au valorile:

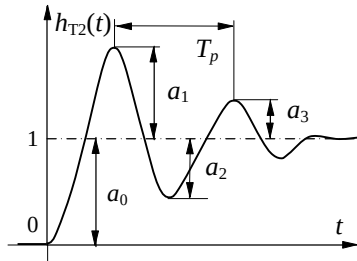


Fig.II.45. Amplitudinile  $a_k, k=0, 1, 2, \dots$ , pentru calculul decrementului logaritm (7.19) și al factorului de amortizare (7.21); perioada proprie  $T_p$  pentru calculul pulsației naturale (7.22)

Prin comparație cu regimul staționar:

$$\bar{h}_{T2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} h_{T2}(t) = 1, \quad (7.17)$$

rezultă că oscilația sinusoidală amortizată, pentru momentele (7.15), se caracterizează prin amplitudinile:

$$a_k = |h_{T2\text{ext}} - \bar{h}_{T2}| = e^{-kpz / \sqrt{1-z^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.18)$$

Pentru a evalua descreșterea acestor amplitudini cu creșterea lui  $k$  se utilizează *decrementul logaritm*:

$$l = \ln(a_k / a_{k+1}). \quad (7.19)$$

Înlocuind (7.18) în (7.19) se obține:

$$l = pz / \sqrt{1 - z^2}, \quad 0 \leq z < 1, \quad (7.20)$$

care este independent de  $k$  și care simultan evidențiază dependența procesului de amortizare a oscilațiilor exclusiv de factorul de amortizare  $z$ .

În cazul înregistrării experimentale a răspunsului indical  $h_{T2}(t)$  de tip oscilație sinusoidală amortizată, relația (7.20) poate fi utilizată pentru determinarea factorului de amortizare  $z$ . După măsurarea a două amplitudini succesive  $a_k$  și  $a_{k+1}$  (fig.II.45) se poate utiliza (7.19) pentru calculul lui  $l$ . Apoi, conform relației (7.20), se poate determina factorul de amortizare:

$$z = l / \sqrt{p^2 + l^2}, \quad l \geq 0. \quad (7.21)$$

De asemenea, pentru determinarea pulsației naturale  $w_n$  se măsoară mai întâi perioada proprie  $T_p$  (fig.II.45). Eliminând  $w_p$  și  $z$  între (7.13), (7.14) și (7.21) se obține:

$$w_n = 2\sqrt{p^2 + l^2} / T_p, \quad (7.22)$$

cu ajutorul căreia se poate determina pulsația naturală  $w_n$ .

**c2)** În cazul  $z \geq 1$  răspunsul indical este *aperiodic*. Corespunzător funcției de transfer (7.9), cu (7.10), expresia acestuia este:

$$h_{T2}(t) = \begin{cases} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{T} \right) e^{-\frac{t}{T}} \right] s(t); & T_1 = T_2 = T, (z = 1) \\ \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right] s(t); & T_1 > T_2 > 0, (z > 1). \end{cases} \quad (7.23)$$

Pentru  $T_1 \neq T_2$  ( $z > 1$ ), funcția  $h_{T2}(t)$  are un punct de inflexiune pentru:

$$t_i = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2}, \quad h_{T2i} = 1 - \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}} \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right)^{\frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2}}. \quad (7.24)$$

Panta tangentei în punctul de inflexiune este:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \left( \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \right)^{\frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2}} = \frac{1 - h_{T2i}}{T_1 + T_2}.$$

Întrucât în triunghiul ABC (fig.II.46) are loc  $|BC| = 1 - h_{T2i}$ , rezultă că:

$$t = |AB| = T_1 + T_2, \quad T_1 > T_2 > 0. \quad (7.25)$$

Pe de altă parte, pentru  $T_1 = T_2 = T$  ( $z = 1$ ), răspunsul indical  $h_{T2}(t)$  este *aperiodic critic*.

Punctul de inflexiune este definit de:  $t_i = T$ ,  $h_{T2} = 1 - 2/e$ . De asemenea, se poate arăta că (7.26) rămâne valabilă, adică  $t = |AB| = 2T$ , ceea ce înseamnă că situația în care răspunsul

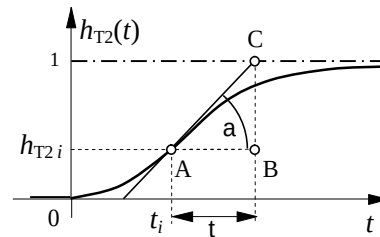


Fig.II.46. Abscisa punctului de inflexiune  $t_i$  și durata  $t$  pentru determinarea constantelor de timp  $T_1, T_2$  ca soluții ale sistemului (7.27)

indicial este aperiodic critic, acesta se caracterizează și prin:

$$t = 2t_i = 2T, \quad T_1 = T_2 = T. \quad (7.26)$$

În cazul înregistrării experimentale a lui  $h_{T_2}(t)$  de tip aperiodic, relațiile (7.24), (7.25) (în situația  $T_1 \neq T_2$ ) și respectiv (7.26) (în situația  $T_1 = T_2 = T$ ) pot fi utilizate pentru determinarea constantelor de timp  $T_1, T_2$ . După măsurarea duratelor  $t_i$  și  $t$  se pot determina  $T_1 \neq T_2$  ca soluții ale sistemului de ecuații neliniare:

$$\begin{cases} \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} = t_i \\ T_1 + T_2 = t \end{cases} \quad (7.27)$$

respectiv  $T_1 = T_2 = T$  din

$$T = t_i = t / 2. \quad (7.28)$$

**c3)** Pentru evaluarea indicilor de calitate definiți la 7.1, ca funcții de  $w_n$  și  $z$ , se utilizează expresia (7.11) a răspunsului indicial  $h_{T_2}(t)$ .

În conformitate cu (7.1), (7.11) – pentru  $0 \leq z < 1$ , (7.16) – pentru  $k = 1$  și (7.17) **suprareglarea** are următoarea expresie:

$$s = e^{-pz / \sqrt{1-z^2}}, \quad 0 \leq z < 1, \quad (7.29)$$

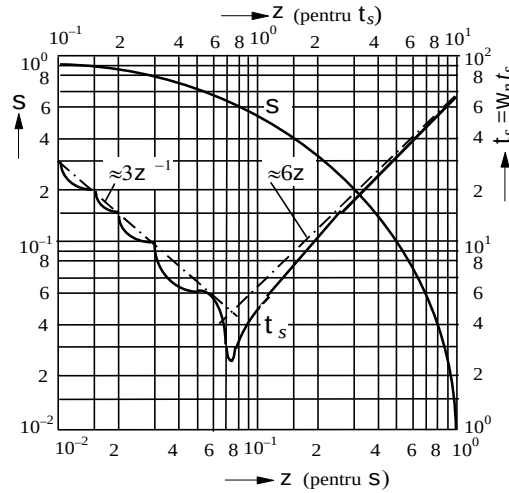


Fig.II.47. Dependenta supraglării  $S$  și a duratei adimensionale a regimului tranzitoriu  $t_s$  de factorul de amortizare  $z$

Se remarcă desigur existența unui minim al lui  $t_s$  pentru  $z = 0,707$ . De asemenea se constată posibilitatea utilizării aproximărilor:

$$t_s \cong 3/z, \quad 0 < z \leq 0,707, \quad (7.31)$$

$$t_s \cong 6z, \quad z > 0,707. \quad (7.32)$$

care evidențiază dependența supraglării  $S$  exclusiv de factorul de amortizare  $z$ . Graficul funcției (7.29) este reprezentat în fig.II.47.

Pentru determinarea duratei regimului tranzitoriu,  $t_s$ , se utilizează (7.2). Pentru simplificarea soluționării numerice a sistemului (7.2), (7.11) se introduce în (7.11) timpul adimensional

$$t = w_n t_s.$$

Soluția sistemului (7.2), (7.11) este **durata adimensională a regimului tranzitoriu**:

$$t_s = w_n t_s, \quad (7.30)$$

care depinde exclusiv de factorul de amortizare  $z$ . Dependența lui  $t_s$  de  $z$  este reprezentată în fig.II.47. Se



În ceea ce privește durata de creștere,  $t_c$ , (în situația creșterii lui  $h_{T2}(t)$  de la  $0,1\bar{h}_{T2}$  la  $0,9\bar{h}_{T2}$ ) în cazul funcției (7.11), prin soluționarea numerică se obține:

$$t_c \cong 1,8/w_n, 0,3 \leq z \leq 0,8. \quad (7.33)$$

Relația (7.33) este remarcabilă prin simplitate, dar mai ales prin ceea ce exprimă și anume că *rapiditatea răspunsului indicial* (adică  $1/t_c$ ) este *direct proporțională cu pulsația naturală*  $w_n$ . Cu alte cuvinte, pulsația naturală  $w_n$  este un indicator al rapidității răspunsului indicial.

**Exemplul 7.2** (sistemul «rezistență – inductanță – capacitate»; continuare)

Se consideră sistemul din fig.II.2 (exemplul 1.2). Se cere să se arate că acesta este de tipul PT2. S-a arătat la exemplul 1.2 că sistemul este descris de ecuația diferențială:

$$C\ddot{y} + \frac{1}{R}\dot{y} + \frac{1}{L}y = u. \text{ Rezultă } G(s) = \frac{1/C}{s^2 + s/RC + 1/LC}.$$

Comparând această funcție cu (76) rezultă că ea este de tipul PT2, adică, adică:

$$G(s) = \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2}, \text{ în care: } w_n = 1/\sqrt{LC}, z = \sqrt{L/C}/2R, K = L.$$

Se remarcă faptul că  $w_n$ , conform formulei lui Thompson, este pulsația naturală a oscilatorului  $L, C$  ideal (fără rezistență  $R$ , adică pentru  $R = +\infty$ , respectiv  $z = 0$ ). □

**Exemplul 7.3** (termometrul cu mercur; continuare)

Se consideră termometrul de la exemplul 7.1. Se cere să se determine funcția de transfer între variațiile de temperatură  $Dq_i$  (intrare) și  $Dq_m$  (ieșire) în condițiile în care nu se neglijează rezistența termică  $R_s$  și capacitatea termică  $C_s$  ale tubului capilar (din sticlă).

În aceste circumstanțe trebuie avută în vedere și variația de temperatură  $Dq_s = q_s - q_0$  a tubului capilar.

Conform tabelor II.1 și II.2 se pot scrie ecuațiile:

- fluxul termic rezultat pentru tubul capilar:

$$q_s = q_{s1} - q_{s2} = \frac{1}{R_s}(Dq_i - Dq_s) - \frac{1}{R_m}(Dq_s - Dq_m), \quad q_s = C_s \frac{dDq_s}{dt};$$

- fluxul termic în mercur:

$$q_m = q_{s2} = \frac{1}{R_m}(Dq_s - Dq_m), \quad q_m = C_m \frac{dDq_m}{dt}.$$

Din primele două și din ultimele două ecuații rezultă respectiv ecuațiile:

$$C_s \frac{dDq_s}{dt} + \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_m} \right) Dq_s - \frac{1}{R_m} Dq_m = \frac{1}{R_s} Dq_i, \quad C_m \frac{dDq_m}{dt} + \frac{1}{R_m} Dq_m = \frac{1}{R_m} Dq_s.$$

Eliminând  $Dq_s$  între aceste ecuații se obține:

$$T_s T_m \frac{d^2 Dq_m}{dt^2} + (T_s + T_m + T_{sm}) \frac{dDq_m}{dt} + Dq_m = Dq_i, \quad T_s = R_s C_s, T_m = R_m C_m, T_{sm} = R_s C_m.$$

Funcția de transfer a termometrului are forma (7.9), în care:

$$T_{1,2} = \frac{1}{2} \left( T_s + T_m + T_{sm} \pm \sqrt{(T_s - T_m)^2 + T_{sm}(T_{sm} + 2T_s + 2T_m)} \right). \quad \square$$

**d) Elementul integrator (I)** are funcția de transfer:

$$G_I(s) = 1 / T_I s, \quad (7.34)$$

în care  $T_I > 0$  este *timpul de integrare*.

Elementul I are un pol în  $s = 0$ , adică este BIBO-instabil. Răspunsul indicial are expresia:

$$h_I(t) = t s(t) / T_I \quad (7.35)$$

și este reprezentat în fig.II.48. Se constată că  $h_I(T_I)=1$ , ceea ce înseamnă că  $T_I$  este durata după care  $h_I(t)$  crește de la 0 la 1, respectiv mărimea de ieșire ajunge să egaleze mărimea de intrare.

Relația intrare – ieșire în domeniul timpului are forma:

$$y(t) = \frac{1}{T_I} \int_0^t u(t) dt. \quad (7.36)$$

Se știe că operația de integrare (definită) este o operație *globală* (care se extinde pe un interval). În acest context  $u(t)=0$ ,

Fig.II.49. (a)  $u(t) = 0$  pentru  $t \geq t_1$  implică (b)  $y(t)=\text{const.}=c$  (nu în mod necesar  $c = 0$ ) pentru  $t \geq t_1$

$t \in [t_1, t_2] \subset [0, t]$  nu implică (în mod necesar)  $y(q)=0$ ,  $q \in [t_1, t_2]$ . De exemplu, pentru:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < t_1, \text{ (fig.II.49.a), din (7.36) rezultă: } y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/T_I, & 0 \leq t < t_1, \text{ (fig.II.49.b).} \\ t_1/T_I, & t \geq t_1 \end{cases} \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases}$$

Din graficul din fig.II.49.b rezultă în mod clar că deși  $u(t) = 0$  pentru  $t \geq t_1$ ,  $y(t) = t_1/T_I \neq 0$  pentru  $t \geq t_1$ .

Această comportare (foarte utilă în cazul sistemelor automate, după cum se va vedea la III.5.2) transpare și din forma derivată a relației (7.36):  $\dot{y}(t) = u(t)/T_I$ , din care rezultă că viteza mărimii de ieșire este proporțională cu mărimea de intrare. Anularea acesteia implică anularea vitezei mărimii de ieșire, dar nu (în mod necesar) și anularea mărimii de ieșire.

#### Exemplul 7.4 (servomotorul electric)

Utilizând rezultatele de la exemplele 2.1 și 2.3 se cere să se determine funcția de transfer a unui servomotor electric de curent continuu.

Un servomotor de curent continuu este un motor electric de construcție specială, de regulă de putere relativ mică, utilizat pentru poziționarea în spațiu, prin intermediul unui angrenaj cu roți dințate (reductor de viteză), a unor elemente mecanice, componente ale unei instalații tehnologice (inclusiv în cadrul unui sistem automat). În aceste condiții mărimea de ieșire a servomotorului (inclusiv angrenajul cu roți dințate) este unghiul  $y$  al axului de ieșire al angrenajului. Relația dintre viteza unghiulară  $w$  a axului servomotorului

și unghiul  $y$  este:  $y(t) = k \int_0^t w(t) dt$ , careia în domeniul funcțiilor imagine (Laplace) îi corespunde:  $Y(s) = kW(s)/s$ , și în care  $k$  este raportul de transmisie al angrenajului cu roți dințate.

Conform cu fig.II.20 (exemplul 2.3), în care se consideră  $M(s)=0$ , funcția de transfer a servomotorului (cu angrenajul cu roți dințate) este:

$$G_{sm}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s} \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}.$$

În această formă servomotorul (cu angrenajul cu roți dințate) este un element de transfer de tipul PIT2. Ținând însă seama de faptul că prin construcție se poate asigura  $L \approx 0$  și eventual și  $J \approx 0$ , rezultă că servomotorul (cu angrenajul cu roți dințate) poate fi descris cu aproximație prin următoarele funcții de transfer:

$$(a) L \approx 0 \rightarrow G_{sm}(s) \approx \frac{1}{T_1 s} \frac{1}{T_1 s + 1}; T_1 = \frac{k_1 k_2 + R k_3}{k_2 k}, T_1 = \frac{RJ}{k_2 k T_1}; (b) L, J \approx 0 \rightarrow G_{sm}(s) \approx \frac{1}{T_1 s}.$$

Rezultă că principalul element al servomotorului este integratorul. De fapt, toate tipurile de servomotoare (electrice, fluidice) sunt descriabile prin  $G_{sm}(s)$  de forma (a) sau (b).

Trebuie remarcat faptul că experimentul prezentat în cadrul fig.II.49 este ușor de efectuat și în același timp este foarte concludent. Pentru  $t \in [0, t_1]$  se va observa o creștere aproximativ liniară a unghiului  $y(t)$ , după care, pentru  $t \in [t_1, +\infty)$ ,  $y(t) = y(t_1) = \text{const.} \neq 0$  (deoarece pentru  $u(t) = 0$ ,  $t \in [t_1, +\infty)$ , axul servomotorului nu se mai rotește). □

**e) Elementul derivator (D) are funcția de transfer:**

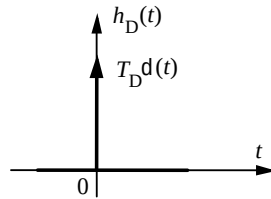


Fig.II.50. Răspunsul indical al elementului D

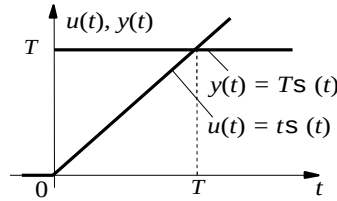


Fig.II.51. Răspunsul elementului D la mărirea de intrare de tip rampă unitară și semnificația timpului de derivare  $T_D$

$$G_D(s) = T_D s, \quad (7.37)$$

în care  $T_D > 0$  este *timpul de derivare*. Elementul D are un zero de transmisie în  $s=0$ . Răspunsul indical are expresia:

$$h_D(t) = T_D d(t) \quad (7.38)$$

și este reprezentat în fig.II.50.

Relația temporală intrare – ieșire a este:

$$y(t) = T_D \dot{u}(t), \quad (7.39)$$

ceea ce înseamnă că mărirea de ieșire este proporțională cu viteza mărimii de intrare.

Pentru  $u(t) = \text{const.}$ , oricare ar fi această constantă, rezultă  $y(t) = 0$ . În aceste condiții transferul intrare – ieșire este blocat (cf. 5.3). Elementul D este insensibil la aplicarea unei

mărimi de intrare constante (de exemplu generată de un alt element sau sistem aflat în regim staționar). Transferul intrare – ieșire este neblocat numai pentru  $\dot{u}(t) \neq 0$ .

Pentru a formula o interpretare a constantei  $T_D$  se consideră mărimea de intrare de tip rampă unitară (de viteză unitară):

$$u(t) = tS(t). \quad (7.40)$$

Înlocuind (7.40) în (7.39) se obține:

$$y(t) = T_D S(t). \quad (7.41)$$

Conform fig.II.51, timpul de derivare  $T_D$  este durata după care mărimea de intrare de tip rampă unitară egalează mărimea de ieșire.

#### Exemplul 7.5 (transformatorul electric)

Se consideră transformatorul electric cu schema din fig.II.52, cu secundarul funcționând în circuit deschis. Se cere să se determine funcția de transfer între tensiunile  $u$  (primară) și  $y$  (secundară). Conform schemei din fig.II.52 se pot scrie ecuațiile:

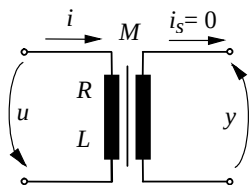


Fig.II.52. Transformatorul electric de la exemplul 7.5;  
 $u$  și  $y$  – tensiunile primară și secundară,  $i$  și  $i_s = 0$  – curenții primar și secundar,  $R$  și  $L$  – rezistența și inductanța primarului,  $M$  – inductanța mutuală

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad y = M \frac{di}{dt}.$$

Trecând la transformate Laplace și eliminând  $I(s)$  între ecuațiile obținute, rezultă:

$$G_T(s) = Y(s)/U(s) = Ms/(Ls + R).$$

În această formă transformatorul electric este un element de transfer de tipul DT1. Dacă prin construcție se realizează o rezistență  $R$  suficient de mare (astfel încât  $L|s| \ll R$ ), atunci transformatorul electric este descris, într-o primă aproximație, de funcția de transfer:  $G_T(s) = T_D s$ , în care  $T_D = M/R$ .

Se trage concluzia că principalul element conținut de transformatorul electric cu secundarul funcționând în circuit deschis (cu rezistența de sarcină infinită) este de tip D. □

**f) Elementul cu timp mort (TM)** (sau cu timp de întârziere) are funcția de transfer:

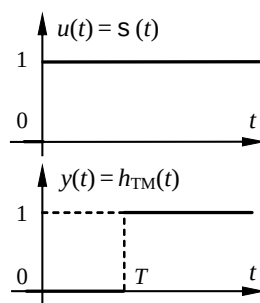


Fig.II.53. Răspunsul indicial al elementului cu timp mort (TM)

$$G(s) = e^{-Ts}, \quad (7.42)$$

în care  $T > 0$  este *timpul mort* sau *timpul de întârziere*.

Transferul temporal intrare – ieșire are forma:

$$y(t) = u(t - T) \quad (7.43)$$

și răspunsul indicial are expresia:

$$h_{TM}(t) = S(t - T), \quad (7.44)$$

al cărui grafic este reprezentat în fig.II.53. Din aceasta rezultă și semnificația timpului de întârziere:  $T$  este durata de propagare prin sistem a mărimii de intrare.

Un exemplu este transportorul cu bandă pentru granule (de exemplu cărbune pentru alimentarea unui cazan de abur) – fig. II.54. Având în vedere numai fenomenele de transport este ușor de constatat că este vorba de un element cu timp mort cu  $T = L/v$ .

Atât din (7.43) cât și din (7.42) rezultă că elementul cu timp de întârziere este liniar și invariant în timp. În același timp el nu face parte din categoria celor descrise de ecuații diferențiale de forma (1.5) sau de funcții de transfer de forma (1.11). Funcția (7.42) este o funcție transcendentă și ea caracterizează sistemele (cu parametri distribuți spațial) în care are loc *transport spațial de substanță, transfer spațial de energie sau transmisie la distanță a semnalelor*.

În unele situații funcția de transfer se aproximează prin dezvoltarea în serie de puteri a exponențialei  $e^{-Ts}$  după cum urmează:

$$G(s) = e^{-Ts} = \frac{e^{-Ts/2}}{e^{Ts/2}} = \frac{1 - Ts/2 + \dots}{1 + Ts/2 + \dots} \cong \frac{2 - Ts}{2 + Ts}. \quad (7.45)$$

Această formulă (sau altele similare) se utilizează pentru simularea (analogică sau numerică) a elementelor cu timp mort (TM).

### 7.3. Obținerea funcției de transfer pe baza răspunsului indical

S-a arătat la 7.2 că în cazul elementelor de transfer T1 și T2 este posibilă determinarea experimentală a tuturor parametrilor funcției de transfer pe baza răspunsului indical.

Astfel, în cazul elementului T1, pe baza lui  $h(t)$  obținut experimental, rezultă  $T = |OA|$  sau  $T \cong t_s / 3$ . (fig.II.43).

În cazul elementului T2, pe baza lui  $h_{T2}(t)$  de forma unei oscilații sinusoidale amortizate, conform fig.II.45, se măsoară  $T_p$  și se calculează  $l$  (cu (7.19)), după care se calculează  $z$  și  $w_n$  (cu (7.21) și (7.22)). Pe baza lui  $h_{T2}(t)$ , de formă aperiodică, ținând seama de fig.II.46, se măsoară  $t_i$  și  $t$  și se calculează  $T_1$  și  $T_2$  ca soluții ale sistemului (7.27) (în cazul critic  $t = 2t_i$  și  $T_1 = T_2 = t_i$ ).

Evident că aceste proceduri se pot aplica cu relativă ușurință atunci când se știe că sistemul real este, după caz, de tipul T1 sau T2.

Obținerea pe cale experimentală a funcției de transfer a unui sistem real pornește de la faptul că și cel mai bun model matematic obținut pe cale teoretică este de fapt o imagine aproximativă a sistemului real. Uneori, cum este cazul navelor aeriene și cosmice, modelul matematic teoretic este de foarte bună calitate. Alteori, cum este cazul proceselor termoeenergetice, metalurgice sau chimice, modelele matematice teoretice sunt foarte aproximative (ca structură), iar parametrii sunt în mare parte necunoscuți.

Iată de ce, în fiecare caz în parte, este important (și prudent) să se verifice modelul matematic teoretic cu cel elaborat pe baza datelor experimentale existente sau care se obțin chiar în acest scop.

Fie un răspuns indical de tip aperiodic (ca în fig.II.42) obținut experimental pentru un sistem real dat. Un astfel de răspuns indical poate fi descris de:

$$h(t) = \bar{h} + Ae^{-at} + Be^{-bt} + Ce^{-ct} + \dots, \quad (7.46)$$

în care  $\bar{h} > 0$ ,  $A \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$ ,  $B \in \mathbf{R}$ ,  $b > 0$ , .... sunt necunoscute și urmează a fi determinate. Întrucât  $\bar{h}$  poate fi determinat direct din înregistrarea lui  $h(t)$ , urmează că într-o primă aproximație se poate scrie:

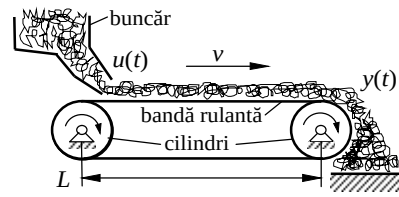


Fig.II.54. Transportorul cu bandă;  $u$  – debitul de intrare,  $y$  – debitul de ieșire;  $L$  – lungimea benzii,  $v$  – viteza de deplasare.

$$\lg[\bar{h} - h(t)] \cong \lg(-A) - 0,4343at, \text{ în cazul } \bar{h} - h(t) > 0 \text{ și } A < 0, \quad (7.47)$$

$$\lg[h(t) - \bar{h}] \cong \lg(A) - 0,4343at, \text{ în cazul } h(t) - \bar{h} > 0 \text{ și } A > 0. \quad (7.48)$$

Ecuția (7.47) (sau (7.48)) este ecuația unei drepte (într-un sistem de axe cu  $t$  în abscisă și  $\lg[\quad]$  în ordonată). Având reprezentat răspunsul indicial în aceleași coordonate, prin trasarea unei drepte aproximante se determină  $A$  și  $a$ . În continuare se face aproximația:

$$\lg[\bar{h} - h(t) + Ae^{-at}] \cong \lg(-B) - 0,4343bt, \text{ în cazul } \bar{h} - h(t) + Ae^{-at} > 0 \text{ și } B < 0, \quad (7.49)$$

$$\lg[h(t) - \bar{h} - Ae^{-at}] \cong \lg B - 0,4343bt, \text{ în cazul } h(t) - \bar{h} - Ae^{-at} > 0 \text{ și } B > 0. \quad (7.50)$$

Ecuția (7.49) (sau (7.50)) este de asemenea ecuația unei drepte. Având reprezentat grafic răspunsului indicial în coordonate  $(t, \lg[\quad])$ , prin trasarea unei drepte aproximante se determină  $B$  și  $b$ . Procedeu se repetă pentru determinarea celorlalți parametri până când eroarea dintre  $h(t)$  și estimatul său  $\hat{h}(t)$  (obținut prin acest procedeu), în valoare absolută, este mai mică sau cel mult egală cu o valoare admisibilă prestabilită.

### Exemplul 7.6

Se consideră răspunsul indicial al unui sistem real conform tabelului:

|        |   |       |       |       |      |       |      |     |       |      |       |          |
|--------|---|-------|-------|-------|------|-------|------|-----|-------|------|-------|----------|
| $t$    | 0 | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4  | 0,5   | 1    | 1,5 | 2     | 3    | 4     | $\infty$ |
| $h(t)$ | 0 | 0,005 | 0,034 | 0,085 | 0,14 | 0,215 | 0,51 | 0,7 | 0,817 | 0,93 | 0,975 | 1        |

Se cere să se determine  $\bar{h}$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $B$  și  $b$  conform relației (7.46).

Evident  $\bar{h} = 1$ . Pentru determinarea perechii  $(A, a)$ , fără a mai face uz de reprezentări grafice, se aleg punctele de coordonate:  $t = 3$  și  $\lg[1 - h(3)] = -1,167$  și respectiv  $t = 4$  și  $\lg[1 - h(4)] = -1,602$  prin care se poate trasa dreapta:

$$\lg[1 - h(t)] + 1,167 = \frac{-1,602 + 1,167}{4 - 3}(t - 3).$$

Comparând această ecuație cu (7.47) rezultă:  $\lg(-A) = -1,167 + (1,602 - 1,167)3 = 0,138$ , adică  $A = -1,37$ ;  $-0,4343a = -1,602 + 1,167 = -0,435$ , adică  $a \cong 1$ .

Pentru determinarea perechii  $(B, b)$  se aleg punctele de coordonate:  $t = 0$  și  $\lg[h(0) - 1 + 1,37] = -0,432$  și respectiv  $t = 0,5$  și  $\lg[h(0,5) - 1 + 1,37e^{-0,5}] = -1,388$  prin care se poate trasa dreapta:

$$\lg[h(t) - \bar{h} - Ae^{-at}] + 0,432 = \frac{-1,388 + 0,432}{0,5}t.$$

Comparând această ecuație cu (7.46) rezultă:  $\lg B = -0,432$ , adică  $B = 0,37$ ;

$$-0,4343b = \frac{-1,388 + 0,432}{0,5} = -1,812, \text{ adică } b = 4,17.$$

Așadar estimatul răspunsului indicial este:  $\hat{h}(t) = 1 - 1,37e^{-t} + 0,37e^{-4,17t}$ , cu  $\hat{h}(0) = 0$ , căruia, în transformate Laplace, îi corespunde:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1,37}{s+1} + \frac{0,37}{s+4,17} = \frac{-0,17s + 4,17}{s(s+1)(s+4,17)}.$$

Estimata funcției de transfer căutate este:

$$\hat{G}(s) = s\hat{H}(s) = \frac{-0,17s + 4,17}{(s+1)(s+4,17)}.$$

Valorile funcției  $\hat{h}(t)$  și ale erorii relative de estimatie,  $e = |[h(t) - \hat{h}(t)]/h(t)|$ ,  $t > 0$ , sunt prezentate în următorul tabel:

|              |   |        |       |       |       |       |       |       |       |       |             |          |
|--------------|---|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|----------|
| $t$          | 0 | 0,1    | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 1     | 1,5   | 2     | 3     | 4           | $\infty$ |
| $\hat{h}(t)$ | 0 | 0,0047 | 0,394 | 0,091 | 0,152 | 0,215 | 0,502 | 0,695 | 0,814 | 0,932 | 0,975       | 1        |
| $e\%$        | – | 11,29  | 15,84 | 7,52  | 8,52  | 0,2   | 1,56  | 0,68  | 0,27  | 0,01  | $\approx 0$ | 0        |

Se observă faptul că eroarea relativă maximă este de 15,84%. Micșorarea acestei erori este posibilă prin considerarea termenului  $Ce^{-ct}$  (și eventual a altora care îi urmează) din (7.46). În acest caz se iau în considerare alte perechi de puncte din tabelul lui  $h(t)$ .  $\square$

Trebuie subliniat faptul că rezultatele care se obțin cu ajutorul acestei metode sunt influențate de erorile inerente care afectează măsurarea valorilor variabilelor  $t$  și  $h(t)$ . Este ușor de verificat, chiar în cazul exemplului 7.6, că valori ușor modificate (conform posibilelor erori de măsurare) ale lui  $h(t)$  conduc la o altă funcție de transfer  $\hat{G}(s)$ .

Tentația de a micșora cât mai mult eroarea relativă de estimatie prin considerarea unui număr mare de termeni în (7.46) nu constituie cea mai bună cale de urmat. Procedând în acest fel (adică utilizând (7.46) cu un număr mare de termeni) crește ordinul funcției de transfer  $\hat{G}(s)$ , situație care nu este de dorit în cazul proiectării sistemelor automate. Dimpotrivă, proiectarea sistemelor automate se face de regulă utilizând, pe cât este posibil și între limite admisibile de erori, funcții de transfer simplificate (a se vedea observația 1.5).

Se constată că problema determinării structurii și parametrilor unui sistem real pe baza datelor experimentale (înregistrări simultane ale mărimilor  $u(t)$  și  $y(t)$ ), chiar în cazul existenței unui model matematic teoretic, este de o importanță deosebită pentru cunoașterea sistemelor reale. În actualul stadiu de dezvoltare a automaticii această problemă face obiectul unei discipline distincte – *identificarea sistemelor dinamice*, în care s-au dezvoltat numeroase metode pentru determinarea structurii și parametrilor sistemelor reale pe baza datelor obținute pe cale experimentală.

#### 7.4. Poli și zerouri dominante

De îndată ce funcția de transfer a unui sistem dinamic este cunoscută, este posibilă determinarea expresiei răspunsului indicial  $h(t)$  și evaluarea indicilor de calitate definiți la 7.1. Întrucât acești indici depind de localizarea în planul complex a polilor și zerourilor funcției de transfer, este natural să se evidențieze pertinent această dependență.

##### Exemplul 7.7 (pol dominant și pol îndepărtat)

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = 60/[(s+2)(s+30)]$ . Se cere să se determine  $h(t)$  și pe această bază să se evalueze importanța relativă a celor doi poli.

Răspunsul indicial are expresia:  $h(t) = (1 - 15e^{-2t}/14 + e^{-30t}/14)s(t)$ .

Exponențiala  $e^{-2t}$  este asociată polului  $p_1 = -2$  și exponențiala  $e^{-30t}$  este asociată polului  $p_2 = -30$ . Evident, pentru  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-30t} \rightarrow 0$  mai repede ca  $e^{-2t} \rightarrow 0$ . Se spune că polul  $p_2 = -30$  este mai rapid ca polul  $p_1 = -2$  sau că polul  $p_1 = -2$  este mai lent ca polul  $p_2 = -30$ . Cu cât un pol este situat mai la stânga axei imaginare a planului complex, cu atât acesta este mai rapid. Se poate spune că polul  $p_1 = -2$  este dominant în comparație cu polul

îndepărat  $p_2 = -30$ , deoarece  $e^{-2t}$  persistă, cu valori semnificative, un timp mai îndelungat, comparativ cu  $e^{-30t}$ . În plus, în cazul de față, coeficientul lui  $e^{-30t}$  este mai mic, în valoare absolută, decât cel al lui  $e^{-2t}$ .

În aceste circumstanțe, pentru  $|s|$  suficient de mic, respectiv pentru  $t$  suficient de mare (în virtutea relației dintre  $s$  și  $t$ , conform teoremei valorii finale – Anexa A.1.2.b.3<sup>o</sup>), este posibilă aproximarea  $|s+30| \approx 30$ . Rezultă că în  $G(s)$  se poate păstra numai polul dominant, adică este posibilă utilizarea funcției de transfer de ordin redus:  $\tilde{G}(s) = 2/(s+2)$  căreia îi corespunde răspunsul indicial:  $\tilde{h}(t) = (1 - e^{-2t})s(t)$ . Firește, se pot evalua erorile  $|G(s) - \tilde{G}(s)|$  și  $|[h(t) - \tilde{h}(t)]/h(t)|$ , pe baza cărora se poate decide privind oportunitatea utilizării lui  $\tilde{G}(s)$  în locul lui  $G(s)$ .  $\square$

Pentru abordarea adecvată a problematicii polilor și zerourilor dominante se consideră un sistem dinamic BIBO-stabil descris de funcția de transfer (similară cu (1.13)):

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad (7.51)$$

în care  $m < n$ , polii  $p_j$  sunt simpli ( $p_j \neq p_k, j \neq k, j, k = \overline{1, n}$ ) cu  $\operatorname{Re} p_j < 0, j = \overline{1, n}$ , și  $z_i \neq p_j, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ , cu  $z_i \neq 0, i = \overline{1, m}$ , (dacă există un  $z_k = 0$ , atunci sistemul conține un element D, care blochează transferul intrare – ieșire în regim staționar; a se vedea 7.2.e).

Răspunsul indicial al sistemului descris de (7.51) are expresia:

$$h(t) = \left( A_0 + \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t} \right) s(t), \quad (7.52)$$

în care:

$$A_0 = \bar{h} = \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = (-1)^{m-n} K \prod_{i=1}^m z_i / \prod_{j=1}^n p_j, \quad (7.53)$$

$$A_k = \left[ (s - p_k) \frac{1}{s} G(s) \right]_{s=p_k} = K \prod_{i=1}^m (p_k - z_i) / p_k \prod_{j=1, j \neq k}^n (p_k - p_j), \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.54)$$

Din (7.53) se obține:

$$K = (-1)^{m-n} \bar{h} \left( \prod_{j=1}^n p_j / \prod_{i=1}^m z_i \right),$$

care înlocuit în (7.54) conduce la:

$$A_k = -\bar{h} \left( \prod_{i=1}^m (1 - p_k / z_i) / \prod_{j=1, j \neq k}^n (1 - p_k / p_j) \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (7.55)$$

Utilizând (7.53) și (7.55), din (7.52) rezultă:

$$h(t) = \bar{h} \left[ 1 - \sum_{k=1}^n \left( \prod_{i=1}^m (1 - p_k / z_i) / \prod_{j=1, j \neq k}^n (1 - p_k / p_j) \right) e^{p_k t} \right] s(t). \quad (7.56)$$

În multe situații, chiar deliberat create (după cum se va vedea la V.5), este posibilă împărțirea polilor  $p_j, j = \overline{1, n}$ , în două mari grupe:

- o grupă a polilor relativ apropiați de originea planului complex, notați generic cu  $p_m$ ;
- o grupă a polilor îndepărtați, notați generic cu  $p_n$ , pentru care:



$$\operatorname{Re} p_n \ll \operatorname{Re} p_m, \quad |p_n| \gg |p_m|.$$

Polii  $p_m$  se numesc *poli dominanți* și polii  $p_n$  se numesc *poli îndepărtați*.

O împărțire și calificări similare sunt posibile și pentru zerourile  $z_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Din expresia (7.56) a lui  $h(t)$  rezultă că influența unui pol îndepărtat ( $p_n$ ) asupra lui  $h(t)$  este de două feluri:

- în  $h(t)$  există exponențiale de forma  $e^{p_n t}$  care tind rapid la 0 pentru  $t$  tinzând la  $+\infty$ , în condițiile în care coeficienții corespunzători,  $A_n$ , pot fi, eventual, mari în modul;
- $p_n$  sunt prezenți în coeficienții  $A_m$  ai exponențialelor  $e^{p_m t}$ ; întrucât:  $|1 - p_m / p_n| \cong 1$  rezultă că polii îndepărtați ( $p_n$ ) au o influență neglijabilă asupra coeficienților  $A_m$ .

În ceea ce privește influența zerourilor  $z_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , din (7.55) rezultă că acestea sunt prezente numai în coeficienții  $A_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Pentru zerourile îndepărtate, notate generic  $z_b$ , pentru care:  $|z_b| \gg |p_m|$ ,  $|z_b| \gg |z_a|$ , ( $z_a$  ca notație generică, reprezintă zerourile dominante) are loc evaluarea:  $|1 - p_m / z_b| \cong 1$ , ceea ce înseamnă că zerourile îndepărtate au un efect neglijabil asupra coeficienților  $A_m$ .

Fie  $n_0$  numărul de zerouri dominante și  $m_0$  numărul de poli dominanți ai lui  $G(s)$ . În aceste circumstanțe răspunsul indicial (7.56) poate fi aproximat prin:

$$\tilde{h}(t) = \bar{h} \left[ 1 - \left( \sum_{m=1}^{m_0} \prod_{i=1}^{n_0} (1 - p_m / z_a) \right) / \prod_{i=1, i \neq m}^{m_0} (1 - p_m / p_{m'}) \right] e^{p_m t} s(t), \quad (7.57)$$

cu condiția ca eroarea de aproximare  $[h(t) - \tilde{h}(t)] / h(t)$  să aibă valori admisibile. Urmează că funcția de transfer bazată exclusiv pe polii și zerourile dominante se determină cu:

$$\tilde{G}(s) = s \mathcal{L} \{ \tilde{h}(t) \}. \quad (7.58)$$

### 7.5. Configurații cu doi poli dominanți; localizarea polilor dominanți

Situațiile în care se pot pune în evidență sau se pot realiza în mod deliberat configurații cu doi poli dominanți sunt foarte frecvente.

În acest caz, după cum se știe de la 7.2.c, se scrie:

$$G(s) \cong \tilde{G}(s) = \frac{K w_n^2}{s^2 + 2z w_n s + w_n^2}, \quad (7.59)$$

în care

$$p_{1,2} = w_n \left( -z \pm j \sqrt{1 - z^2} \right), \quad 0 < z < 1 \quad (7.60)$$

sunt polii dominanți. Se au în vedere numai valori  $z \in (0, 1)$  deoarece, după cum se știe de la 7.2.c,  $t_s$  (durata adimensională a regimului tranzitoriu) are un minimum pentru  $z = 0,707$ .

În mod obișnuit, pentru un sistem dat, se precizează valorile *admisibile*  $s_a$ ,  $t_{sa}$  și  $t_{ca}$  ale indicilor de calitate. Se înțelege că valorile curente ale indicilor de calitate trebuie să satisfacă inegalitățile:

$$s \leq s_a, \quad (7.61)$$

$$t_s \leq t_{sa}, \quad (7.62)$$

$$t_c \leq t_{ca}. \quad (7.63)$$

Firește că satisfacerea inegalităților (7.61) – (7.63) este posibilă numai dacă polii dominanți (7.60) sunt localizați adecvat în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

**1<sup>o</sup> Condiția suprareglării** (7.61), în conformitate cu (7.29), conduce la inegalitatea:

$$z \geq z_a = |\ln s_a| / \sqrt{p^2 + \ln^2 s_a}, \quad (7.64)$$

în care  $z_a$  este valoarea admisibilă a lui  $z$ .

Pentru a vedea semnificația lui  $z$  din punctul de vedere al localizării polilor dominanți (7.60) se introduce un nou parametru prin:

$$\cos y = z, \quad 0 < y < p/2, \quad (7.65)$$

în care  $\pm y$  sunt unghiurile pe care le fac respectiv fazorii  $p_{1,2}$  față de axa reală negativă a planului complex. În acest context, din (7.64) și (7.65) rezultă:

$$z = \cos y \geq |\ln s_a| / \sqrt{p^2 + \ln^2 s_a} = \cos y_a = z_a, \quad (7.66)$$

ceea ce implică:

$$y \leq y_a, \quad (7.67)$$

în care  $y_a$  este valoarea admisibilă a lui  $y$ .

Inegalitatea (7.67), care este echivalentă cu (7.61), precizează faptul că polii dominanți (7.60) trebuie să fie localizați în domeniul  $D_{oa}$  (sectorul unghiular AOB,  $s \neq 0$ ), fig.II.55.

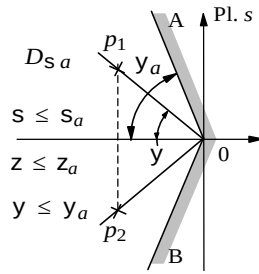


Fig.II.55. Localizarea polilor dominanți  $p_{1,2}$  pentru satisfacerea condiției  $s \leq s_a$

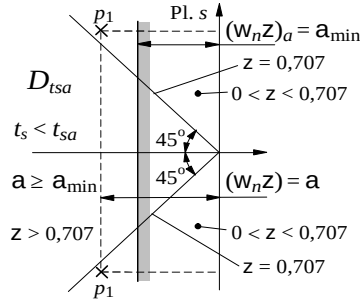


Fig.II.56. Localizarea polilor dominanți  $p_{1,2}$  pentru satisfacerea condiției  $t_s \leq t_{sa}$

**2<sup>o</sup> Condiția duratei regimului tranzitoriu** (7.62), în conformitate cu (7.30) și (7.31) respectiv (7.32) conduce la următoarele două inegalități:

$$(w_n z)_a \geq (w_n z)_a = 3/t_{sa}, \quad 0 < z \leq 0,707, \quad (7.68)$$

$$(w_n z)_a \geq (w_n z)_a = 6z^2/t_{sa}, \quad 0,707 < z < 1, \quad (7.69)$$

în care  $(w_n z)_a$  este valoarea admisibilă a produsului  $(w_n z)$ . Acest produs, existent în polii dominanți (a se vedea (7.60)), în conformitate cu 6.6, este de fapt gradul de stabilitate  $a$  și  $(w_n z)_a$ , având în vedere și (6.18), (7.68), (7.69), este rezerva de stabilitate  $a_{min}$ . Ținând seama de fig.II.39, rezultă că polii dominanți (7.56) trebuie să fie localizați în domeniul  $D_{tsa}$  (la stânga dreptei d) din fig.II.56.

**3<sup>o</sup> Condiția duratei de creștere** (7.59), în conformitate cu (7.33), conduce la inegalitatea:

$$w_n \geq w_{na} = 1,8/t_{ca}, \quad 0,3 \leq z \leq 0,8, \quad (7.70)$$

în care  $w_{na}$  este valoarea admisibilă a lui  $w_n$ .

Din (7.60) se obține:

$$w_n = |p_{1,2}|. \quad (7.71)$$

În acest context (7.70) și (7.71) arată că polii dominanți (7.60) trebuie să fie localizați în domeniul  $D_{tca}$  (la stânga semicercului) din fig.II.57.

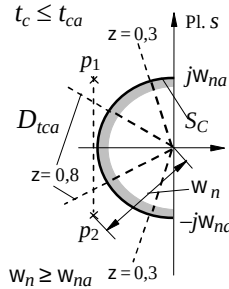


Fig.II.57. Localizarea polilor dominanți  $p_{1,2}$  pentru satisfacerea condiției  $t_c \leq t_{ca}$

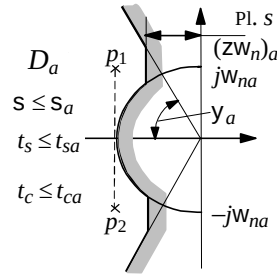


Fig.II.58. Localizarea polilor dominanți  $p_{1,2}$  pentru satisfacerea condițiilor  $s \leq s_a$ ,  $t_s \leq t_{sa}$  și  $t_c \leq t_{ca}$

**4<sup>oo</sup> Polii dominanți** (7.60) trebuie să fie astfel localizați în  $\{\text{Re } s < 0\}$  încât să fie satisfăcute simultan inegalitățile (7.61) – (7.63). În conformitate cu fig.II.54, II.55 și II.56, polii dominanți trebuie să fie localizați în domeniul  $D_a$  din fig.II.57. Localizarea efectivă a polilor  $p_{1,2}$  trebuie să se facă în apropierea frontierei respectivului domeniu, deoarece în caz contrar  $p_{1,2}$  își pot pierde caracterul dominant (față de polii îndepărtați care nu au fost luați în considerare în  $\tilde{G}(s)$  – relația (7.59)).

**Exemplul 7.8** (realizarea unei configurații cu doi poli dominanți)

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.II.59. Se cere să se aleagă parametrii  $k$  și  $a$  astfel încât  $s_a = 0,05$ ,  $t_{sa} = 3$  sec. și  $t_{ca} = 1,5$  sec.

Pe baza relațiilor (7.66), (7.67), (7.69) și (7.70) rezultă:

$$z = \cos y \geq \cos y_a = |\ln 0,05| \sqrt{(3,14)^2 + \ln^2 0,05} = 0,69; \quad y \leq y_a = 46^\circ;$$

$$\begin{cases} (w_n z) \geq (w_n z)_a = 3/3 = 1, & 0 < z \leq 0,707, \\ (w_n z) \geq (w_n z)_a = 2z^2, & 0,707 < z < 1; \end{cases}$$

$$w_n \geq w_{na} = 1,8/1,5 = 1,2.$$

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(jw) = \frac{k}{s^2 + a_n s + k} = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2z w_n s + w_n^2}; \quad w = \sqrt{k}, \quad z = a/2\sqrt{k}, \quad K = 1.$$

Există o infinitate de soluții în ceea ce privește localizarea polilor dominanți. De exemplu:  $z = 0,707$ ,  $w_n = 1,41$ ,  $k = w_n^2 = 2$ ,  $a = 2z w_n = 2$ ,  $p_{1,2} = -1 \pm j$ .

Valorile efective ale indicilor de calitate sunt:

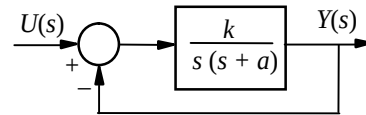


Fig.II.59. Sistemul automat de la exemplul 7.8

$$s = e^{-pz} / \sqrt{1-z^2} = 0,043; t_s = t_s / w_n = 2,8 / 1,41 = 1,98 \text{ sec (cf. fig.II.47);}$$

$$t_c = 1,8 / w_n = 1,8 / 1,41 = 1,28 \text{ sec.}$$

Se pot adopta de asemenea:

$$z = 0,75, \quad w_n = 1,5; \quad k = w_n^2 = 2,25, \quad a = 2zw_n = 2,25; \quad p_{1,2} = -1,125 \pm j0,992.$$

Valorile efective ale indicilor de calitate sunt:

$$s = 0,028, \quad t_s = 3 / 1,5 = 2 \text{ sec. (conform fig.II.47), } t_c = 1,8 / 1,5 = 1,2 \text{ sec. } \square$$

### 7.6. Efectul unui zero suplimentar

În cazul unei configurații cu doi poli dominanți introducerea unui zero suplimentar are ca efect numai modificarea coeficienților exponențialelor asociate polilor dominanți, existente în  $h(t)$ .

#### Exemplul 7.9

Se consideră sistemul descris de funcția de transfer:  $G(s) = 2 / [(s+1)(s+2)]$ . Se introduce un zero suplimentar,  $s = -z$ , astfel că funcția de transfer a sistemului devine:

$$G_1(s) = \frac{1}{z} \frac{2(s+z)}{(s+1)(s+2)} \text{ în care coeficientul } 1/z, \text{ cu } z \neq 0, \text{ din fața fracției are menirea de a}$$

păstra neschimbată valoarea factorului de amplificare (respectiv are loc  $\bar{h} = \bar{h}_1 = 1$ ). Se cere să se determine  $h(t)$  și  $h_1(t)$  și să se evalueze efectul zeroului suplimentar.

Cele două răspunsuri indiciale au expresiile:

$$h(t) = (1 - 2e^{-t} + e^{-2t})s(t), \quad h_1(t) = \left[ 1 - 2\left(1 - \frac{1}{z}\right)e^{-t} + \left(1 - \frac{2}{z}\right)e^{-2t} \right]s(t).$$

Este ușor de observat că:  $h_1(t) = h(t) + \dot{h}(t)/z$ .

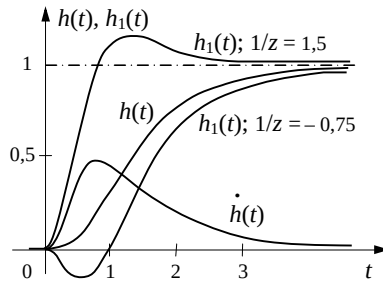


Fig.II.60. Răspunsurile indiciale la exemplul 7.9

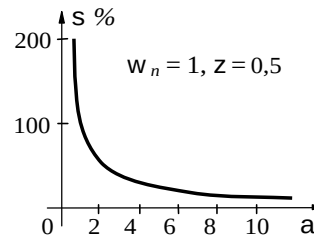


Fig.II.61. Dependența suprareglării  $\sigma\%$  de poziția  $\alpha > 0$  a zeroului suplimentar situat pe semi-axa reală negativă

În această situație, pentru  $z > 0$  este de așteptat să apară o suprareglare în  $h_1(t)$ , deși  $h(t)$  are suprareglarea nulă – fig.II.60 ( $z^{-1} = 1,5$ );  $t_c$  se micșorează și  $t_s$  rămâne aproximativ constant.

Pentru  $z < 0$  (adică pentru un zero  $s = -z > 0$ , situat pe semi-axa reală pozitivă a planului complex)  $h_1(t)$  are inițial o evoluție cu valori negative – fig.II.59 ( $z^{-1} = -0,75$ );  $t_c$  crește și  $t_s$  rămâne aproximativ constant.

Dacă zeroul este îndepărtat ( $|z| \rightarrow +\infty$ , atunci efectul său este neglijabil.  $\square$

Fie o configurație cu doi poli dominanți – funcția de transfer  $G(s)$  de forma (7.59). Se introduce un zero suplimentar,  $s = -azw_n$ , în care  $-zw_n$  este partea reală a polilor dominanți și  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$  este un parametru în funcție de valorile căruia se va evalua efectul zeroului suplimentar. Noua funcție de transfer are expresia:

$$G_1(s) = \frac{Kw_n}{az} \frac{s + azw_n}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2} \quad (7.72)$$

în care coeficientul  $Kw_n / az$  din fața fracției are menirea de a păstra neschimbată valoarea de regim staționar (adică  $\bar{h} = \bar{h}_1 = K$ ).

Din (7.59) și (7.72) rezultă:  $G_1(s) = G(s) + sG(s)/azw_n$ . Ca urmare, pentru răspunsurile indiciale se poate scrie relația:  $h_1(t) = h(t) + \dot{h}(t)/azw_n$ .

Pentru  $a > 0$  zeroul suplimentar (situat pe semi-axa reală negativă), determină o creștere a suprareglării. De exemplu, pentru  $w_n = 1$  și  $z = 0,5$  relația dintre  $s\%$  și  $a$  este reprezentată grafic în fig.II.61. Se observă că pentru  $a \in (0,4)$  (ceea ce înseamnă că zeroul suplimentar este dominant) suprareglarea  $s\%$  are o variație foarte mare. Pentru  $a \in [4, +\infty)$  (zeroul suplimentar este îndepărtat) suprareglarea  $s\%$  este aproximativ constantă. Investigații similare arată că zeroul suplimentar dominant poate asigura creșterea rapidității (micșorarea lui  $t_c$ );  $t_s$  rămâne aproximativ constant (fig.II.60).

Pentru  $a < 0$  (zeroul suplimentar este situat pe semi-axa reală pozitivă) se obține  $h_1(t) < 0$  în primele momente (a se vedea fig. II.60). O astfel de comportare este tipică pentru sistemele de defazaj *neminim* (a se vedea VI.3.3). În acest caz zeroul suplimentar poate avea ca efect o reducere a rapidității (creșterea lui  $t_c$ );  $t_s$  rămâne aproximativ constant (fig.II.60).

### 7.7. Efectul unui pol suplimentar

Fie o configurație cu doi poli dominanți – funcția de transfer  $G(s)$ , relația (7.59). Se introduce un pol suplimentar,  $s = -azw_n$ , în care  $-zw_n$  este partea reală a polilor dominanți (preexistenți) și  $a > 0$  este un parametru în funcție de valorile căruia se va evalua efectul polului suplimentar. Noua funcție de transfer are expresia:

$$G_1(s) = \frac{azw_n}{s + azw_n} \frac{Kw_n^2}{s^2 + 2zw_n s + w_n^2} \quad (7.73)$$

pentru care  $\bar{h} = \bar{h}_1 = K$ .

Din (7.59) și (7.73) rezultă:  $G_1(s) + azw_n G_1(s) = azw_n G(s)$ . Ca urmare, pentru răspunsurile indiciale se poate scrie:  $\dot{h}_1(t) + azw_n h_1(t) = azw_n h(t)$ . Din această relație rezultă că polul suplimentar (situat pe semi-axa reală negativă) poate avea ca efect o creștere a duratei regimului tranzitoriu  $t_s$ . De exemplu, pentru  $K = 1$  și  $z = 0,5$  răspunsul indicial  $h_1(t)$ , pentru diverse valori  $a > 0$ , este reprezentat în fig.II.62. Relația dintre  $t_s = w_n t_s$  și  $a$  este reprezentată grafic în fig.II.63. Se remarcă faptul că pentru  $a \in (0,4)$  (polul suplimentar este dominant) durata adimensională a regimului tranzitoriu,  $t_s$ , are o variație foarte mare. Pentru  $a \in [4, +\infty)$  (polul suplimentar este îndepărtat)  $t_s$  este aproximativ constant.

În încheiere trebuie remarcat că polul suplimentar poate determina reducerea suprareglării dar și o reducere a rapidității (creșterea lui  $t_c$ ), fig.II.62.

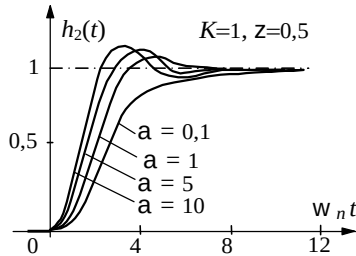


Fig.II.62. Răspunsul indicial al sistemului (7.73) pentru diverse poziții  $a > 0$  ale polului suplimentar situat pe axa reală negativă

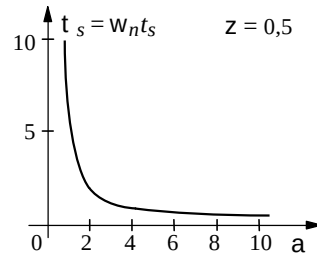


Fig.II.63. Dependența duratei adimensionale a regimului tranzitoriu,  $t_s$ , de poziția  $a > 0$  a polului suplimentar situat pe semiaxa reală negativă

### 7.8. Simbolizarea operatorială a sistemelor dinamice liniare

Prin utilizarea elementelor de transfer tipice descrise la 7.2, pe baza conexiunilor «serie», «paralel» și «cu reacție», se pot alcătui structuri având funcții de transfer oricât de complicate. Din acest motiv și pentru că elementele de transfer tipice pun în evidență cele mai simple operații de transfer intrare – ieșire, simbolurile P, I, D, T și TM se utilizează în combinații și cu indici adecvați pentru caracterizarea operatorială a oricărui sistem dinamic liniar atunci când se cunoaște funcția lui de transfer.

Pentru atribuirea corectă a simbolurilor operatoriale se procedează astfel:

- Se fac toate simplificările factorilor comuni de la numărătorul și numitorul lui  $G(s)$ .
- Numărătorul conține un polinom eventual înmulțit cu  $e^{-Ts}$  (un element TM).
- Dacă  $G(s)$  are  $p \geq 0$  poli în origine, se scoate în factor la numitor  $s^p$ .
- Se împart toți termenii polinomului de la numărătorul lui  $G(s)$ , unul câte unul, la  $s^p$ .
- Expresia de la numărător se simbolizează prin P, I și D, după caz (cu indicii p și q pentru I și respectiv D pentru ordinul maxim al operațiilor corespunzătoare), considerând termenii ca funcții de transfer ale unor elemente conectate în paralel.
- Inversul polinomului de la numitorul lui  $G(s)$  este funcția de transfer a unui element T (cu indice r pentru ordinul maxim al operației corespunzătoare) conectat în serie cu grupul elementelor asociate numărătorului, respectiv (P, I, D) și TM.
- Simbolul operatorial are forma:  $(P+Ip+Dq) TM Tr = P Ip Dq Tr TM$ .

#### Exemplul 7.10

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} e^{-Ts}$  și

se cere să se facă simbolizarea operatorială.

În ipoteza că nu există factori comuni între polinoamele de la numărătorul și numitorul lui  $G(s)$ , se prelucrează  $G(s)$  după cum urmează:

$$G(s) = \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 (a_5 s^3 + a_4 s^2 + a_3 s + a_2)} e^{-Ts} = \underbrace{\left( \frac{b_2}{s} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{b_3 s + b_4 s^2}{s^2} \right)}_{I2} \underbrace{\frac{1}{a_5 s^3 + a_4 s^2 + a_3 s + a_2}}_{T3} \underbrace{e^{-Ts}}_{TM}.$$

Simbolul căutat este: P I2 D2 T3 TM. □

### 1. Clasificarea sistemelor dinamice după structură

*Structurabilitatea*, ca proprietate a sistemelor dinamice, a fost evidențiată în mod implicit în capitolul precedent cu prilejul introducerii noțiunii de *schemă bloc structurală* (subcap.II.2). În continuarea acelei abordări, prin **structură fundamentală** se înțelege o reuniune de elemente ale cărei proprietăți nu se regăsesc, ca atare, printre proprietățile elementelor componente. Proprietățile unei structuri fundamentale aparțin în primul rând *conexiunilor* dintre elementele componente, respectiv *reuniunii structurate a elementelor și raporturilor dintre elemente și ansamblul lor*. În acest context elementele componente se numesc și *elemente de bază*. Dacă avem în vedere tipurile de elemente (sisteme) cuprinse în tabelul II.2 se poate afirma că o structură fundamentală este de regulă constituită din elemente disipative, elemente acumulative inductive și / sau elemente acumulative capacitive (ca elemente de bază), deoarece reuniunile structurate ale acestor elemente au proprietăți care nu se regăsesc, ca atare, printre proprietățile elementelor componente.

#### Exemplul 1.1 (structură fundamentală)

Se consideră circuitul «L, C» din fig.III.1. Se cere să se arate că acesta formează o structură fundamentală.

Într-adevăr, conform fig.III.1 și tabelului II.2, se pot scrie ecuațiile:

$$L \frac{di}{dt} = -u, \quad i(0) = 0, \quad C \frac{du}{dt} = i, \quad u(0) = u_0 = \frac{q_0}{C},$$

din care, cu notația  $w_n = 1/\sqrt{LC}$ , rezultă:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + w_n^2 u = 0, \quad u(0) = q_0 / C, \quad u'(0) = i(0) / C = 0.$$

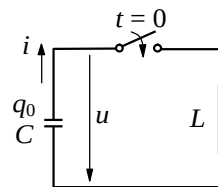


Fig.III.1. Circuitul «L, C»  
de la exemplul 1.1

Soluția acestei ecuații diferențiale este:  $u(t) = (q_0 / C) \cos w_n t, \quad t \geq 0$ .

Ca urmare, circuitul «L, C» este oscilant, acesta fiind proprietatea sa fundamentală. Este lesne de observat că această proprietate nu se regăsește printre acelea ale elementelor «L» sau «C» luate separat. □

S-a arătat la I.3 că o relație de tip special există în structurile sistemelor dinamice este *reacția* (pozitivă sau negativă). Neluând în considerare prezența operatorului uman, din punctul de vedere al inexistenței sau existenței reacției se disting sisteme dinamice a căror structură este: *deschisă* sau *închisă*.

#### 1.1. Sisteme cu structură deschisă; principiul compensației

Acestea sunt reuniuni de elemente cuplate funcțional astfel încât mărimea de intrare a oricărui element component nu este determinată, direct sau indirect, de mărimea de ieșire a respectivului element. Cu alte cuvinte structurile deschise nu conțin conexiuni «cu reacție».

O structură deschisă este constituită numai din conexiuni «serie» și / sau «paralel». O structură fundamentală deschisă minimală este formată din două elemente conectate în serie (fig.III.2), a căror funcționalitate este definită prin următoarele:

- *Subsistemul principal*,  $S_1$ , realizează dependența mărimii de ieșire  $y$  de mărimea de comandă  $m$ ; în cazul sistemelor tehnice,  $S_1$  este o instalație tehnologică.
- *Subsistemul de comandă*,  $S_2$ , realizează dependența mărimii de intrare / ieșire (în  $S_1$  / din  $S_2$ )  $m$ , de mărimea de intrare  $u$ ; se spune că  $S_1$  este comandat de  $S_2$  și sistemul în ansamblu se numește *sistem de comandă*.

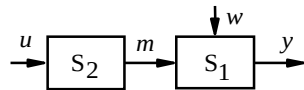


Fig.III.2. Structură fundamentală deschisă minimală

De regulă  $S_1$  este dat și se dorește realizarea unui anumit transfer  $u \rightarrow y$ . În acest scop se adaugă  $S_2$ , creat special, astfel încât ansamblul să realizeze transferul  $u \rightarrow y$ . Aici trebuie să se țină seama de faptul că (în special) asupra subsistemului  $S_1$  acționează perturbăția  $w$  care tinde să modifice transferul  $u \rightarrow y$ . Ca urmare, mărimea  $u$  trebuie modificată (de către un operator uman, prin care se realizează de fapt o reacție negativă; a se vedea I.2) astfel încât să se diminueze efectul lui  $w$  asupra lui  $y$ .

#### Exemplul 1.2 (generatorul electric de c.c.)

Ca sistem cu structură deschisă se consideră și se analizează generatorul electric de c.c. a cărui schemă este prezentată în fig.III.3. În conformitate cu notațiile din figură, pentru regimul staționar, se pot scrie relațiile:

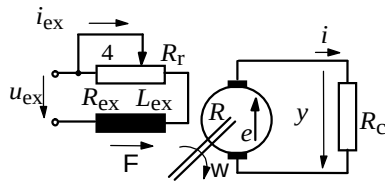


Fig.III.3. Schema generatorului electric de c.c. (exemplul 1.2);  $u_{ex}$  – tensiunea de excitație (mărimea de intrare),  $y$  – tensiunea la borne (mărimea de ieșire),  $i$  – curentul de sarcină (perturbația)

$$y_s = e_s - Ri_s \quad (\text{circuitul indusului}) \quad (a_1)$$

$$e_s = kW_s F_s \quad (\text{tensiunea electromotoare}) \quad (a_2)$$

$$F_s = L_{ex} i_{ex} \quad (\text{fluxul de excitație}) \quad (a_3)$$

$$i_{exs} = \frac{u_{exs}}{R_{ex} + R_r} \quad (\text{curentul de excitație}), \quad (a_4)$$

în care indicele  $s$  simbolizează regimul staționar. Eliminând  $e_s$ ,  $F_s$  și  $i_{exs}$  între (a<sub>1</sub>) – (a<sub>4</sub>) rezultă:

$$y_s = y_0 - Ri_s, \quad y_0 = kW_s L_{ex} u_{exs} / (R_{ex} + R_r). \quad (a_5)$$

Relația (a<sub>5</sub>) este caracteristica statică a generatorului, fig.III.4 (dreapta 1). Valoarea lui  $y_0$  – tensiunea de «mers în gol» – poate fi modificată prin variația tensiunii de excitație  $u_{exs}$  sau a rezistenței  $R_r$ . În acest fel caracteristica statică se poate deplasa pe verticală (paralel cu ea însăși) în scopul compensării efectului curentului de sarcină  $i_s$  (perturbația) asupra tensiunii la

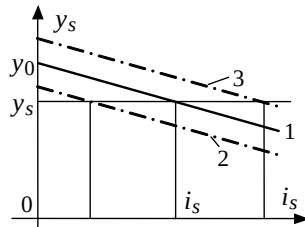


Fig.III.4. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. (exemplul 1.2)

borne  $y_s$  (fig. III.4, caracteristicile 2 sau 3).

Sistemul prezentat are structura deschisă. Subsistemul  $S_1$  este format de generator, iar subsistemul  $S_2$  este o sursă de tensiune externă ( $u_{exs}$  variabilă) sau reostatul  $R_r$ . □



**Principiul compensației.** Pentru diminuarea, sau întărirea efectului perturbației  $w$  asupra mării de ieșire  $y$  se poate introduce un subsistem  $S_3$  (fig.III.5) prin care se realizează o dependență suplimentară adecvată a mării de comandă  $m$  de perturbația  $w$  (conexiune *feed-forward*). Soluția clasică în acest sens constă în introducerea, prin  $S_3$  a efectului lui  $w$  (aditiv sau substractiv) asupra lui  $m$ , așa cum se arată în fig.III.5. Se obține astfel un sistem de comandă care funcționează pe *principiul compensației* (sau principiul Poncelet). Se remarcă faptul că sistemul obținut are în continuare o structură deschisă.

**Exemplul 1.3** (generatorul electric de c.c.; aplicarea principiului compensației)

În cazul generatorului electric de c.c. (fig.III.3) soluția de aplicare a principiului compensației constă în introducerea unui electromagnet (fig.III.6, bobina 1, piesa fero-magnetică mobilă 2 și resortul antagonist 3) care acționează cursorul reostatului (fig.III.6, reostatul 4 și tija 5). Bobina electromagnetului este conectată în serie cu indusul și cu rezistența de sarcină. Curentul de excitație în regim staționar este dat de ecuația (a<sub>4</sub>) în care

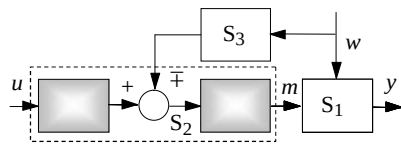


Fig.III.5. Structura fundamentală deschisă în care se aplică principiul compensației (feed-forward)

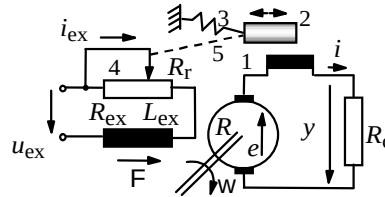


Fig.III.6. Schema generatorului electric de c.c. cu aplicarea principiului compensației (exemplul 1.3)

reostatul de reglare este descris de:

$$R_r = r_{ex} - k_r i_s, \quad (b_1)$$

deoarece la creșterea / scăderea curentului  $i_s$  piesa 2 se deplasează spre dreapta / stânga realizându-se astfel o scădere / creștere a lui  $R_r$ ; variația lui  $R_r$  este proporțională și de sens opus celeia a lui  $i_s$ . Ca urmare, eliminând  $e_s$ ,  $f_s$ ,  $i_{exs}$  și  $R_r$  între ecuațiile (a<sub>1</sub>) – (a<sub>4</sub>) și (b<sub>1</sub>) se obține caracteristica statică:

$$y_s = y_0 (R_{ex} + r_{ex}) / (R_{ex} + r_{ex} - k_r i_s) - R i_s. \quad (b_2)$$

Se observă că primul termen din membrul doi depinde de curentul de sarcină  $i_s$ . De exemplu, la creșterea / scăderea lui  $i_s$  acest termen crește / scade. Această creștere / scădere poate compensa (mai mult sau mai puțin) creșterea / scăderea termenului  $R i_s$  (ecuația (b<sub>2</sub>), membrul doi). În acest fel  $y_s$  poate fi menținut aproximativ constant într-o vecinătate a unui punct de funcționare dat, fig.III.7.

Trebuie subliniat că raționamentul de mai sus se bazează pe ipoteza că  $R = \text{constant}$ , ceea ce nu are loc în general. Într-adevăr,  $R$  (rezistența indusului) depinde de temperatură care poate varia între limite largi. Orice variație a lui  $R$  produce o variație a lui  $R i_s$  (în ecuația (b<sub>2</sub>)). Simpla compensare după perturbația  $i_s$  nu mai are acum nici un efect deoarece

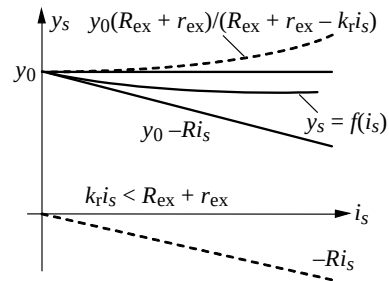


Fig.III.7. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. cu aplicarea principiului compensației (exemplul 1.3)

de această dată variația lui  $Ri_s$  se datorează lui  $R$  și nu lui  $i_s$ . Pentru a realiza o compensare a efectului variației lui  $R$  ar fi necesară măsurarea lui  $R$  și materializarea unei relații între  $i_{\text{exs}}$  și  $R$ . Aplicarea consecventă a principiului compensației ar conduce la soluții similare pentru  $w$  (viteza unghiulară a rotorului) etc., ceea ce, practic poate fi prea complicat.  $\square$

### 1.2. Sisteme cu structură închisă; principiul abaterii

Acestea sunt reuniuni de elemente cuplate funcțional astfel încât cel puțin în cazul unui element component mărimea sa de intrare este determinată, direct sau indirect, de mărimea sa de ieșire. Cu alte cuvinte structurile închise conțin conexiuni «cu reacție».

O structură fundamentală închisă minimală este formată din trei elemente în conexiune «cu reacție»: două elemente înseriate pe calea directă și un element pe calea de reacție (fig.III.8). Funcționalitatea acestor elemente este definită prin următoarele:

- *Subsistemul principal*,  $S_1$ , realizează dependența mărimii de ieșire  $y$  de mărimea de comandă  $m$ ; în cazul sistemelor tehnice  $S_1$  este o instalație tehnologică.
- *Subsistemul de reacție*,  $S_2$ , realizează transferul informațional  $y \rightarrow y_r$ ,  $y_r$  fiind mărimea de reacție.
- *Subsistemul decizional*,  $S_3$ , elaborează o decizie privind evoluția mărimii de comandă  $m$  pe baza mărimilor de intrare  $y_p$  și de reacție  $y_r$  în conformitate cu un anumit algoritm. Transferul  $(y_p, y_r) \rightarrow m$  trebuie să asigure realizarea unui anumit transfer  $y_p \rightarrow y$  în condițiile în care acesta este perturbat de  $w$ .

Se observă că  $m$  depinde de ambele mărimi de intrare:  $y_p$  și  $w$ . Efectiv orice variație a lui  $y$ , indiferent de cauza care a provocat-o (în speță  $y_p$  și / sau  $w$ , variații ale parametrilor sistemului sau cauze care din varii motive nu sunt incluse în modelul matematic, dar care sunt prezente în sistemul real) are ca urmare, prin  $S_2, S_3$ , modificarea lui  $m$  și implicit a lui  $y$ .

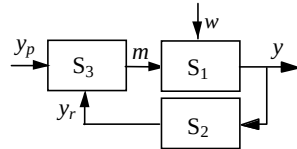


Fig.III.8. Structură fundamentală închisă minimală

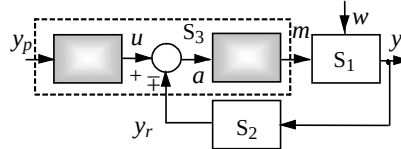


Fig.III.9. Structura fundamentală închisă minimală;  $y_r$  se aplică cu [-] (reacția negativă) sau cu [+] (reacția pozitivă)

Efectul variației lui  $y$  asupra lui însuși poate fi de semn contrar (reacție negativă) sau de același semn (reacție pozitivă) cu variația lui  $y$ .

Un caz particular uzual este acela în care  $S_3$  realizează transferul  $a \rightarrow m$ , cu  $a = u \mp y_r$  și  $y_p \rightarrow u$ , fig.III.9. Semnul [-] definește **reacția negativă**, iar semnul [+] definește **reacția pozitivă**.

#### 1 $\infty$ Reacția negativă; principiul abaterii

În cazul sistemelor automate, atunci când  $y$  variază într-un sens,  $S_3$  determină prin  $m$  o variație de sens contrar a lui  $y$ . Evident, în această situație sistemul este înzestrat cu o reacție negativă. Variația de sens contrar a lui  $y$  trebuie să fie bine dozată ca valoare și viteză astfel încât să se evite amorsarea unor oscilații neamortizate sau prea slab amortizate, adică să se asigure transferuri  $y_p \rightarrow y$  și  $w \rightarrow y$  de calitate acceptabilă (de exemplu caracterizabile prin indicii de calitate definiți pe baza răspunsului indicial (a se vedea II.7.1).

**Principiul abaterii.** Pentru  $a = u - y_r$  (fig.III.9) sistemul conține o conexiune cu reacție negativă. Mărimea  $a$  se numește **abaterea** dintre  $u$  (de regulă proporțional cu  $y_p$ ) și  $y_r$  (de regulă proporțional cu  $y$ ). Se spune că sistemul automat lucrează pe *principiul abaterii* (sau principiul Watt) a cărui formulare este următoarea:

**Orice variație a lui  $y$ , indiferent de cauza care a provocat-o, este urmată întotdeauna, datorită reacției negative, de o acțiune a întregului sistem în sensul diminuării sau chiar anulării abaterii  $a$ . Se mai spune că însăși existența unei variații a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluția sistemului automat în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii.**

Trebuie remarcat faptul că principiul abaterii poate asigura o comportare mai bună a sistemelor în comparație cu principiul compensației. În cazul principiului abaterii se obține o diminuare sau chiar anularea abaterii  $a$ , indiferent care este cauza care a produs variația lui  $a$ , prin simpla existență a reacției negative după mărimea de ieșire  $y$  și a transferului  $a \rightarrow m$  de formă adecvată. Implicit are loc și o *stabilizare* a sistemului, respectiv se asigură anumite calități ale transferurilor  $y_p \rightarrow y$  și  $w \rightarrow y$  din punctul de vedere al BIBO-stabilității.

În cazul principiului compensației, compensarea efectului perturbațiilor (este vorba de  $w$  dar și de variațiile imprevizibile ale parametrilor sistemului) asupra mărimii de ieșire  $y$  necesită măsurarea efectivă a acestor perturbații și materializarea unei relații adecvate și foarte precise între mărimea de comandă  $m$  și respectivele perturbații. O soluție practică bazată pe această idee este complicată și cu rezultate nu întotdeauna acceptabile în comparație cu soluția aplicării principiului abaterii.

În unele aplicații, cum ar fi reglarea automată a tensiunii generatoarelor (de c.c. sau de c.a. sincrone) se utilizează atât principiul abaterii cât și principiul compensației (după curentul de sarcină). O astfel de soluție oferă o oarecare flexibilitate în stabilirea formei caracteristicii statice  $y_s = f(i_s)$ .

#### Exemplul 1.4 (generatorul electric de c.c.; aplicarea principiului abaterii)

În cazul generatorului electric de c.c. (fig.III.3) soluția de aplicare a principiului abaterii constă în introducerea unui electromagnet (fig.III.10, bobina 1, piesa feromagnetică mobilă 2 și resortul antagonist 3) care acționează cursorul unui reostat (fig.III.10, reostatul 4 și tija 5). Bobina electromagnetului este conectată în paralel cu indusul și cu rezistența de sarcină  $R_c$ . În acest caz curentul de excitație în regim staționar este exprimat de relația ( $a_4$ ) de la exemplul 1.3, în care reostatul de reglare este descris de ecuația:

$$R_r = r_{ex} + k_r y_s, \quad (c_1)$$

deoarece la creșterea / scăderea tensiunii  $y_s$  piesa 2 se deplasează spre stânga / dreapta; variația lui  $R_r$  este proporțională cu a lui  $y_s$ .

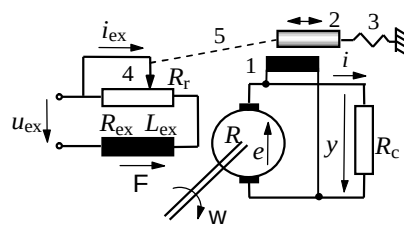


Fig.III.10. Schema generatorului electric de c.c. cu aplicarea principiului abaterii (exemplul 1.4)

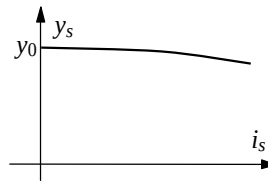


Fig.III.11. Caracteristica statică a generatorului electric de c.c. după aplicarea principiului abaterii

Ca urmare, eliminând  $e_s$ ,  $f_s$ ,  $i_{exs}$  și  $R_r$  între ecuațiile  $(a_1) - (a_4)$ ,  $(b_1)$  și  $(c_1)$  se obține caracteristica statică:

$$y_s = y_0(R_{ex} + r_{ex}) / (R_{ex} + r_{ex} + k_r y_s) - R i_s \quad (c_2)$$

Se observă că primul termen din membrul doi depinde de  $y_s$ . De exemplu, la creșterea lui  $i_s$  acest termen trebuie să se mărească într-o anumită măsură. Acest lucru și satisfacerea ecuației  $(c_2)$  sunt posibile prin micșorarea adecvată a lui  $y_s$ . Graficul funcției implicite definite de  $(c_2)$  este reprezentat în fig.III.11. Se trage concluzia că este posibilă menținerea lui  $y_s$  la o valoare aproximativ constantă într-o vecinătate a unui punct de funcționare dat.

Spre deosebire de soluția prezentată la exemplul 1.3 (bazată pe principiul compensației), în cazul sistemului din fig.III.10 orice variație a parametrilor sistemului este urmată de acțiunea sistemului în sensul diminuării abaterii. De exemplu, orice variație a tensiunii  $y_s$  (datorată variației rezistenței  $R$  a indusului în funcție de temperatură, variației turației  $w$  a motorului etc.) are ca urmare deplasarea piesei 2, respectiv a cursorului reostatului  $R_r$ , modificarea adecvată a curentului  $i_{ex}$  și în final variația t.e.m.  $e$  astfel încât să aibă loc o revenire a tensiunii  $y_s$  la o valoare apropiată de cea inițială.

*Valoarea prescrisă* (de referință) a tensiunii la borne se poate modifica prin forța exercitată de resortul 3.

Soluția de *combinare a principiului abaterii și a principiului compensației* constă în utilizarea unui electromagnet cu două bobine: una conectată în paralel cu indusul și cealaltă conectată în serie cu indusul.  $\square$

## 2<sup>o</sup> Reacția pozitivă

În cazul sistemelor cu structură închisă (fig.III.8) este posibil ca, atunci când  $y$  variază într-un sens,  $S_3$  să determine prin  $m$  o variație de același sens a lui  $y$ . În această situație sistemul este înzestrat cu o reacție pozitivă. Variația de același sens a lui  $y$  poate amorsa oscilații întreținute sau chiar neamortizate, ceea ce înseamnă că reacția pozitivă poate determina o evoluție spre limita de stabilitate sau chiar o comportare instabilă a sistemului.

Pentru  $a = u + y_r$ , în care  $a$  nu mai are semnificația de abatere, sistemul conține o conexiune cu reacție pozitivă (fig.III.9).

### Exemplul 1.5 (mașina cu vapor – generator de oscilații mecanice)

Mașina cu vapor, reprezentată schematic în fig.III.12, este exemplul tipic de sistem cu reacție pozitivă. Mașina cu vapor, inventată de J. Watt, este un convertor de energie. Ea transformă energia termică a aburului viu în energie mecanică. Această transformare are loc în cilindrul mașinii cu vapor prin destinderea aburului viu și deplasarea pistonului într-un sens sau în celălalt (după cum destinderea aburului are loc de o parte sau de cealaltă parte a pistonului). Dacă destinderea aburului are loc în mod alternativ de o parte și de cealaltă a pistonului, acesta execută o mișcare de «du-te – vino» care se transformă (prin biela AB) într-o mișcare de rotație a volantului. Problema pe care o rezolvat-o J. Watt a fost aceea a alimentării cu abur viu, în mod alternativ, a celor două camere (de volum variabil) pe care le formează pistonul în interiorul cilindrului. Prin legătura informațională CD, sertarul, în mișcarea sa de «du-te – vino», se deplasează adecvat (corelat) cu mișcarea pistonului, astfel încât, în timp ce aburul viu pătrunde prin orificiul neobturat de sertar în camera al cărei volum se mărește (prin destinderea aburului), aburul uzat din camera al cărei volum se micșorează

este evacuat în atmosferă prin orificiul aflat sub sertar. Evident bielele AB și CD nu sunt în același plan, astfel că ele se pot mișca fără a se perturba reciproc. Decalajul unghiular dintre punctele A și C trebuie realizat astfel încât atunci când pistonul se mișcă spre dreapta sertarul să nu obtureze orificiul de admisie din stânga (situația din fig.III.12), iar atunci când pistonul se mișcă spre stânga sertarul să nu obtureze orificiul de admisie din dreapta. În acest fel sistemul este înzestrat cu o *reacție pozitivă*. Efectiv, însăși mișcarea pistonului, prin legătura informațională CD care asigură distribuția adecvată a aburului, determină deplasarea sa de «du-te – vino» și implicit mișcarea de rotație a volantului. Un rol important în menținerea acestei mișcări îl are volantul care este un acumulator (capacitiv) de energie cinetică.

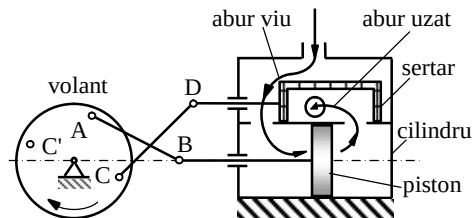


Fig.III.12. Schema mașinii cu vapori – sistem cu reacție pozitivă (exemplul 1.5)

Este ușor de observat că plasarea punctului C în poziția diametral opusă, C' (fig.III.12), schimbă caracterul reacției în sistem și anume ea devine negativă. În această situație mișcarea pistonului nu mai este posibilă.

Mașina cu vapori aparține deja istoriei tehnicii. Dar soluția de realizare a distribuției aburului a fost preluată *mutatis mutandis* la motoarele cu ardere internă. La acestea legătura informațională, care materializează reacția pozitivă, este realizată prin lanțul cinematic de la arborele cotit la axul cu came până la supape (la motoarele Diesel se adaugă sistemele de injecție a combustibilului și de evacuare a gazelor arse, iar la motoarele Otto se adaugă sistemele de distribuție a amestecului aer – combustibil, de aprindere prin scânteie și de evacuare a gazelor arse). □

#### Exemplul 1.6 (amplificatorul electronic ca generator de oscilații electrice)

În sfera sistemelor electrice sistemul tipic cu reacție pozitivă este oscilatorul electronic. Exemplul clasic este amplificatorul electronic cu triodă cu reacție pozitivă (oscilatorul), fig.III.13 (trebuie subliniat faptul că oscilatoarele de mare putere din domeniul radiofoniei se realizează și în prezent cu tuburi electronice).

În cazul schemei din fig.III.13 *reacția pozitivă* se realizează prin cuplajul inductiv dintre circuitul anodic și circuitul grilei. Se știe că electronii emiși de catod (K) se deplasează spre anod (A) și că grila (G), prin potențialul  $u_g$ , poate frâna (în cazul grilei negativate) sau accelera (în cazul grilei pozitive) fluxul de electroni în mișcare de la catod la anod. La punerea schemei sub tensiune curentul anodic  $i_A$  crește (de la zero) astfel că (la o conectare adecvată a secundarului transformatorului T (care conține un element derivator; cf. II.7.2.e, inclusiv exemplul 7.5), în conformitate cu legea inducției, grila se pozitivă. Aceasta determină creșterea în continuare a curentului anodic  $i_A$ , fenomenul auto-menținându-se prin pozitivarea grilei până când  $i_A$  atinge valoarea de saturație, rămânând constant. Acum tensiunea la bornele secundarului

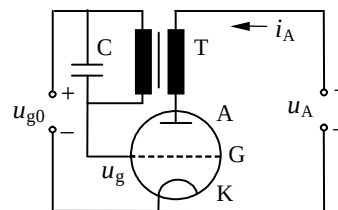


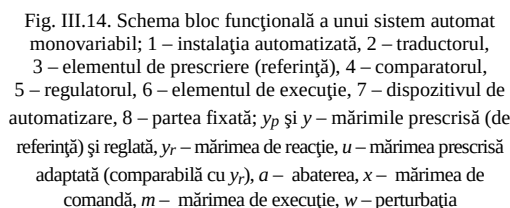
Fig.III.13. Schema oscilatorului electronic cu triodă – sistem cu reacție pozitivă (exemplul 1.6)

transformatorului este nulă, respectiv dispare pozitivarea prin transformator a grilei. Ceea ce urmează în mod firesc este micșorarea curentului anodic  $i_A$ . Conform legii inducției are loc o negativare a grilei, ceea ce determină o reducere a curentului anodic, fenomenul auto-menținându-se prin negativarea grilei până când  $i_A$  atinge valoarea reziduală (foarte mică), rămânând constant. Acum tensiunea la bornele secundarului transformatorului este din nou nulă, respectiv dispare negativarea prin transformator a grilei. Ceea ce urmează este o creștere a curentului anodic ș.a.m.d. Este clar că sistemul este un *generator de oscilații*. Un rol important în menținerea procesului oscilatoriu, pe lângă reacția pozitivă, care este esențială, îl are condensatorul C care este un acumulator (capacitiv) de energie electrică (similarul volantului în cazul mașinii cu vaporii – fig.III.12) și valoarea medie a potențialului grilei (stabilită prin  $u_{g0}$  – fig.III.13). Trebuie remarcat faptul că la conectarea inversă a secundarului transformatorului se schimbă caracterul reacției în sistem și anume ea devine negativă. În acest caz sistemul nu mai oscilează.

Oscilatoarele electronice cu tranzistori sunt realizate prin aplicarea a unor soluții similare (*mutatis mutandis*) cu cea utilizată în cazul oscilatorului electronic cu triodă. □

Din examinarea modului de acțiune și al efectelor celor două tipuri de reacție se pot formula următoarele două reguli generale:

- ❖ **Reacția negativă are efect stabilizant.**
- ❖ **Reacția pozitivă are efect destabilizant.**



poziția unghiulară a axului unui potențiomtru etc.) în *mărimea prescrisă (de referință) adaptată u*, care trebuie să fie de aceeași natură fizică cu mărimea de reacție  $y_r$ , fiind astfel posibilă obținerea abaterii:

$$a = u - y_r$$

cu ajutorul comparatorului (4).

Din punct de vedere constructiv elementul de prescriere (referință) (3), comparatorul (4) și regulatorul (5) constituie de regulă o singură unitate (un modul constructiv). Această unitate este astfel realizată încât operatorul uman are posibilitatea modificării mărimii prescrise (de referință) și a parametrilor ajustabili ai regulatorului.

Din punctul de vedere al realizării tehnologice, cele mai frecvent utilizate sunt regulatoarele electronice (analogice sau numerice) și, cu destinație specială – regulatoarele pneumatice (de exemplu în industria petrochimică).

Este evident că sistemul automat cu schema bloc funcțională din fig.III.14 funcționează pe **principiul abaterii** (a se vedea 1.2.1<sup>o</sup>). Trebuie subliniat și reținut că pentru aprecierea calităților unui sistem automat (în speță precizia de reglare în regim staționar și în regim tranzitoriu) cea mai potrivită mărime nu este abaterea  $a$ . Această afirmație pare surprinzătoare având în vedere că, în conformitate cu *principiul abaterii*, sistemul automat tinde să-și diminueze sau să-și anuleze propria abatere  $a$ . Ținând însă seama de scopul pentru care se realizează un sistem automat, mărimea care în mod natural este cea mai potrivită pentru aprecierea calității (preciziei) este

$$e = y_p - y_s$$

adică *eroarea* dintre mărimea prescrisă (de referință) și mărimea reglată. În general,

$$e \neq a$$

și în plus eroarea nu este nici generată și nici nu acționează în cadrul sistemului automat.

*Eroarea este o mărime virtuală, foarte utilă în analiza, sinteza (proiectarea) și aprecierea calității (preciziei) unui sistem automat. O analiză detaliată a preciziei sistemelor automate, bazată pe noțiunea de eroare, se prezintă în subcapitolul 5.*

### Exemplul 2.1 (sistem de reglare automată a turației)

Pentru ilustrarea noțiunii de schemă bloc funcțională se consideră cu schema funcțională – tehnologică reprezentată în fig.III.15.

Instalația automatizată este constituită de motorul electric de c.c. cu excitație separată (M). Modelul matematic corespunzător a fost obținut în subcapitolul II.2 (exemplele 2.1 – 2.3).

Ca traductor de turație se folosește un tahogenerator (TG). Acesta este un generator electric de c.c. cu excitație separată, de construcție specială și de foarte mică putere, caracterizat de relația intrare – ieșire:

$$u_t = k_t W,$$

în care  $k_t$  este o constantă.

Elementul de prescriere este constituit de un potențiomtru (P) pentru care, într-o primă aproximație, se poate scrie:

$$u_p = k_p W_p,$$

în care  $k_p$  este o constantă.



Funcția elementului de comparație este realizată prin conectarea în opoziție a ieșirii potențiometrului (P) și a indusului tahogeneratorului (TG), astfel că pentru *abaterea a* se poate scrie:

$$a = u_p - u_t.$$

Regulatorul (R) este de tip electronic (analogic). Uzual acesta realizează o lege de reglare de tip PID (adică funcția de transfer este de tip PID, a se vedea II.7.8; detalii privind modul de realizare a reguletoarelor electronice analogice se vor prezenta în cap.IV).

Elementul de execuție este format din dispozitivul de comandă pe grilă (DCG) și puntea redresoare (cu tiristoare) comandată (PRC). Dispozitivul de comandă pe grilă convertește tensiunea continuă  $u_c$  într-un tren de impulsuri (de frecvență  $2f$ ,  $f$  fiind frecvența tensiunii  $u_{alim}$ ) de fază  $j$  dependentă de  $u_c$  conform relației liniarizate:

$$j = k_g u_c,$$

în care  $k_g$  este o constantă. Impulsurile astfel obținute se aplică pe grilele tiristoarelor punții redresoare comandate (PRC). Relația dintre  $u$  și  $j$  este neliniară, dar într-o primă aproximație (considerând că  $u$  și  $j$  sunt mici variații în jurul unui punct de funcționare) se poate scrie:

$$u = k j,$$

în care  $u$  este valoarea medie a tensiunii pulsatorii  $v$  (fig. III.15) și  $k$  este o constantă.

Pentru funcționarea normală a sistemului sunt necesare o serie de elemente suplimentare: transformatorul de putere (T), care asigură alimentarea cu energie electrică (cu asigurarea decuplării galvanice față de rețeaua electrică) a punții redresoare comandate (PRC) și a circuitului de excitație a motorului (prin puntea redresoare (PR)), și sursa stabilizată (SS), care asigură alimentarea la tensiune continuă stabilizată a potențiometrului (P), a circuitului de excitație a tahogeneratorului (TG), a regulatorului (R) și a dispozitivului de comandă pe grilă (DCG). Operatorul uman are posibilitatea să modifice valoarea *mărimii prescrise* (de referință)  $w_p$  de la

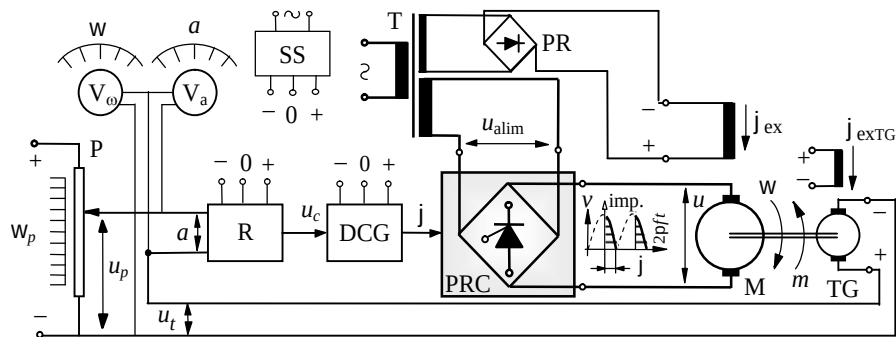


Fig.III.15. Schema funcțional – tehnologică a sistemului de reglare automată a turației motorului electric de c.c. (ex. 2.1); M – motor, TG – tahogenerator, P – potențiometru de prescriere (scala în unități de turație), R – regulator, DCG – dispozitiv de comandă pe grilă, PRC – punte redresoare comandată (imp. – impulsuri de comandă,  $v$  – tensiune pulsatorie la ieșire); elemente auxiliare: T – transformator de putere, PR – punte redresoare, SS – sursă stabilizată, voltmetre:  $V_\omega$  – scala în unități de turație,  $V_a$  – cu scala în unități procentuale

potențiometrul P (cu scala gradată în unități de măsură a turației) și să o compare cu valoarea *mărimii reglate*  $w$ , indicată de voltmetru  $V_w$  (cu scala gradată în unități de măsură a turației), conectat la bornele indusului tahogeneratorului (TG). Pentru afișarea valorii *abaterii*  $a$  se utilizează voltmetrul  $V_a$  (magnetoelectric, cu zero la mijlocul scalei) conectat direct la bornele de intrare ale regulatorului (R). Scala acestui voltmetru poate fi gradată în volți și / sau în procente din valoarea maximă posibilă a abaterii.

În ipoteza că se realizează:

$$k_p = k_t$$

(lucru posibil prin prelucrarea corespunzătoare a tensiunii  $u_t$ ), atunci se obține:

$$a = k_p(w_p - w),$$

în care  $w_p - w$  este *eroarea* dintre *turația prescrisă* (de referință) și *turația reglată* (reală). În acest caz scala gradată în procente (a voltmetrului care măsoară abaterea) exprimă și eroarea relativă procentuală dintre  $w_p$  și  $w$ .

Funcționarea sistemului de reglare automată a turației se poate lesne explica pe baza *principiului abaterii*. Într-adevăr dacă are loc o variație într-un sens a abaterii  $a$ , oricare ar fi cauza care a provocat-o (variația mărimii prescrise (de referință)  $w_p$ , variația cuplului de sarcină (perturbația)  $m$  care produce variația mărimii reglate  $w$ , variații ale parametrilor sistemului (cele mai importante fiind: ale tensiunii de alimentare a transformatorului T și ale rezistenței indusului în funcție de temperatură, toate având efecte asupra mărimii reglate  $w$ ), regulatorul (conform legii de reglare), dispozitivul de comandă pe grilă și puntea redresoare comandată produc o variație de același sens a tensiunii  $u$ . Urmează o variație de același sens a turației  $w$ , ceea ce, prin reacția negativă, conduce la diminuarea sau chiar la o variație de sens contrar (față de cea inițială) a abaterii:

$$a = w_p - w.$$

Prin alegerea adecvată a valorilor parametrilor regulatorului se poate asigura ca procesul de diminuare sau chiar de anulare a abaterii să se caracterizeze prin valori acceptabile ale indicilor de calitate definiți pe baza răspunsului indical (a se vedea II.7.1). □

## 2.2. Schema bloc structurală standard

De regulă elementele din schema bloc funcțională a unui sistem automat monovariabil au funcții de transfer cunoscute. Pot exista și excepții în care unii coeficienți ai polinoamelor unora dintre aceste funcții de transfer sunt incerti (adică definiți pe anumite intervale din  $\mathbf{R}$ ) sau chiar necunoscuți. Este cazul unora dintre funcțiile de transfer ale instalației automatizate și/sau al funcției de transfer a regulatorului (înainte de stabilirea valorilor parametrilor ajustabili).

În aceste condiții fiecărui element din schema bloc funcțională (fig.III.14) i se poate asocia câte o relație de transfer (cu funcții de transfer corespunzătoare).

Aplicând regulile de la II.2.2 și 2.3 se obține *schema bloc structurală standard* a unui sistem automat monovariabil, fig.III.16.

Transferul intrare – ieșire al sistemului din fig.III.16 este descris de ecuația:

$$Y(s) = G_0(s)G_p(s)Y_p(s) \pm G_{0w}(s)W(s), \quad (2.1)$$

în care:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} \quad (2.2)$$

$$G_{0w}(s) = \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)}. \quad (2.3)$$

Semnificațiile funcțiilor de transfer  $G_p(s)$ ,  $G(s)$ ,  $G_w(s)$  și  $G_t(s)$  sunt prezentate în fig.III.16. În plus trebuie reținut că:

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s), \quad (2.4)$$

în care  $G_R(s)$  este funcția de transfer a regulatorului,  $G_E(s)$  este funcția de transfer a elementului de execuție și  $G_{IA}(s)$  este funcția de transfer a instalației automatizate (partea situată pe calea directă).

Este de la sine înțeles că toate proprietățile unui sistem automat sunt direct legate de ecuația (2.1) și de funcțiile de transfer (2.2) și (2.3).

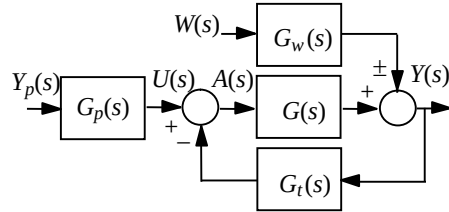


Fig.III.16. Schema bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil;  $G_p(s)$  – funcția de transfer a elementului de prescriere;  $G(s)$  – funcția de transfer a căii directe;  $G_w(s)$  – funcția de transfer a perturbației;  $G_t(s)$  – funcția de transfer a traductorului (căii de reacție)

### Exemplul 2.2 (sistem de reglare automată a turației; continuare))

Pentru ilustrarea noțiunii de schemă bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil se consideră sistemul de reglare automată a turației motorului electric de c.c. de la exemplul 2.1.

Modelul matematic al motorului electric de c.c. a fost obținut în subcap.II.2 (exemplele 2.1, 2.2 și 2.3) și schema bloc structurală are forma din fig.II.20. Pe calea directă a conexiunii «cu reacție», conform schemei bloc funcționale din fig.III.14, se găsesc:

- elementul de transfer de la  $u$  la  $w$  (descrie de  $G_{IA}(s)$ ) al motorului (fig.II.20),
- al regulatorului – descrie de funcția de transfer  $G_R(s)$ , și
- al elementului de execuție (format din dispozitivul de comandă pe grilă și puntea redresoare comandată) – descrie de funcția de transfer:

$$G_E(s) = k_g k.$$

În aceste circumstanțe schema bloc structurală standard din fig.III.16 se caracterizează prin următoarele funcții de transfer:

- pentru transferul  $a \rightsquigarrow w$  al căii directe (relația (2.4)):

$$G(s) = k_g k G_R(s) \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2},$$

- pentru transferul  $m \rightsquigarrow w$  al motorului (fig.II.20):

$$G_w(s) = -\frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2},$$

- la care, conform celor expuse la exemplul 2.1, se adaugă, pentru elementul de prescriere (referință):

$$G_p(s) = k_p,$$

și respectiv pentru traductor:

$$G_t(s) = k_t.$$

Cu aceste rezultate și cu relațiile (2.2) și (2.3) se obțin:

$$\begin{aligned} G_p(s)G_0(s) &= \frac{G_p(s)G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} = \frac{k_p k_g k G_R(s) \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}}{1 + k_t k_g k G_R(s) \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}} = \\ &= \frac{k_2 k_g k_p k G_R(s)}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_2 k_g k_t k G_R(s) + k_1 k_2}, \\ G_w(s) &= \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)} = \frac{-\frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}}{1 + k_t k_g k G_R(s) \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}} = \\ &= -\frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_2 k_g k_t k G_R(s) + k_1 k_2}. \square \end{aligned}$$

### 3. Implicații ale principiului abaterii

De regulă  $G_p(s) = k_p = \text{constant}$  (în schema din fig.III.16), adică  $U(s)$  este proporțională cu  $Y_p(s)$ . Din acest motiv și pentru simplificarea analizei care urmează se are în vedere că nu este necesară întotdeauna o distincție expresă între  $Y_p(s)$  și  $U(s)$ . Cu alte cuvinte rolul mărimii prescrise (de referință)  $Y_p(s)$  poate fi jucat și de pandantul ei  $U(s)$ , exceptând situațiile în care contextul și scopul analizei implică în mod explicit introducerea în discuție a elementului de prescriere, respectiv a ecuației:

$$U(s) = G_p(s)Y_p(s). \quad (3.1)$$

#### 3.1. Ecuația abaterii; premise pentru realizarea principiului abaterii

În conformitate cu schema bloc structurală standard a unui sistem automat monovariabil (fig.III.16) se pot scrie următoarele ecuații:

$$A(s) = U(s) - G_t(s)Y(s) \quad (3.2)$$

$$Y(s) = G(s)A(s) \pm G_w(s)W(s). \quad (3.3)$$

Eliminând  $Y(s)$  între ecuațiile (3.2) și (3.3) rezultă:

$$A(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)} U(s) \mp \frac{G_w(s)G_t(s)}{1 + G(s)G_t(s)} W(s), \quad (3.4)$$

numită *ecuația abaterii*.

Abaterrea are două componente: una determinată de *mărimea prescrisă*  $U(s)$  și cealaltă de *perturbația*  $W(s)$ . Corespunzător se disting două funcții de transfer ale abaterii:

$$G_{au}(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)}, \quad (3.5)$$

aferentă mărimii prescrise  $U(s)$ , și

$$G_{aw}(s) = \frac{G_w(s)G_t(s)}{1 + G(s)G_t(s)}, \quad (3.6)$$

aferentă perturbației  $W(s)$ .

S-a arătat la 1.2.1° că în virtutea **principiului abaterii** însăși *existența unei variații a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluția sistemului automat în sensul diminuării sau chiar anulării abaterii*. Având în vedere ecuația (3.4), această evoluție depinde de  $U(s)$  și  $W(s)$  dar și de structura și parametrii sistemului automat conform funcțiilor de transfer (3.5) și respectiv (3.6). Se poate afirma că în general  $A(s) \neq 0$ . În contrast, situația ideală (prin care se ține seama de principiul abaterii într-o formă limită ideală) este aceea în care:

$$A(s) \equiv 0. \quad (3.7)$$

Întrucât în general  $U(s) \neq 0$  și  $W(s) \neq 0$ , rezultă că (3.7) este satisfăcută numai dacă:

$$G_{au}(s) \equiv 0, \quad (3.8)$$

$$G_{aw}(s) \equiv 0. \quad (3.9)$$

Evident, în cazul sistemelor automate reale condițiile (3.8) și (3.9) nu au loc. O abordare realistă a acestei probleme constă în slăbirea condiției (3.7) și anume sub forma:

$$|A(s)| - \text{acceptabil de mic}, \quad (3.10)$$

ceea ce, corespunzător condițiilor (3.8) și (3.9), conduce la:

$$|G_{au}(s)| - \text{acceptabil de mic}, \quad (3.11)$$

$$|G_{aw}(s)| - \text{acceptabil de mic}. \quad (3.12)$$

Pe baza examinării funcțiilor de transfer (3.5) și (3.6), se observă că acestea au același numitor:

$$F(s) = 1 + G(s)G_t(s), \quad (3.13)$$

în care  $G(s)G_t(s)$  este *funcția de transfer a sistemului în circuit deschis* (sau în buclă deschisă) (a se vedea și II.2.2.3°) și  $G(s)$  este *funcția de transfer a căii directe* (din cadrul conexiunii «cu reacție»).

În aceste circumstanțe se trage concluzia că:

$$|F(s)| - \text{suficient de mare} \quad (3.14)$$

constituie premisa satisfacerii condițiilor (3.11) și (3.12).

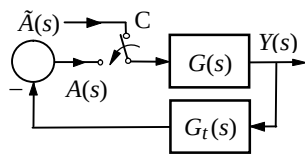
Condiția (3.14) poate fi îndeplinită prin alegerea corespunzătoare a funcției de transfer  $G(s)$  în (3.13).  $G(s)$  fiind constituită din mai mulți factori (relația (2.4)), printre care și  $G_R(s)$  (funcția de transfer a regulatorului), rezultă că satisfacerea condiției (3.14) poate fi realizată prin alegerea adecvată a lui  $G_R(s)$  și anume astfel încât:

$$|G(s)G_t(s)| - \text{suficient de mare}. \quad (3.15)$$

### 3.2. Semnificația funcției $F(s)$ pentru stabilitatea sistemului automat

Pentru a evidenția semnificația funcției  $F(s)$ , se consideră schema bloc din fig.III.16 în varianta din fig.III.17, în care  $U(s) \equiv 0$ ,  $W(s) \equiv 0$  și legătura de la comparator la elementul descris de  $G(s)$  este întreruptă.

Conform fig.III.17 se aplică  $\tilde{A}(s)$  la intrarea elementului descris de  $G(s)$  și se evaluează diferența  $\tilde{A}(s) - A(s)$ , în care  $A(s)$  este mărimea de ieșire a comparatorului. Se pot scrie



ecuațiile:

$$A(s) = -G(s)G_t(s)\tilde{A}(s), \quad (3.16)$$

$$\tilde{A}(s) - A(s) = [1 + G(s)G_t(s)]A(s). \quad (3.17)$$

Din (3.13) și (3.17) rezultă:

$$F(s) = \frac{\tilde{A}(s) - A(s)}{A(s)}, \quad (3.18)$$

Fig.III.17. Pentru evidențierea semnificației funcției  $F(s)$

ceea ce permite ca  $F(s)$  să se numească *funcția de transfer diferență a reacției*. Aceasta evidențiază efectul buclei deschise conform fig.III.17 și poate fi utilizată pentru explicarea evoluției sistemului după închiderea buclei în schema din fig.III.17 (adică  $A(s) \equiv \tilde{A}(s)$ ).

În momentul închiderii buclei prin comutatorul C, fig. III.17, situația cea mai nefavorabilă din punctul de vedere al evoluției lui  $\tilde{a}(t) \equiv a(t)$  în urma transferului prin bucla închisă este aceea în care  $G(s)G_t(s)$  produce o schimbare de semn, respectiv  $a(t)$  este de același semn cu  $\tilde{a}(t)$  imediat înaintea închiderii buclei.

La închiderea buclei sunt posibile următoarele două cazuri:

$$1^\infty |A(s)| < |\tilde{A}(s)|, \quad (3.19)$$

ceea ce, conform relației (3.16), implică în mod necesar:

$$|G(s)G_t(s)| < 1. \quad (3.20)$$

Închiderea buclei în situația (3.19), respectiv (3.20), are ca urmare  $|A(s)| = |\tilde{A}(s)| \rightarrow 0$ . Sistemul în buclă închisă are o comportare stabilă.

$$2^\infty |A(s)| \geq |\tilde{A}(s)|, \quad (3.21)$$

ceea ce, conform relației (3.16), implică în mod necesar:

$$|G(s)G_t(s)| \geq 1. \quad (3.22)$$

Închiderea buclei în situația (3.21), respectiv (3.22), nu are ca urmare  $|A(s)| = |\tilde{A}(s)| \rightarrow 0$ . Sistemul în buclă închisă are o comportare la limita stabilității sau instabilă.

Este clar că funcția  $F(s)$  (în subsidiar  $G(s)G_t(s)$ , respectiv  $G_R(s)$ ), are un rol esențial în asigurarea stabilității sistemului în bucla închisă. Funcția de transfer  $G(s)G_t(s)$  (respectiv  $G_R(s)$ ) trebuie astfel aleasă încât să aibă loc (3.20) – corespunzător unei comportări stabile.

Comparând (3.15) cu (3.20) este ușor de remarcat că pot exista unii  $s \in \mathbf{C}$  pentru care condițiile (3.15) și (3.20) pot fi contradictorii, ceea ce înseamnă că nu se pot asigura simultan o abatere acceptabil de mică (relația (3.10)) și o comportare stabilă.

Întrucât asigurarea stabilității este prioritară, rezultă că rezolvarea acestei contradicții constă în alegerea funcției de transfer  $G(s)G_t(s)$  (respectiv  $G_R(s)$ ) astfel încât (3.15) și (3.20) să fie satisfăcute (pentru  $s \in \mathbf{C}$  adecvați), în cadrul unui compromis acceptabil.

### 3.3. Abaterea staționară

Majoritatea sistemelor automate monovariabile (fig.III.16) utilizate în tehnică funcționează pe durate relativ mari de timp (comparativ cu constantele de timp ale sistemului) în regim staționar deoarece  $u(t)$  și  $w(t)$  sunt funcții constante pe porțiuni. În acest context valoarea abaterii staționare poate oferi indicații asupra calității sistemului.

Se consideră că  $y_p(t)$ ,  $u(t)$  și  $w(t)$  sunt funcții treaptă, adică:

$$y_p(t) = y_{ps} S(t), \quad Y_p(s) = \frac{1}{s} y_{ps}, \quad (3.23)$$

$$u(t) = u_s S(t), \quad U(s) = \frac{1}{s} u_s, \quad (3.24)$$

$$w(t) = w_s S(t), \quad W(s) = \frac{1}{s} w_s. \quad (3.25)$$

Utilizând (3.4), cu (3.24) și (3.25), și teorema valorii finale (Anexa A.1.2.b.3<sup>o</sup>) se poate scrie:

$$a_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sA(s) = \frac{1}{1 + G(0)G_t(0)} u_s \pm \frac{G_w(0)G_t(0)}{1 + G(0)G_t(0)} w_s. \quad (3.26)$$

În general  $a_s \neq 0$ .

Un caz particular remarcabil este acela în care  $G(s)$  are un pol în origine (în  $s = 0$ ; există o componentă integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator). Atunci  $|G(0)| = +\infty$  și cum în mod uzual  $G_t(0)$ ,  $G_w(0)$  sunt finite, din (3.26) se obține:

$$a_s = 0. \quad (3.27)$$

Acest rezultat, pe lângă importanța practică deosebită, *ilustrează virtuțile principiului abaterii atunci când, suplimentar față de reacția negativă, sistemul automat are o componentă integratoare (I) pe calea directă*. Firește, este posibil ca această componentă integratoare să aibă efecte nedorite asupra BIBO-stabilității sistemului automat. Pentru a

evita acest lucru,  $G(s)$  poate fi înzestrat în continuare (prin  $G_R(s)$ ) cu poli și zerouri astfel localizați încât să se asigure BIBO-stabilitatea (a se vedea III.4) dar și menținerea rezultatului (3.27).

### 3.4. Efectul perturbației; caracteristica statică

Transferul intrare – ieșire al sistemului automat cu schema din fig.III.15 este descris de ecuația (2.1), cu (2.2) și (2.3). În ipoteza că sistemul funcționează pe durate relativ mari de timp în regim staționar, o posibilitate de apreciere a efectului valorii staționare  $w_s$  a perturbației asupra valorii staționare  $y_s$  a mărimii reglate o oferă *caracteristica statică*:

$$y_s = f(w_s).$$

Se consideră că  $y_p(t)$  și  $w(t)$  sunt funcții treaptă de forma (3.23) și (3.25). Utilizând (2.1), în care se consideră numai semnul  $[+]$  între termenii din membrul drept deoarece semnul real se consideră inclus în  $G_{0w}(s)$  (respectiv în  $G_w(s)$ ), și teorema valorii finale (Anexa A.12.b.3<sup>o</sup>) se poate scrie:

$$y_s = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ G_0(s)G_p(s) \frac{y_{ps}}{s} + G_{0w}(s) \frac{w_s}{s} \right] =$$

$$= G_0(0)G_p(0)y_{ps} + G_w(0)w_s,$$

respectiv:

$$y_s = y_0 + S_0 w_s, \quad (3.28)$$

în care (utilizând (2.2) și (2.3)):

$$y_0 = G_0(0)G_p(0)y_{ps} = \frac{G(0)G_p(0)}{1 + G(0)G_t(0)} y_{ps}, \quad (3.29)$$

$$S_0 = G_{0w}(0) = \frac{G_w(0)}{1 + G(0)G_t(0)}. \quad (3.30)$$

Ecuația (3.28) reprezintă *caracteristica statică* intrare – ieșire a sistemului automat. Graficul este reprezentat în fig.III.18;  $y_0$  se numește valoarea *de mers în gol* a mărimii reglate (se obține pentru  $w_s = 0$ ) și  $S_0$  este *statismul* (panta) caracteristicii statice. Exceptând cazul  $S_0 = 0$ , orice variație a perturbației  $w_s$  determină o variație corespunzătoare a mărimii reglate.

De regulă  $y_0$  și  $S_0$  pot fi modificate între anumite limite cu ajutorul lui  $y_{ps}$  și a unor parametri ai regulatorului astfel încât caracteristica statică să fie conformă cu cerințele tehnologice.

În situația în care  $G(s)$  are un pol în origine (în  $s = 0$ ; există o componentă integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator) se obține  $|G(0)| = +\infty$ . Întrucât  $G_p(0) = G_t(0)$  și  $G_w(0)$  sunt finite, din (3.29) și (3.30) rezultă respectiv  $y_0 = y_{ps}$  și  $S_0 = 0$ . Aceasta înseamnă că (3.28) devine:

$$y_s = y_{ps}. \quad (3.31)$$

Ecuația (3.31) arată că *mărimia reglată este invariantă în raport cu perturbația*. Rezultatul (3.31) se corelează cu (3.27). Se spune că polul în origine al funcției de transfer a căii directe (componenta integratoare (I) pe calea directă, de exemplu în regulator) asigură



*rejecția perturbației* (invarianța mărimii reglate în raport cu perturbația) în regim staționar.

Forma caracteristicii statice prezintă o importanță specială în cazul mai multor sisteme automate monovariabile care funcționează interconectat la ieșire, astfel încât mărimile de ieșire sunt egale între ele și perturbația totală este suma perturbațiilor parțiale. Ca exemple tipice se pot aminti: generatoarele electrice (cu reglarea automată a tensiunii) conectate în paralel, generatoarele de abur (cu reglarea automată a presiunii) conectate la o conductă de abur comună, motoarele electrice de tracțiune (cu reglarea automată a turației) cuplate mecanic (în cazul locomotivelor – prin roțile de tracțiune și calea de rulare).

În cazul interconectării la ieșire a două sisteme automate monovariabile caracteristicile statice au ecuațiile:

$$y_s = y_{01} + S_{01}w_{s1} \quad (3.32)$$

$$y_s = y_{02} + S_{02}w_{s2} \quad (3.33)$$

și graficele din fig.III.19.

Caracteristica statică echivalentă a ansamblului celor două sisteme automate interconectate la ieșire are ecuația (3.28) în care perturbația totală este:

$$w_s = w_{s1} + w_{s2}. \quad (3.34)$$

Eliminând  $w_{s1}$  și  $w_{s2}$  între ecuațiile (3.32) – (3.34) se obține (3.28) în care:

$$y_0 = \frac{S_{01}y_{02} + S_{02}y_{01}}{S_{01} + S_{02}}, \quad S_0 = \frac{S_{01}S_{02}}{S_{01} + S_{02}}. \quad (3.35)$$

Din (3.32), (3.33) și fig.III.19 rezultă că perturbația totală  $w_s$  se repartizează între sistemele componente conform cu (3.34) dar și în funcție de parametri  $y_{01}$ ,  $S_{01}$  și  $y_{02}$ ,  $S_{02}$  ai celor două caracteristici statice. Modificarea acestor parametri conduce la schimbarea repartiției perturbațiilor parțiale  $w_{s1}$  și  $w_{s2}$  între sisteme, conform relației (3.34). Orice variație a perturbației totale  $w_s$  (repartizată între sistemele componente) are ca urmare, conform ecuației (3.28), cu (3.35), o variație corespunzătoare a mărimii reglate  $y_s$ .

În cazul în care sistemul 1 are o componentă integratoare (I) pe calea directă (un pol în origine, de exemplu în regulator), rezultă  $S_{01} = 0$ . Ecuația (3.32) devine:

$$y_s = y_{sp1} \quad (3.36)$$

iar ecuația (3.33) rămâne neschimbată. Graficele sunt prezentate în fig.III.20.

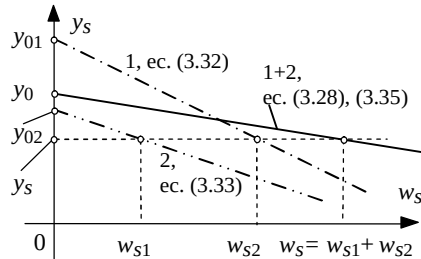


Fig.III.19. Caracteristicile statice pentru două sisteme automate, ambele cu statism negativ, interconectate la ieșire

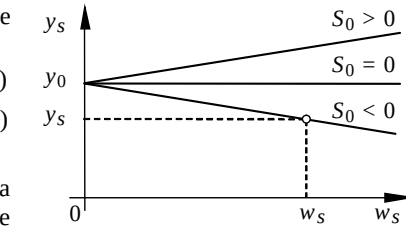


Fig.III.18. Caracteristica statică  $y_s = f(w_s)$  a unui sistem automat monovariabil (ecuația (3.28)); pentru  $S_0 = 0$ ,  $y_s$  este invariant în raport cu  $w_s$

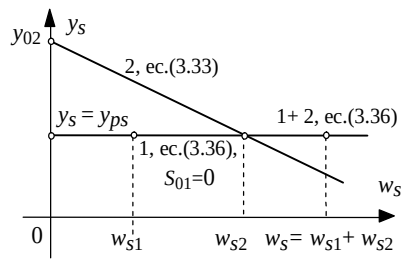


Fig.III.20. Caracteristicile statice a două sisteme automate, unul cu statism nul și celălalt cu statism negativ, interconectate la ieșire

Din (3.35), (3.28) și  $S_{01} = 0$  rezultă că (3.36) este în același timp și ecuația caracteristicii statice echivalente a ansamblului celor două sisteme interconectate la ieșire. Se asigură *rejecția perturbației* în regim staționar în sensul că mărimea reglată  $y_s$  este *invariantă* în raport cu perturbația totală  $w_s$ . Aceasta se repartizează între sistemele componente în modul deja prezentat. Pentru  $y_{01} = \text{const.}$  și  $w_s = \text{const.}$  modificarea repartiției perturbațiilor parțiale  $w_{s1}$  și  $w_{s2}$  este posibilă numai prin parametrii  $y_{02}$  și  $S_{02}$  ai celui de al doilea sistem.

În cazul în care ambele sisteme automate au câte o componentă integratoare (I) pe calea directă, rezultă  $S_{01} = S_{02} = 0$  și ecuațiile (3.32) și (3.33) devin:

$$y_s = y_{ps1}, \quad y_s = y_{ps2}. \quad (3.37)$$

Sistemul de ecuații (3.37) este (matematic) imposibil, exceptând cazul:

$$y_{ps1} = y_{ps2}. \quad (3.38)$$

Deși condiția (3.38) rezolvă problema existenței unei soluții a sistemului (3.37), din punct de vedere practic condiția (3.38) nu este nicidecum satisfăcătoare, deoarece ea trebuie realizată foarte precis și în plus variații oricât de mici ale valorilor prescrise (de referință)  $y_{ps1}$  și  $y_{ps2}$  conduc la (3.37) cu:

$$y_{ps1} \neq y_{ps2}. \quad (3.39)$$

În cazul unor sisteme automate reale interconectate la ieșire, de exemplu în cel al unor generatoare electrice de c.c. (cu reglare automată de tensiune) conectate în paralel, situația (3.37), (3.39) trebuie evitată deoarece lipsa unei repartizări controlate a perturbației între sistemele automate poate conduce la depășirea limitelor normale de funcționare. Referitor la exemplul a două generatoare electrice, una dintre mașinile electrice (și anume cea a cărei mărime prescrisă (de referință) este mai mică) intră în regim de motor electric. O astfel de situație este anormală având în vedere că respectiva mașină electrică este antrenată de un motor termic care ar trebui să-i asigure funcționarea în regim de generator electric.

### Exemplul 3.1 (sistem de reglare automată a turației; continuare)

Se consideră sistemul de reglare automată a turației motorului electric de c.c. de la exemplele 2.1 și 2.2 (fig.III.15). Se cere să se determine caracteristica statică  $w_s = f(m_s)$  în următoarele cazuri: a) regulator P; b) regulator PI; c) regulator P și aplicarea principiului compensației.

Conform rezultatelor de la exemplele 2.1 și 2.2 și relațiilor (3.29) și (3.30), funcțiile de transfer care trebuie avute în vedere sunt:

$$G(s) = k_g k_{GR}(s) \frac{k_2}{(Ls + R)(Js + K_3) + k_1 k_2}, \quad G_w(s) = -\frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + K_3) + k_1 k_2}$$

$$G_p(s) = k_p, \quad G_t(s) = k_t,$$

$$G_p(s)G_0(s) = \frac{k_2 k_g k_p k_{GR}(s)}{(Ls + R)(Js + K_3) + k_2 k_g k_p k_{GR}(s) + k_1 k_2},$$

$$G_{0w}(s) = -\frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + K_3) + k_2 k_g k_p k_{GR}(s) + k_1 k_2}.$$

În  $G_w(s)$  a fost inclus și semnul  $[-]$  deoarece cuplul de sarcină  $m > 0$  crescător determină o scădere a vitezei unghiulare  $w$ .

Caracteristica statică a sistemului considerat are ecuația:

$$w_s = w_0 + S_0 m_s$$

a) Funcția de transfer a regulatorului P este  $G_R(s) = k_R$ . Conform cu (3.29) și (3.30) se obține:

$$w_0 = \frac{k_p k_g k_2 k_R k}{R k_3 + k_1 k_2 + k_t k_g k_2 k_R k} w_{ps}, \quad S_0 = -\frac{R}{R k_3 + k_1 k_2 + k_t k_g k_2 k_R k}.$$

Statismul  $S_0$  poate fi modificat cu ajutorul parametrului acordabil  $k_R$  între limitele:

- pentru  $k_R = 0$ ,  $S_0 = -R/(R k_3 + k_1 k_2)$ , care este panta caracteristicii statice a motorului (fără automatizare);
- pentru  $k_R \rightarrow +\infty$ ,  $S_0 \rightarrow 0$ .

O dată ales statismul prin valoarea lui  $k_R$ , valoarea de mers în gol,  $w_0$ , se stabilește prin valoarea prescrisă (de referință)  $w_{ps}$ .

b) Funcția de transfer a regulatorului PI este  $G_R(s) = k_R + 1/T_1 s$ ; rezultă  $G_R(0) = +\infty$ . Conform relațiilor (3.29) și (3.30) se obține:  $w_0 = (k_p w_{ps})/k_t$ ,  $S_0 = 0$ .

Prin prelucrarea adecvată a tensiunii  $u_t$ , se poate realiza  $k_p = k_t$ , ceea ce implică  $w_0 = w_{ps}$ . Se obține caracteristica statică:  $w_s = w_{ps}$ , care asigură rejecția perturbației în regim staționar, adică invarianța mărimii reglate (viteza unghiulară  $w_s$ ) de perturbație (cuplul de sarcină  $m_s$ ) în regim staționar.

c) Aplicarea principiului compensației constă, ca soluție de principiu, în introducerea unui traductor de cuplu de sarcină (TC se montează pe axul dintre motor și mașina acționată), cu funcția de transfer  $G_{tm}(s) = k_{tm}$ , și a unui amplificator (A), cu funcția de transfer  $G_{am}(s) = k_{am}$ , conform schemei din fig.III.21 (se adaugă în schema din fig.III.15).

Funcțiile de transfer  $G(s)$ ,  $G_p(s)$ ,  $G_t(s)$  și  $G_0(s)$ , cu  $G_R(s) = k_R$ , rămân neschimbate. Datorită legăturii de la  $m$  la  $u_c$  (fig.III.21) funcția de transfer  $G_w(s)$ , ținând seama și de fig.II.20, devine:

$$G_w(s) = \frac{k_{tm} k_{am} k_g k_2 k - (Ls + R)}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}$$

În aceste condiții  $w_0$  are expresia de la punctul a. În schimb, conform formulei (3.30),  $S_0$  are acum expresia

$$S_0 = \frac{k_{tm} k_{am} k_g k_2 k - R}{R k_3 + k_1 k_2 + k_t k_g k_2 k_R k}$$

Statismul  $S_0$  poate fi modificat între limite relativ largi cu ajutorul parametrului ajustabil  $k_{am} \in \mathbf{R}$ , ceea ce asigură flexibilitate în stabilirea formei caracteristicii statice  $w_s = f(m_s)$ .

Soluțiile b, c asigură rejecția perturbației în regim staționar. Deosebirea între ele este remarcabilă. Rejecția b este *structurală*: prin reacția negativă și componenta integratoare în regulator, *independent de parametrii sistemului*. Rejecția c este *parametric* – structurală: prin parametrul  $k_{am} = R/k_{tm} k_g k_2 k$  care asigură compensarea efectului perturbației, dar *dependent de parametrii*  $R$ ,  $k_{tm}$ ,  $k_g$ ,  $k_2$ ,  $k$  care, practic, nu toți sunt efectiv constanți. □

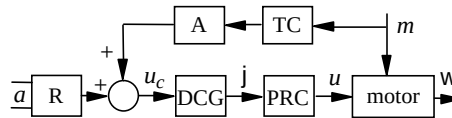


Fig.III.21. Aplicarea principiului compensației la exemplul 3.1, punctul c; R – regulator, DCG – dispozitiv de comandă pe grilă, PRC – punte redresoare comandată (a se vedea și fig. III.15)

### 3.5. Senzitivitatea la variația parametrilor

Sistemele dinamice, oricare ar fi natura lor, se află sub influența mediului în care funcționează. Ca urmare parametrii lor se modifică în timp conform schimbării în timp a factorilor mediului ambiant.

În cazul sistemelor cu structură deschisă variațiile parametrilor influențează direct transferul întrare – ieșire, respectiv mărimea de ieșire.

Spre deosebire de această situație, în cazul sistemelor dinamice cu structură închisă, cu reacție negativă, variațiile parametrilor sunt sesizate de sistem datorită variației subsecvente a abaterii. Sistemul, funcționând pe *principiul abaterii*, adică acționând în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii, determină efectiv micșorarea abaterii. Consecința este o reducere a efectului variațiilor parametrilor asupra mărimii de ieșire. O astfel de comportare nu are loc în cazul sistemelor dinamice cu structură deschisă.

În cazul sistemelor automate (fig.III.16), în ipoteza:

$$|1 + G(s)G_t(s)| \equiv |G(s)G_t(s)| \gg 1 \quad (3.40)$$

(admisă prin (3.15)) și conform relației (2.1), cu (3.1), pentru  $W(s) \equiv 0$ , se poate scrie:

$$|Y(s)| = \left| \frac{G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} \right| |U(s)| \approx \frac{1}{|G_t(s)|} |U(s)|. \quad (3.41)$$

Ipoteza (3.40) și rezultatul (3.41) au drept consecință faptul că  $Y(s)$  este afectat cel mai mult de variațiile parametrilor traductorului și într-o măsură mult mai mică de cele ale parametrilor elementelor de pe calea directă. Iată de ce trebuie acordată o atenție deosebită calității tuturor elementelor care constituie un sistem automat (fig.III.14), cu un accent special în ceea ce privește *calitatea traductorului*. Acesta trebuie să aibă precizia specificată în tema de proiectare și parametri cât mai constanți în timp, respectiv cât mai puțin dependenți de factorii mediului ambiant. În aceste circumstanțe, se poate afirma că, sub aspectul calității, *un sistem automat nu poate fi în nici un caz mai bun decât traductorul pe care respectivul sistem îl conține*.

Pentru evaluarea / aprecierea sensibilității unui sistem automat în raport cu variațiile parametrilor se utilizează funcțiile de sensibilitate ale sistemului automat.

În scopul introducerii cât mai naturale a acestor funcții, se face mai întâi o comparație între efectele variațiilor parametrilor în cazurile sistemelor cu structură deschisă și respectiv închisă (cu reacție negativă).

În cazul unui sistem dinamic cu structură deschisă descris de ecuația:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (3.42)$$

se are în vedere că datorită variației parametrilor funcția de transfer  $G(s)$  devine  $G(s) + DG(s)$ . Variația  $DG(s)$  produce la ieșire variația  $DY(s)$ , care, în virtutea liniarității, se exprimă prin:

$$DY(s) = DG(s)U(s). \quad (3.43)$$

În cazul unui sistem automat (sistem cu structură închisă, cu reacție negativă) descris de ecuația (2.1) (cu  $W(s) \equiv 0$ , pentru simplificare), înlocuind  $G(s)$  cu  $G(s) + DG(s)$  se obține:

$$Y(s) + DY(s) = \frac{G(s) + DG(s)}{1 + [G(s) + DG(s)]G_t(s)} U(s),$$

$$DY(s) = \frac{DG(s)}{[1 + G(s)G_t(s) + DG(s)G_t(s)][1 + G(s)G_t(s)]} U(s). \quad (3.44)$$

Pentru  $|G(s)| \gg |DG(s)|$  din (3.44) se obține:

$$DY(s) \cong \frac{DG(s)}{[1 + G(s)G_t(s)]^2} U(s). \quad (3.45)$$

Comparând (3.45) cu (3.43) rezultă că efectul lui  $DG(s)$  asupra lui  $DY(s)$  este mult mai redus în cazul sistemelor automate, mai ales atunci când are loc (3.15).

### 1<sup>∞</sup> Sensitivitatea la variația parametrilor căii directe

Pentru a implica considerentul de ordin comparativ deja enunțat și pentru a exclude influența mărimii  $U(s)$ , sensibilitatea  $S_0^G$  a unui sistem automat la variația parametrilor căii directe se definește sub forma raportului dintre variația relativă a funcției de transfer a sistemului automat și variația relativă a funcției de transfer a căii directe. Se poate scrie:

$$S_0^G = \frac{DG_0 / G_0}{DG / G}.$$

Trecând la limită pentru  $DG \rightarrow 0$  se obține:

$$S_0^G = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G / G} = \frac{\partial(\ln G_0)}{\partial(\ln G)}. \quad (3.46)$$

Desigur că, într-o formă corespunzător adaptată, definiția (3.46) poate fi utilizată și în cazul unui sistem dinamic cu structură deschisă. Se scrie:

$$S^G = \frac{\partial(\ln G)}{\partial(\ln G)} = 1. \quad (3.47)$$

Senzitivitatea este o funcție de variabilă complexă. Aprecierea efectivă a gradului de sensibilitate se face cu ajutorul valorilor funcției de sensibilitate. Valoarea nulă a modulului ei arată că sistemul corespunzător este insensitiv la variația parametrilor; o valoare strict pozitivă indică un anumit grad de sensibilitate la variația parametrilor. În aceste circumstanțe (3.47) arată că un sistem cu structură deschisă are o sensibilitate ridicată la variația parametrilor.

Având în vedere ecuația (2.1) a transferului intrare – ieșire, în mod similar cu (3.46), se definește și funcția de sensibilitate a sistemului automat pentru calea perturbației:

$$S_{0w}^G = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G / G} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G)}. \quad (3.48)$$

În cazul sistemului automat descris de (2.1), cu (2.2) și (2.3), aplicând (3.46) și (3.48) se obțin respectiv:

$$S_0^G = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G / G} = \frac{1}{1 + GG_t} \quad (3.49)$$

$$S_{0w}^G = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G / G} = \frac{-GG_t}{1 + GG_t}. \quad (3.50)$$

În ipoteza (3.40) rezultă  $S_0^G \cong 0$  și  $|S_{0w}^G| \cong 1$  care indică o sensibilitate foarte mică respectiv mare în raport cu variația parametrilor căii directe.

### 2<sup>∞</sup> Sensitivitatea la variația parametrilor căii perturbației

De această dată este vorba de variațiile parametrilor funcției de transfer  $G_w$  care devine  $G_w + DG_w$ .  $G_0(s)$  nu depinde de  $G_w(s)$ . În acest caz se definește numai sensibilitatea:

$$S_{0w}^{G_w} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_w / G_w} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G_w)}. \quad (3.51)$$

Aplicând (3.51) funcției de transfer (2.3) rezultă:

$$S_{0w}^{G_w} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_w / G_w} = 1, \quad (3.52)$$

ceea ce indică o sensibilitate ridicată.

### 3<sup>o</sup> Sensitivitatea la variația parametrilor căii de reacție

Se au în vedere variațiile parametrilor traductorului, ceea ce înseamnă că funcția de transfer  $G_t$  devine  $G_t + DG_t$ . În acest caz se pot defini următoarele două funcții de sensibilitate:

$$S_0^{G_t} = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G_t / G_t} = \frac{\partial(\ln G_0)}{\partial(\ln G_t)}, \quad (3.53)$$

$$S_{0w}^{G_t} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_t / G_t} = \frac{\partial(\ln G_{0w})}{\partial(\ln G_t)}. \quad (3.54)$$

În cazul sistemului automat descris de (2.1), cu (2.2) și (2.3), aplicând (3.53) și (3.54) se obțin respectiv:

$$S_0^{G_t} = \frac{\partial G_0 / G_0}{\partial G_t / G_t} = -\frac{GG_t}{1 + GG_t}, \quad (3.55)$$

$$S_{0w}^{G_t} = \frac{\partial G_{0w} / G_{0w}}{\partial G_t / G_t} = -\frac{GG_t}{1 + GG_t}. \quad (3.56)$$

În ipoteza (3.40) rezultă că  $|S_0^{G_t}| = |S_{0w}^{G_t}| \cong 1$ , ceea ce denotă o sensibilitate ridicată la variația parametrilor căii de reacție.

Relațiile (3.49), (3.50), (3.51), (3.55) și (3.56) explicitează în fond noi aspecte ale principiului abaterii. În acest sens trebuie subliniat că:

- sensibilitatea transferului  $u \rightsquigarrow y$  al unui sistem automat în raport cu variația lui  $G$  (evaluată prin  $S_0^G$ , relația (3.49)), este de regulă redusă;
- în același timp, sensibilitățile evaluate prin  $S_{0w}^G$ ,  $S_{0w}^{G_w}$ ,  $S_0^{G_t}$  și  $S_{0w}^{G_t}$  pot avea valori semnificative.

Iată de ce în situațiile în care se știe că anumiți parametri ai unui sistem automat se modifică în timp, sub acțiunea factorilor de mediu sau a altor cauze, este necesar să se adopte soluții de proiectare care asigură reducerea sensibilității, dar fără ca prin aceasta să se reducă peste limitele admisibile calitățile de BIBO-stabilitate (a cărei implicare este intrinsecă deoarece toate funcțiile de sensibilitate au la numitor  $F = 1 + GG_t$ ; a se vedea paragraful 3.2.)

### Exemplul 3.2 (sistem de reglare automată a turației; continuare)

Se consideră sistemul de reglare automată a turației motorului electric de c.c. (cu regulator P) de la exemplul 3.1. În situația în care parametrul  $k$  (factorul de amplificare al punții redresoare comandate, dependent de tensiunea rețelei electrice de alimentare) se modifică în timp, se cere să se studieze funcțiile de sensibilitate  $S_0^k$  și  $S_{0w}^k$  pentru regimul staționar și să se găsească valoarea parametrului acordabil  $k_R$  al regulatorului de tip P care asigură valori acceptabile ale funcțiilor  $S_0^k$  și  $S_{0w}^k$ .

Conform rezultatelor de la exemplul 3.1, funcțiile de transfer  $G_0(0)$  și  $G_{0w}(0)$  necesare determinării celor două funcții de sensibilitate se pot obține din caracteristica statică de la exemplul 3.1, punctul a. Acestea au expresiile:  $G_0(0) = ak_Rk/(b+ck_Rk)$ ,  $G_{0w}(0) = -R/(b+ck_Rk)$  în care s-au utilizat notațiile:  $a = k_gk_2$ ,  $b = Rk_3+k_1k_2$  și  $c = k_t a$ , cu  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ .

Conform cu relațiile (3.49) și (3.50) rezultă:

$$S_0^k = b/(b+ck_Rk), \quad |S_{0w}^k| = ck_Rk/(b+ck_Rk),$$

care, în mod evident, satisfac identitatea  $S_0^k + |S_{0w}^k| = 1$ . Graficele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.III.22.

Dacă se acordă o importanță egală celor două funcții de sensibilitate, atunci soluția corespunzătoare este:  $S_0^k = |S_{0w}^k|$  din care rezultă:  $k_Rk = b/c$ .

Pentru  $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$  în care  $k_{\min}$  și  $k_{\max}$  sunt cunoscute, rezultă că valoarea de acordare a lui  $k_R$  se poate alege:

$$k_R = \frac{1}{2}(k_{R\min} + k_{R\max}) = \frac{b}{2c} \left( \frac{1}{k_{\max}} + \frac{1}{k_{\min}} \right).$$

Este relativ ușor de observat că soluția  $S_0^k = |S_{0w}^k|$  corespunde minimului funcționalei:

$$f(k) = [(S_0^k)^2 + |S_{0w}^k|^2]/2$$

Într-adevăr, se poate scrie:

$$\frac{df(k)}{dk} = \frac{bck_R}{(b+ck_Rk)^3} (-b+ck_Rk) = 0,$$

din care rezultă soluția deja obținută:  $k_Rk = b/c$ .

În general se poate considera funcționala:

$$f(k) = (a(S_0^k)^2 + b|S_{0w}^k|^2)/2,$$

în care  $a > 0$ ,  $b > 0$ , cu  $a + b = 1$ , sunt coeficienți de ponderare prin care se acordă o importanță diferită celor două funcții de sensibilitate.

În aceste condiții din:

$$df(k)/dk = bck_R[-ab + (1-a)ck_Rk]/(b+ck_Rk)^3 = 0,$$

rezultă:  $k_Rk = ab/(1-a)c$ , cu  $a \in (0,1)$ , fixat. Valoarea de acordare a lui  $k_R$  se poate alege:

$$k_R = (k_{R\min} + k_{R\max})/2 = a b(1/k_{\max} + 1/k_{\min})/2(1-a) c. \quad \square$$

### 3.6. Efectul zgomotelor

S-a arătat în paragraful precedent că, pentru a obține o sensibilitate redusă la variația parametrilor elementelor de pe calea directă (a conexiunii cu reacție negativă), este necesar ca *elementul de pe calea de reacție negativă* (traductorul) să fie de foarte bună calitate (cu variații foarte reduse ale parametrilor). În cadrul posibilităților tehnice de realizare a unor traductoare de foarte bună calitate, soluția uzuală constă în miniaturizare, respectiv în conceperea și construirea unor dispozitive care procesează semnale de foarte mică putere. Micșorarea puterii utile procesate de traductoare nu poate fi nelimitată deoarece aceste semnale pot deveni comparabile cu așa numitele *zgomote*.

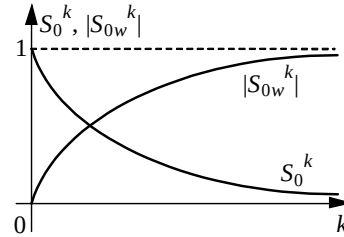


Fig.III.22. Graficele funcțiilor de sensibilitate la exemplul 3.2.

În mod generic (și metaforic), prin zgomote se înțeleg fenomene perturbatoare, de natură stohastică, cu cele mai diverse origini, care se manifestă de regulă inerent, inevitabil și independent de semnalele utile, în înseși componentele fizice din care sunt constituite sistemele reale. Ele sunt produse de surse naturale sau de alte sisteme tehnice (ca efecte secundare, de regulă neintenționate) și după natura fizică pot fi: electrice, mecanice, fluidice etc.

Sursele de zgomot sunt de mare diversitate și se pot aminti aici câteva dintre cele mai importante: agitația termică (a atomilor și electronilor), radiațiile radioactive, radiația cosmică, undele electromagnetice (radio, comunicații cu fir, linii de transport de energie) receptate accidental (de componentele unui sistem automat) prin efect de antenă sau prin inducție.

În circuitele electronice cea mai importantă sursă de zgomot este agitația termică a electronilor. Din acest motiv se mai vorbește și despre zgomotul termic din dispozitivele și circuitele electronice. El se manifestă în toate elementele de circuit pasive sau active (rezistențe, joncțiuni etc.). Valoarea eficace a tensiunii la recepție a unui zgomot termic este dată de formula lui Nyquist:

$$E = 2\sqrt{kTR(f_2 - f_1)} [V],$$

în care  $k = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{Ws/grad}$  este constanta lui Boltzman,  $T$  este temperatura absolută,  $R$  este rezistența și  $f_2 - f_1$  este banda de frecvențe la recepție.

Dacă zgomotele au nivele comparabile cu semnalele utile, acestea din urmă sunt perturbate în sensul că informația utilă este mai mult sau mai puțin falsificată de zgomote.

Trebuie remarcat faptul că zgomotele se manifestă în mod normal în toate elementele unui sistem automat, dar ele au un efect perturbator evident numai în acele elemente în care se procesează semnale utile de nivel redus, comparabil cu nivelul zgomotelor. Din acest punct de vedere elementul cel mai defavorizat este traductorul, motiv pentru care în scopul evaluării efectului zgomotelor asupra unui sistem automat se adoptă schema bloc structurală din fig.III.23, în care sursa de zgomot este plasată la ieșirea traductorului.

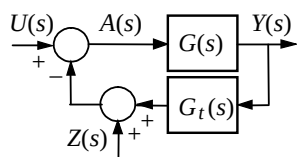


Fig.III.23. Schema bloc structurală pentru evaluarea efectului zgomotului

Din această schemă rezultă că efectul zgomotului  $Z(s)$  poate fi comparabil cu al mărimii (prescrise)  $U(s)$ , fapt confirmat de relația intrare – ieșire:

$$Y(s) = G_0(s)U(s) - G_0(s)Z(s)$$

sau de expresia abaterii:

$$A(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)} [U(s) - Z(s)]. \quad (3.57)$$

Dacă se realizează condiția (3.15) și pentru acei  $s$  pentru care  $|Z(s)|$  are valori mari, atunci cea de a doua componentă din (3.57), cauzată de zgomot, poate fi redusă la valori acceptabile. Este însă de domeniul evidenței că principalul mijloc de reducere a efectului zgomotului constă în reducerea lui  $|Z(s)|$  prin conceperea și construcția unor traductoare de foarte bună calitate și cu zgomot (propriu sau receptat din alte dispozitive sau sisteme) cât mai redus.



## 4. Stabilitatea sistemelor automate

### 4.1. Polii și zerourile sistemului automat

Se au în vedere schema bloc structurală standard din fig.III.16 și ecuația transferului intrare – ieșire (2.1), cu (2.2), (2.3), în care  $G_p(s) = k_p$ , așa cum s-a arătat în alineatul introductiv de la începutul subcap.3.

În legătură cu funcțiile de transfer (2.2) și (2.3) se ține seama că:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q_a(s)Q_b(s)}{P_a(s)P_b(s)} \quad (4.1)$$

$$G_t(s) = \frac{Q_t(s)}{P_t(s)}, \quad (4.2)$$

$$G_w(s) = \frac{Q_w(s)}{P_a(s)}, \quad (4.3)$$

în care:

$P(s)$  este polinomul polilor căii directe,

$P_a(s)$  este polinomul polilor instalației automatizate și

$P_b(s)$  este polinomul polilor regulatorului și elementului de execuție;

$Q(s)$  este polinomul zerourilor căii directe,

$Q_a(s)$  este polinomul zerourilor instalației automatizate ( $P_a(s)$  și  $Q_a(s)$  sunt relativ prime) și

$Q_b(s)$  este polinomul zerourilor regulatorului și elementului de execuție ( $P_b(s)$  și  $Q_b(s)$  sunt relativ prime);

$P_t(s)$  este polinomul polilor căii de reacție;

$Q_t(s)$  este polinomul zerourilor căii de reacție ( $P_t(s)$  și  $Q_t(s)$  sunt relativ prime);

$Q_w(s)$  este polinomul zerourilor căii perturbației ( $P_a(s)$  și  $Q_w(s)$  sunt relativ prime).

În aceste circumstanțe din (2.2), (2.3), cu (4.1) – (4.3), rezultă respectiv:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{Q(s)P_t(s)}{P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s)}, \quad (4.4)$$

$$G_{0w}(s) = \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)} = \frac{Q_{0w}(s)}{P_0(s)} = \frac{Q_w(s)P_t(s)P_b(s)}{P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s)}, \quad (4.5)$$

în care:

$$P_0(s) = P(s)P_t(s) + Q(s)Q_t(s) \quad (4.6)$$

este polinomul polilor sistemului automat,

$$Q_0(s) = Q(s)P_t(s) \quad (4.7)$$

este polinomul zerourilor sistemului automat pentru transferul  $u \rightsquigarrow y$ , și:

$$Q_{0w}(s) = Q_w(s)P_t(s)P_b(s) \quad (4.8)$$

este polinomul zerourilor sistemului automat pentru transferul  $w \rightsquigarrow y$ .

Din (4.7) și (4.8) rezultă respectiv următoarele:

- a) mulțimea zerourilor sistemului automat pentru transferul  $u \rightsquigarrow y$  este egală cu reuniunea mulțimii zerourilor căii directe și a mulțimii polilor căii de reacție;
- b) mulțimea zerourilor sistemului automat pentru transferul  $w \rightsquigarrow y$  este egală cu reuniunea mulțimii zerourilor căii perturbației, a mulțimii polilor regulatorului și elementului de execuție și a mulțimii polilor căii de reacție.

Spre deosebire de această situație, din (4.6) rezultă că:

- c) mulțimea polilor sistemului automat este în general diferită de reuniunea mulțimii polilor căii directe, a mulțimii căii de reacție, a mulțimii zerourilor căii directe și a mulțimii zerourilor căii de reacție.

Se spune că **reacția negativă alocă polii** și (parțial) zerourile sistemului automat. În privința zerourilor se poate afirma că *zerourile căii directe și ale căii perturbației sunt invariante în raport cu reacția negativă* deoarece aceste zerouri se regăsesc (nemodificate) ca zerouri ale sistemului automat respectiv pentru transferurile  $u \rightsquigarrow y$  și  $w \rightsquigarrow y$ .

Alocarea efectivă a polilor sistemului automat se realizează cu ajutorul anumitor parametri ajustabili ai căii directe (în speță ai regulatorului) și ea are ca scop localizarea polilor sistemului automat astfel încât să se asigure în primul rând *BIBO-stabilitatea* și apoi, în funcție de cerințele tehnologice, *valori acceptabile pentru indicii de calitate*.

În acest context, din (4.4), (4.5) și respectiv (4.7), (4.8) rezultă că indicii de calitate, în general, nu pot avea valori identice pentru transferurile  $u \rightsquigarrow y$  și  $w \rightsquigarrow y$  care au aceeași poli, deoarece zerourile sistemului automat pentru cele două transferuri sunt în general diferite și în consecință și răspunsurile indiciale corespunzătoare sunt diferite.

În cazul particular în care traductorul este un element de tip P, adică:

$$G_t(s) = k_t, \quad (4.9)$$

din relațiile (4.4) – (4.8) se obțin următoarele:

$$G_0(s) = \frac{Q_0(s)}{P_0(s)} = \frac{Q(s)}{P(s) + k_t Q(s)}, \quad (4.10)$$

$$G_{0w}(s) = \frac{Q_{0w}(s)}{P_0(s)} = \frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s) + k_t Q(s)}, \quad (4.11)$$

$$P_0(s) = P(s) + k_t Q(s) \quad (4.12)$$

$$Q_0(s) = Q(s), \quad (4.13)$$

$$Q_{0w}(s) = Q_w(s)P_b(s). \quad (4.14)$$

Se constată că în cazul particular (4.9) se produc unele modificări ale concluziilor a – c.

Astfel, din (4.13) și (4.14) rezultă respectiv:

- a') mulțimea zerourilor sistemului automat pentru transferul  $u \rightsquigarrow y$  este egală cu mulțimea zerourilor căii directe;
- b') mulțimea zerourilor sistemului automat pentru transferul  $w \rightsquigarrow y$  este egală cu reuniunea mulțimii zerourilor căii perturbației și a mulțimii polilor regulatorului și elementului de execuție.

Similar cu afirmația c), din (4.12) rezultă că:

- c') mulțimea polilor sistemului automat este în general diferită de reuniunea mulțimii polilor căii directe și a mulțimii zerourilor căii directe.

**Exemplul 4.1** (hodograful polilor)

Se consideră sistemul de reglare automată a turației motorului electric de c.c. de la exemplele 2.1 și 2.2, în care  $R = 0,15$ ,  $L = 0,01$ ,  $J = 300$ ,  $k_1 = 11,8$ ,  $k_2 = 11,5$ ,  $k_3 = 10$ ,  $k_g = 11,3$ ,  $k = 4,72$ ,  $k_p = k_t = 0,6$  și  $G_R(s) = k_R$  (regulator tip P). Se cere să se studieze posibilitatea de alocare a polilor sistemului automat cu ajutorul parametrului acordabil  $k_R$ .

Conform rezultatelor de la exemplul 2.2 se pot scrie funcțiile de transfer:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{613,36k_R}{3s^2 + 45,1s + 137,2}, \quad G_t(s) = \frac{Q_t(s)}{P_t(s)} = 0,6.$$

Polinomul polilor sistemului automat are expresia:

$$P_0(s) = 3s^2 + 45,1s + 137,2 + 368,02k_R.$$

Cei doi poli:

$$s_{1,2} = \begin{cases} -7,52 \pm 3,28\sqrt{1 - 11,39k_R}, & 0 \leq k_R \leq 0,087, \\ -7,52 \pm j3,28\sqrt{11,39k_R - 1}, & k > 0,087, \end{cases}$$

parcurs, pentru  $k_R \in [0, +\infty)$ , hodograful din fig.III.24.

Rezultă că parametrul acordabil  $k_R$  nu asigură o alocare complet arbitrară a polilor  $s_{1,2}$ , ci numai pe segmentul de dreaptă AB (poli reali) și pe dreapta (d) (poli complex conjugați). Săgețile indică sensul de parcurgere a hodografului atunci când parametrul  $k_R$  crește de la 0 la  $+\infty$ . □

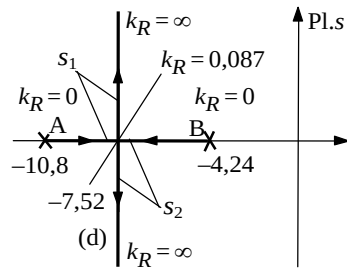


Fig.III.24. Hodograful (locul geometric al) polilor sistemului automat la exemplul 4.1

**4.2. BIBO-stabilitatea structurală**

Cunoașterea polinomului polilor (4.6) permite analiza *BIBO-stabilității* sistemului automat. În acest scop se utilizează rezultatele prezentate în subcap.II.6.

Având în vedere că proprietățile de BIBO-stabilitate ale sistemului automat depind de parametrii acordabili ai regulatorului și în general de toți parametrii sistemului automat, o problemă deosebit de importantă, inclusiv din punctul de vedere al alegerii regulatorului, este aceea a BIBO-stabilității structurale.

**Definiția 1**

Un sistem dinamic se numește *structural BIBO-stabil* dacă domeniul său de BIBO-stabilitate parametrică este nevid. □

Procedura de determinare a domeniului de BIBO-stabilitate parametrică a fost expusă la II.6.7. Determinarea efectivă a acestui domeniu pentru sisteme de ordin superior (mai mare decât 3) și cu număr mare de parametrii acordabili implică un considerabil efort de calcul. Este important ca în astfel de situații, înainte de aplicarea procedurii de la II.6.7, să se afle dacă sistemul analizat este sau nu structural BIBO-stabil.

Se știe că BIBO-stabilitatea unui sistem automat se analizează cu ajutorul polinomului polilor (4.6). Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis (a buclei deschise) este:

$$G(s)G_t(s) = \frac{M(s)}{N(s)}, \quad (4.15)$$

în care  $M(s)$  și  $N(s)$  sunt două polinoame relativ prime între ele (adică nu au factori comuni, respectiv dacă astfel de factori au existat, ei au fost deja simplificați).

Conform relațiilor (4.1), (4.2) și (4.6) rezultă că:

$$M(s) = Q(s)Q_t(s) \quad (4.16)$$

$$N(s) = P(s)P_t(s) \quad (4.17)$$

și polinomul polilor sistemului automat are expresia:

$$P_0(s) = N(s) + M(s). \quad (4.18)$$

Introducând notațiile:

$$m = \text{grad } M(s) \quad (4.19)$$

$$n = \text{grad } N(s) \quad (4.20)$$

și admitând că  $m \geq 0$  și  $n > m$ , din (4.18) – (4.20) rezultă:  $\text{grad } P_0(s) = n$ .

### **Teorema 1** (Aizerman - Gantmaher)

Sistemul în circuit deschis (bucă deschisă) reprezentat de (4.15) se caracterizează prin:

- a)  $M(s)$  este polinom hurwitzian.
- b)  $N(s)$  poate fi factorizat după cum urmează:

$$N(s) = s^p \prod_{i=1}^q (a_i s^2 + 1) \prod_{j=1}^r (b_j s - 1) N_1(s), \quad (4.21)$$

în care  $p \geq 0$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,  $b_j > 0$ ,  $j = \overline{1, r}$ ,  $q \geq 0$  și  $r \geq 0$  (în cazurile  $q = 0$  și / sau  $r = 0$  au loc prin definiție:  $\prod_{i=1}^{q=0} (a_i s^2 + 1) \equiv 1$  și / sau respectiv  $\prod_{j=1}^{r=0} (b_j s - 1) \equiv 1$ ), și  $N_1(s)$  este polinom hurwitzian de grad  $n - r$ , cu  $r = p + 2q + r$ .

O condiție necesară și suficientă ca sistemul automat să fie structural BIBO-stabil este ca să fie satisfăcute următoarele inegalități:

$$1^\circ p + r \leq m + 1;$$

$$2^\circ m, n \text{ și } r \text{ conform tabelului:}$$

| $r \backslash m$   | $m = 0$        | $m - \text{par}$   | $m - \text{impar}$ |
|--------------------|----------------|--------------------|--------------------|
| $r - \text{par}$   | $n > 2r$       | $m + n > 2r - 1$   | $m + n > 2(r - 1)$ |
| $r - \text{impar}$ | $n > 2(r - 1)$ | $m + n > 2(r - 1)$ | $m + n > 2r - 1$   |

### **Exemplul 4.2** (alegerea regulatorului)

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.III.16 în care:

$$G(s) = G_R(s)G_F(s), \quad G_F(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}, \quad G_w(s) = 0, \quad G_p(s) \equiv G_t(s) = 1.$$

Se cere să se determine  $G_R(s)$  (funcția de transfer a regulatorului) astfel încât sistemul automat să fie structural BIBO-stabil.

Este evident că:

$$G(s)G_t(s) = \frac{G_R(s)k}{T^2 s^2 + 1}.$$

**Cazul I:**  $G_R(s)$  are toți polii și zerourile în  $\{\text{Re } s < 0\}$ . Rezultă  $p = 0, q = 1, r = 0, r = 2$ .

Inegalitatea 1° din teorema 1 are forma:  $0 \leq m + 1$ .

a. Se adoptă  $m = 0$ . Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma:  $n > 4$ . Se adoptă  $n = 5$ , ceea ce înseamnă că:

$$G_R(s) = \frac{k_R}{s^3 + as^2 + bs + c},$$

în care numitorul este hurwitzian și  $k_R > 0$ .

b. Se adoptă  $m = 1$ . Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma:  $n + 1 > 2$ . Se adoptă  $n = 2$ , ceea ce înseamnă că:

$$G_R(s) = k_R(ts + 1), \quad k_R > 0, \quad t > 0.$$

**Cazul II:**  $G_R(s)$  are un pol în  $s = 0$ , restul de poli și toate zerourile fiind în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

Rezultă  $p = 1, q = 1, r = 0$  și  $r = 3$ . Inegalitatea 1° din teorema 1 are forma:  $1 \leq m + 1$ .

a. Se adoptă  $m = 0$ . Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma:  $n > 4$ . Se adoptă  $n = 5$ , ceea ce înseamnă că:

$$G_R(s) = \frac{k_R}{s(s^2 + as + b)}, \quad k_R > 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

b. Se adoptă  $m = 1$ . Inegalitatea 2° din teorema 1 are forma:  $n + 1 > 5$ . Se adoptă  $n = 5$ , ceea ce înseamnă că:

$$G_R(s) = \frac{k_R(ts + 1)}{s(s^2 + as + b)}, \quad k_R > 0, \quad t > 0, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

**Cazul III:**  $G_R(s)$  se adoptă, fără a ține seama de teorema 1, de exemplu de forma:

$$G_R(s) = \frac{k_R}{ts + 1}, \quad k_R > 0, \quad t > 0.$$

Rezultă că:

$$G(s)G_t(s) = \frac{k_R k}{(ts + 1)(T^2 s^2 + 1)}, \quad P_0(s)/T^2 t = s^3 + s^2/t + s/T^2 + (k_R k + 1)/T^2 t.$$

Matricea Hurwitz asociată acestui polinom este:

$$H_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & 1 & 0 \\ (k_R k + 1)/T^2 t & 1/T^2 & 1/t \\ 0 & 0 & (k_R k + 1)/T^2 t \end{bmatrix},$$

din care rezultă:  $\det H_1 = 1/t > 0$ ,  $\det H_2 = -k_R k/T^2 t < 0$  și  $\det H_3 = (k_R k + 1)\det H_2/T^2 t < 0$ .

Conform criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) sistemul automat este BIBO-instabil pentru orice  $k_R > 0$  și orice  $t > 0$ . În virtutea definiției 1 se poate spune că în acest caz sistemul automat nu este structural BIBO-stabil.

Este evident că problema regulatorului, conform teoremei 1, nu are soluție unică. Dintre soluțiile de la cazurile I, II, cea mai simplă este aceea de la I.b (regulator PD). □

Din punctul de vedere al aplicațiilor, simplitatea condițiilor 1° și 2° ale teoremei 1 permite formularea unor proceduri eficiente de alegere a funcției de transfer a regulatorului, așa cum s-a arătat la exemplului 4.2.

În același timp, teorema 1 confirmă, de această dată în mod riguros, una din calitățile esențiale ale *reacției negative* și anume că aceasta are *efect stabilizant* (a se vedea 1.2.1°). Într-adevăr, conform relației (4.21), sistemul în circuit deschis (format din  $G(s)G_t(s)$ ) poate fi BIBO-instabil (în cazurile în care cel puțin unul din numerele naturale  $p, q, r$  este nenul). Cu toate acestea sistemul automat (în circuit închis, cu reacție negativă), în condițiile 1° și 2° ale teoremei 1, este structural BIBO-stabil.

Un caz particular relativ frecvent întâlnit în aplicații se caracterizează prin  $q = 0, r = 0$  și  $r = p$ , cu  $p \in \{0, 1, 2\}$ . Teorema 1 se enunță sub următoarea formă particulară.

### Teorema 2

Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are expresia:

$$G(s)G_t(s) = \frac{k}{s^p} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1}, \quad (4.22)$$

în care  $k > 0, p \in \{0, 1, 2\}$  și polinoamele  $b_m s^m + \dots + b_1 s + 1, a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$  sunt hurwitziene și relativ prime între ele, cu  $p + n > m \geq 0$ .

Sistemul automat este structural BIBO-stabil pentru:

a.  $p \in \{0, 1\}$ .

b.  $p = 2, m \geq 1$ .

d. Pentru  $p \in \{0, 1, 2\}$ , condițiile 1° și 2° ale teoremei 1 se particularizează conform tabelului:

| $p$ | Condiția 1° | Condiția 2° |                      |                      |
|-----|-------------|-------------|----------------------|----------------------|
|     |             | $m = 0$     | $m = 2, 4, 6, \dots$ | $m = 1, 3, 5, \dots$ |
| 0   | $m \geq 0$  | $n \geq 1$  | $m + n \geq 0$       | $m + n \geq 0$       |
| 1   | $m \geq 0$  | $n \geq 0$  | $m + n \geq 0$       | $m + n \geq 1$       |
| 2   | $m \geq 1$  | –           | $m + n \geq 2$       | $m + n \geq 1$       |

Rezultă că pentru  $p + n > m \geq 0$  și  $p \in \{0, 1\}$  toate inegalitățile sunt satisfăcute. Pentru  $p = 2$  condiția 1° este  $m \geq 1$ , pentru care condiția 2° este de asemenea satisfăcută. □

## 5. Precizia unui sistem automat

### 5.1. Eroarea; implicații ale principiului abaterii

S-a arătat în subcap.3 că abaterea unui sistem automat,  $A(s)$ , este produsă și acționează efectiv în cadrul sistemului (fig.III.16), este determinată de  $U(s)$ ,  $W(s)$  și  $Z(s)$  (fig.III.23) și în general este neidentică nulă. S-a prezentat și s-a argumentat faptul că *reacția negativă are efecte favorabile privind reducerea abaterii*, în special a componentei sale determinată de perturbația  $W(s)$ .

În acest context este necesar să se afirme în mod explicit că o analiză pertinentă a *preciziei* unui sistem automat trebuie să se bazeze pe noțiunea de **eroare** și nu pe aceea de abatere.

Prin *eroarea*  $e$  a unui sistem automat se definește diferența dintre *mărimea prescrisă* (de referință)  $y_p$  și *mărimea de ieșire*  $y$ . Se scrie:

$$e = y_p - y. \quad (5.1)$$

Spre deosebire de abatere, *eroarea este o mărime virtuală*. Ea nu este generată și nu acționează în cadrul sistemului automat cu schema bloc structurală din fig.III.16 și se definește numai pentru studiul efectiv al preciziei sistemului, evident corelat cu faptul că menirea acestuia este de a realiza  $y \equiv y_p$ , respectiv  $e \equiv 0$  (ca situație limită ideală).

Cu referire la schema din fig.III.16 și relația (5.1) se poate scrie:

$$E(s) = Y_p(s) - Y(s) = \left[ 1 - \frac{G_p(s)G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} \right] Y_p(s) \mp \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)} W(s). \quad (5.2)$$

Se disting două componente ale erorii:

- eroarea în raport cu *mărimea prescrisă* (de referință):

$$E_p(s) = \left[ 1 - \frac{G_p(s)G(s)}{1 + G(s)G_t(s)} \right] Y_p(s); \quad (5.3)$$

- eroarea în raport cu *perturbația*:

$$E_w(s) = \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_t(s)} W(s). \quad (5.4)$$

La acestea se poate adăuga și componenta erorii determinată de zgomotul  $Z(s)$  (conform fig.III.23), în eventualitatea că  $Z(s)$  are efecte care nu pot fi neglijate.

Situația uzuală, în marea majoritate a aplicațiilor, este aceea în care:

$$G_p(s) = k_p. \quad (5.5)$$

De asemenea, un caz particular frecvent întâlnit în aplicații se caracterizează prin:

$$G_t(s) = k_t. \quad (5.6)$$

Pentru (5.5) și (5.6) se realizează de regulă și condiția:

$$k_p = k_t, \quad (5.7)$$

ceea ce, conform relației (5.3) și fig.III.16, conduce la:

$$E_p(s) = \frac{1}{1 + k_t G(s)} \frac{1}{k_t} U(s). \quad (5.8)$$

Întrucât componenta abaterii în raport cu  $U(s)$  are expresia:

$$A_p(s) = \frac{1}{1 + k_t G(s)} U(s), \quad (5.9)$$

din (5.8) și (5.9) rezultă:

$$E_p(s) = \frac{1}{k_t} A_p(s). \quad (5.10)$$

Prin operații analoage, din (5.4), (5.6) și (5.7) rezultă:

$$E_w(s) = \frac{G_w(s)}{1 + k_t G(s)} W(s). \quad (5.11)$$

Similar cu (5.9), pentru componenta abaterii în raport cu  $W(s)$  se poate scrie:

$$A_w(s) = \frac{k_t G_w(s)}{1 + k_t G(s)} W(s). \quad (5.12)$$

Din (5.11) și (5.12) se obține:

$$E_w(s) = \frac{1}{k_t} A_w(s). \quad (5.13)$$

În aceste circumstanțe din (5.2), cu (5.3), (5.10) și (5.4), (5.13) rezultă:

$$E(s) = \frac{1}{k_t} [A_p(s) \mp A_w(s)] = \frac{1}{k_t} A(s), \quad (5.14)$$

ceea ce înseamnă că pentru (5.5) – (5.7) eroarea este proporțională cu abaterea.

Pentru cazul particular  $k_t = 1$  (reacția negativă unitară) rezultă:

$$E(s) \equiv A(s), \quad (5.15)$$

*aceasta fiind singura situație în care eroarea coincide cu abaterea.*

În afara acestei excepții, între eroare și abatere există deosebiri clare și anume: de natură dimensională, de anvergură a domeniului de valori și, nu în ultimul rând, de mod de definire – eroarea ca mărime virtuală și abaterea ca mărime reală.

Distincția dintre eroare și abatere este esențială dacă se ține seama că sistemul automat funcționează pe *principiul abaterii* (nu al erorii!), așa cum s-a arătat la 3.1, și că în mod natural, precizia sistemului automat se definește și se studiază pe baza erorii.

În cazul general (corespunzător schemei din fig.III.16), conform relației (3.4) se pot scrie relațiile:

$$A_p(s) = \frac{1}{1 + G(s)G_t(s)} U(s), \quad (5.16)$$

$$A_w(s) = \frac{G_w(s)G_t(s)}{1 + G(s)G_t(s)} W(s). \quad (5.17)$$

Utilizând adecvat (5.3) și (5.4) se obțin respectiv:

$$E_p(s) = \frac{1}{G_p(s)} \{1 - G(s)[G_p(s) - G_t(s)]\} A_p(s), \quad (5.18)$$



$$E_w(s) = \frac{1}{G_t(s)} A_w(s). \quad (5.19)$$

Conform *principiului abaterii* însăși existența oricărei variații a abaterii (indiferent de cauza care a provocat-o) are ca efect evoluția sistemului automat în sensul diminuării sau chiar al anulării abaterii. Este evident că din (5.18) și (5.19) rezultă că pentru  $A_p(s) = 0$  și  $A_w(s) = 0$  se obțin  $E_p(s) = 0$  și respectiv  $E_w(s) = 0$ , dar modul în care  $|A_p(s)| \rightarrow 0$  și  $|A_w(s)| \rightarrow 0$  este în general diferit de acela în care  $|E_p(s)| \rightarrow 0$  și respectiv  $|E_w(s)| \rightarrow 0$ .

Pe baza acestor constatări și fără a pierde din vedere deosebirile dintre eroare și abatere, ***principiul abaterii se poate extinde, mutatis mutandis, și la eroare, ca mărime virtuală subsidiară abaterii.***

## 5.2. Eroarea staționară

De regulă, sistemele automate sunt concepute, realizate și menite să funcționeze, pe durate relativ mari de timp, în regim permanent și în particular în regim staționar. În aceste circumstanțe de o importanță deosebită pentru caracterizarea calităților (performanțelor) unui sistem automat este *eroarea staționară* prin care se definește și se evaluează precizia în regim staționar a sistemului automat.

*a. Eroarea staționară în raport cu mărimea prescrisă*

Pentru simplificarea scrierii și în conformitate cu (5.3) se notează:

$$G_{ep}(s) = 1 - \frac{G_p(s)G(s)}{1 + G(s)G_t(s)}, \quad (5.20)$$

prin care se desemnează funcția de transfer a erorii în raport cu mărimea prescrisă (de referință).

Se pot defini și evalua următoarele tipuri uzuale de erori staționare:

### 1<sup>o</sup> Eroarea staționară de poziționare.

În acest caz mărimea prescrisă (de referință) este funcția *treaptă unitară* pentru care:

$$y_p(t) = S(t), \quad Y_p(s) = 1/s. \quad (5.21)$$

Aplicând teorema valorii finale (Anexa A.1.2.b.3<sup>o</sup>), din (5.3) și (5.20) se obține:

$$e_{ps} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_p(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ep}(s)/s = G_{ep}(0). \quad (5.22)$$

### 2<sup>o</sup> Eroarea staționară de viteză.

În acest caz mărimea prescrisă (de referință) este *funcția rampă unitară* (cu viteza unitară) pentru care se scrie:

$$y_p(t) = ts(t), \quad Y_p(s) = 1/s^2. \quad (5.23)$$

Procedând ca la 1<sup>o</sup> rezultă:

$$e_{ps} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_p(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ep}(s)/s^2 = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ep}(s)/s. \quad (5.24)$$

### 3<sup>o</sup> Eroarea staționară de accelerație.

În acest caz mărimea prescrisă (de referință) este *funcția parabolă unitară* (cu accelerație unitară) pentru care se scrie:

$$y_p(t) = t^2 s(t) / 2, \quad Y_p(s) = 1/s^3. \quad (5.25)$$

Procedând ca la 1° se obține:

$$e_{ps} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_p(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{ep}(s) / s^2 = \lim_{s \rightarrow 0} G_{ep}(s) / s^2. \quad (5.26)$$

Din (5.22), (5.24) și (5.26) se remarcă faptul că ceea ce interesează relativ la eroarea staționară este comportarea funcției de transfer  $G_{ep}(s)$  în vecinătatea originii. În această situație este indicat să se facă uz de dezvoltarea în serie Taylor:

$$G_{ep}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, \quad c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_{ep}(s)}{ds^k} \right|_{s=0}, \quad (5.27)$$

și de o mărime prescrisă (de referință) de o formă generală:

$$y_p(t) = t^k s(t) / k!, \quad Y_p(s) = 1/s^{k+1}, \quad (5.28)$$

din care, prin particularizări adecvate, se obțin (5.21), (5.23) și (5.25).

Eroarea staționară se obține cu ajutorul teoremei valorii finale (Anexa A.1.2.b.3°) după cum urmează:

$$\begin{aligned} e_{ps} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e_p(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_k s^k + \dots) \frac{1}{s^{k+1}} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{c_0}{s^k} + \frac{c_1}{s^{k-1}} + \frac{c_2}{s^{k-2}} + \dots + c_k + c_{k+1} s + c_{k+2} s^2 + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Este evident că limita din (5.29) există și este finită dacă și numai dacă:

$$c_0 = 0, c_1 = 0, \dots, c_{k-1} = 0. \quad (5.30)$$

În această situație rezultă:

$$e_{ps} = c_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G_{ep}(s)}{ds^k} \right|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.31)$$

Coeficienții  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k, \dots$  se numesc *coeficienții erorii staționare* în raport cu mărimea prescrisă (de referință). Un sistem automat se numește de tipul  $k$  în raport cu mărimea prescrisă (de referință) dacă primul coeficient al erorii staționare nenul (în ordinea lor naturală) este  $c_k$ .

În acest stadiu al analizei este util să se examineze substratul structural al noțiunii de sistem automat de tipul  $k$ . Se are în vedere cazul mai simplu (și uzual) caracterizat prin (5.5) – (5.7) și

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (5.32)$$

în care  $P(s)$  și  $Q(s)$  sunt două polinoame relativ prime între ele, cu  $Q(0) \neq 0$ .

În aceste condiții rezultă:

$$G_{ep}(s) = \frac{1}{1 + k_t G(s)} = \frac{P(s)}{P(s) + k_t Q(s)}, \quad (5.33)$$

$$e_{ps} = c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{P(s)}{P(s) + k_t Q(s)} \right) \Big|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

• Dacă sistemul automat este de tipul  $k = 0$ , rezultă  $c_0 \neq 0$ , ceea ce implică  $P(0) \neq 0$ . Aceasta înseamnă că funcția de transfer a căii directe,  $G(s)$ , nu are nici un pol în origine (în  $s = 0$ ). *Eroarea staționară de poziționare* în raport cu mărimea prescrisă este *nenulă* (dar finită).

• Dacă sistemul automat este de tipul  $k = 1$ , rezultă  $c_0 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ , ceea ce implică:

$$P(0) = 0, \text{ respectiv } P(s) = sP_1(s),$$

în care  $P_1(s)$  nu are nici un zero în origine (adică  $P_1(0) \neq 0$ ). Funcția de transfer a căii directe,  $G(s)$ , are un pol în origine, respectiv calea directă conține un element integrator (I). *Eroarea staționară de poziționare* în raport cu mărimea prescrisă (de referință) este *nulă* și aceasta este o consecință imediată a prezenței elementului I pe calea directă. În același timp *eroarea staționară de viteză* este *nenulă* (dar finită). Dacă elementul I nu există în mod natural în partea fixată a căii directe (în elementul de execuție sau în instalația automatizată) atunci, pentru obținerea erorii staționare de poziționare nule, respectivul element I trebuie introdus în regulator.

• Dacă sistemul este de tipul  $k = 2$ , rezultă  $c_0 = 0$ , ceea ce implică

$$P(0) = 0, P(s) = sP_1(s) \text{ și}$$

$$e_{ps} = c_1 = \frac{d}{ds} \left( \frac{sP_1(s)}{sP_1(s) + k_t Q(s)} \right) \Big|_{s=0} = \frac{P_1(0)}{k_t Q(0)} = 0,$$

ceea ce conduce la

$$P_1(0) = 0, \text{ respectiv } P(s) = s^2 P_2(s),$$

în care  $P_2(s)$  are proprietatea  $P_2(0) \neq 0$  ( $P_2(s)$  nu are nici un pol în origine). Funcția de transfer a căii directe,  $G(s)$ , are doi poli în origine, respectiv calea directă conține două elemente integratoare (I) înseriate. *Eroarea staționară de poziționare* și *eroarea staționară de viteză* (ambele în raport cu mărimea prescrisă (de referință)) sunt *nule*, ca o consecință imediată a existenței a două elemente I, înseriate pe calea directă. În același timp *eroarea de accelerație* în raport cu mărimea prescrisă (de referință) este *nenulă* (dar finită). Dacă partea fixată a căii directe nu conține în mod natural două elemente I, atunci pentru obținerea erorilor staționare de poziționare și de viteză nule, aceste elemente trebuie introduse în regulator (până la numărul total de două elemente I, înseriate, pe calea directă).

În general, dar cu referire la (5.32) – (5.34), un sistem automat de tipul  $k$  are o funcție de transfer a căii directe care posedă  $k$  poli în origine ( $s = 0$ ), respectiv calea directă conține  $k$  elemente integratoare înseriate. Calitatea unui astfel de sistem este că erorile staționare (5.31) în raport cu mărimea prescrisă (de referință) de tip parabolă unitară de ordinul  $k$  (funcția (5.28) – cu derivata de ordinul  $k$  unitară) sunt nule până la ordinul  $k - 1$  inclusiv (conform (5.30)).

#### b. Eroarea staționară în raport cu perturbația

Un studiu similar cu cel de la punctul a se poate face în cazul funcției de transfer a erorii în raport cu perturbația:

$$G_{ew}(s) = \frac{G_w(s)}{1 + G(s)G_w(s)}, \quad (5.35)$$

pentru care se poate scrie seria Taylor:

$$G_{ew}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k s^k, \quad d_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} G_{ew}(s) \Big|_{s=0}. \quad (5.36)$$

Eroarea staționară se obține cu ajutorul teoremei valorii finale (Anexa A.1.2.b.3°), aplicată relației (5.4), cu (5.35), (5.36) și

$$w(t) = t^k s(t) / k!, \quad W(s) = 1 / s^{k+1}. \quad (5.37)$$

Se poate scrie:

$$e_{ws} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{d_0}{s^k} + \frac{d_1}{s^{k-1}} + \dots + d_k + d_{k+1}s + \dots \right). \quad (5.38)$$

Limita din (5.38) există și este finită dacă și numai dacă:

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \dots, d_{k-1} = 0. \quad (5.39)$$

În această situație rezultă:

$$e_{ws} = d_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} G_{ew}(s) \Big|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.40)$$

Coefficienții  $d_0, d_1, d_2, \dots, d_k, \dots$  se numesc *coeficienții erorii staționare* în raport cu perturbația. Un sistem automat se numește de tipul  $k$  în raport cu perturbația dacă primul coeficient al erorii staționare nenul (în ordinea lor naturală) este  $d_k$ .

Întrucât în general  $G_{ep}(s) \neq G_{ew}(s)$  (a se vedea (5.20) și (5.32)) rezultă că un sistem automat nu este în mod necesar de același tip în raport cu mărimea prescrisă și cu perturbația.

Pentru cazul mai simplu (și uzual) caracterizat prin (5.5) – (5.7), (5.32) și

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{P_a(s)P_b(s)}, \quad (5.41)$$

$$G_w(s) = \frac{Q_w(s)}{P_a(s)} \quad (5.42)$$

(a se vedea și (4.1) – (4.3) și textul explicativ aferent), din (5.35) și (5.36) rezultă:

$$G_{ew}(s) = \frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s) + k_t Q(s)} \quad (5.43)$$

$$e_{ws} = d_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{Q_w(s)P_b(s)}{P(s) + k_t Q(s)} \right) \Big|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots. \quad (5.44)$$

Trebuie precizat că, de regulă,  $Q_w(s)$  nu are zerouri în origine (adică  $Q_w(0) \neq 0$ ), respectiv nu există elemente derivatoare (D) înseriate pe calea perturbației.

• Dacă sistemul automat este de tipul  $k = 0$ , rezultă  $d_0 \neq 0$ , ceea ce implică  $P_b(0) \neq 0$ . Aceasta înseamnă că funcția de transfer a regulatorului și elementului de execuție nu are nici un pol în origine (în  $s = 0$ ). Eroarea staționară de poziționare în raport cu perturbația este *nenulă* (dar finită).

- Dacă sistemul automat este de tipul  $k = 1$ , rezultă  $d_0 = 0$ ,  $d_1 \neq 0$ , ceea ce implică

$$P_b(0) = 0, \text{ respectiv } P_b(s) = sP_{b1}(s),$$

în care  $P_{b1}(s)$  nu are nici un zero în origine (adică  $P_{b1}(0) \neq 0$ ). Funcția de transfer a regulatorului și elementului de execuție are un pol în origine, respectiv fie regulatorul fie elementul de execuție conține un element integrator (I). *Eroarea staționară de poziționare* în raport cu perturbația este *nulă* și aceasta este o consecință imediată a prezenței elementului I menționat mai sus. În același timp *eroarea staționară de viteză* este *nenulă* (dar finită).

- Dacă sistemul este de tipul  $k = 2$ , rezultă  $d_0 = 0$ , ceea ce implică

$$P_b(0) = 0, P_b(s) = sP_{b1}(s), P(s) = sP_1(s) \text{ și}$$

$$d_1 = \frac{d}{ds} \left( \frac{Q_w(s)sP_{b1}(s)}{sP_1(s) + k_t Q(s)} \right) \Big|_{s=0} = \frac{Q_w(0)P_{b1}(0)}{k_t Q(0)} = 0.$$

Aceasta conduce la

$$P_{b1}(0) = 0, \text{ respectiv } P_b(s) = s^2 P_{b2}(s), P(s) = s^2 P_2(s),$$

în care  $P_{b2}(s)$  și  $P_2(s)$  nu au nici un zero în origine (adică  $P_{b2}(0) \neq 0$ , și  $P_2(0) \neq 0$ ). Funcția de transfer a regulatorului și elementului de execuție are doi poli în origine, respectiv acestea, împreună, conțin două elemente integratoare (I) înseriate. *Eroarea staționară de poziționare* și *eroarea staționară de viteză* (ambele în raport cu perturbația) sunt *nule*, ca o consecință imediată a existenței celor două elemente I deja menționate. În același timp *eroarea de accelerație* în raport cu perturbația este *nenulă* (dar finită).

În general, dar cu referire la (5.41) – (5.44), un sistem automat de tipul  $k$  are o funcție de transfer a regulatorului și elementului de execuție care posedă  $k$  elemente integratoare înseriate. Calitatea unui astfel de sistem este că erorile staționare (5.44) în raport cu perturbația de tip parabolă unitară de ordinul  $k$  (funcția (5.37) – cu derivata de ordinul  $k$  unitară) sunt nule până la ordinul  $k - 1$  inclusiv (conform cu (5.39)).

#### Exemplul 5.1 (sistem de reglare automată a turației; continuare)

Pentru ilustrarea studiului privind eroarea staționară se consideră sistemul de reglare automată a turației motorului electric de c.c. analizat în cadrul exemplelor 2.1, 2.2 și 3.1.

Se cere determinarea erorilor staționare în cazurile în care regulatorul este de tip P și PI.

Schema bloc structurală are forma din fig.III.16. Funcțiile de transfer aferente au fost cele de la exemplele 2.2 sau 3.1, cu particularizarea  $k_p = k_t$ . Aceste funcții de transfer au expresiile:

$$G(s) = \frac{k_g k_2 k_R(s)}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}, \quad G_w(s) = \frac{Ls + R}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}, \quad G_p(s) = G_t(s) = k_t.$$

a)  $G_R(s) = k_R$  (regulator P)

În conformitate cu (4.1) – (4.3) și (5.41), (5.42) se identifică următoarele polinoame:

$$P(s) = P_a(s) = (Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2, \quad P_b(s) \equiv 1, \quad Q(s) = k_2 k_g k_R k, \quad Q_w(s) = Ls + R.$$

Cu aceste polinoame și utilizând relațiile (5.34) și respectiv (5.44) se obțin erorile staționare de poziționare:

$$e_{ps} = c_0 = \frac{P(0)}{P(0) + k_t Q(0)} = \frac{Rk_3 + k_1 k_2}{Rk_3 + k_1 k_2 + k_t k_2 k_g k_R k},$$

$$e_{ws} = d_0 = \frac{Q_w(0)P_b(0)}{P(0) + k_t Q(0)} = \frac{R}{Rk_3 + k_1 k_2 + k_t k_2 k_g k_R k}.$$

$$\text{b) } G_R(s) = k_R + \frac{1}{T_1 s} = \frac{k_R T_1 s + 1}{T_1 s} \quad (\text{regulator PI})$$

În conformitate cu (4.1) – (4.3) și (5.41), (5.42) se identifică următoarele polinoame:

$$P(s) = P_a(s)P_b(s) = [(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2]T_1 s,$$

$$P_a(s) = P_1(s) = (Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2,$$

$$P_b(s) = T_1 s, \quad P_{b1}(s) \equiv 1, \quad Q(s) = k_2 k_g k(k_R T_1 s + 1), \quad Q_w(s) = Ls + R.$$

Utilizând aceste polinoame și relațiile (5.34) și respectiv (5.44) se obțin erorile staționare:

- de poziționare:

$$e_{ps} = c_0 = \frac{P(0)}{P(0) + k_t Q(0)} = 0,$$

$$e_{ws} = d_0 = \frac{Q_w(0)P_b(0)}{P(0) + k_t Q(0)} = 0;$$

- de viteză:

$$e_{ps} = c_1 = \frac{P_1(0)}{k_t Q(0)} = \frac{Rk_3 + k_1 k_2}{k_t k_2 k_g k},$$

$$e_{ws} = d_1 = \frac{Q_w(0)P_{b1}(0)}{k_t Q(0)} = \frac{R}{k_t k_2 k_g k}. \quad \square$$

## 6. Performanțele unui sistem automat

### 6.1. Indici de calitate

Abilitatea de a obține un anumit regim permanent (staționar) și un anumit regim tranzitoriu rezidă în alegerea adecvată a structurii și parametrilor regulatorului în condițiile în care celelalte elemente ale sistemului automat sunt, de regulă, prestabilite (fixate). Pentru aceasta trebuie definită forma dorită a mărimii de ieșire în termenii performanțelor pe care trebuie să le realizeze sistemul automat. În mod obișnuit aceste performanțe se definesc în cazul răspunsului indicial. Se mai folosesc de asemenea răspunsul la funcția rampă (unitară) și răspunsul la funcția parabolă (unitară).

Performanțele definite cu ajutorul răspunsului indicial se evaluează prin *indici de calitate* care se împart în două grupe:

- de regim staționar: *erorile staționare* care se exprimă de regulă în formă procentuală; acestea au fost definite în subcap.5;
- de regim tranzitoriu: *suprareglarea, durata regimului tranzitoriu, durata de creștere*; acestea au fost definite la II.7.1; în funcție de necesitățile analizei și / sau sintezei unui sistem automat se mai adaugă: durata până la primul maxim; perioada oscilațiilor; numărul de perioade de oscilație pe durata regimului tranzitoriu.

Acești indici de calitate sunt specificați sau specificabili (de regulă prin tema de proiectare) și constituie obiective care urmează a fi realizate pe parcursul proiectării sistemului automat. Întrucât în majoritatea cazurilor pentru realizarea indicilor de calitate specificați se ajunge la soluții (privind structura și parametrii regulatorului) contradictorii, pe parcursul proiectării trebuie să se adopte soluții de compromis prin care să se asigure valori acceptabile pentru toți indicii de calitate.

Valorile admisibile ale indicilor de calitate se adoptă pe baza următoarelor considerente:

- Pentru *erorile staționare*: acestea trebuie să aibă valori compatibile cu clasa de precizie a traductorului. *Clasa de precizie a unui sistem automat nu poate fi în nici un caz mai bună decât clasa de precizie a traductorului utilizat.*
- Pentru *suprareglare*:  $S\% \leq 18 - 20\%$ .
- Pentru *durata regimului tranzitoriu* și *durata de creștere*: acestea trebuie să fie compatibile cu posibilitățile reale ale instalației automatizate și ale dispozitivelor de automatizare. De exemplu: regulatorul, elementul de execuție sau instalația automatizată au domenii limitate de variație a mărimilor de intrare și de ieșire. Aceste limitări au caracter tehnologic (fenomenul de saturație, puteri nominale limitate etc.). De regulă, realizarea unei viteze de variație mari a mărimii de ieșire implică generarea unei mărimi de comandă a instalației automatizate de amplitudine mare, ceea ce practic nu este posibil întotdeauna din cauza limitărilor menționate.

### 6.2. Indicatori sintetici de calitate

Faptul că între soluțiile care realizează indicii de calitate pot apărea contradicții a condus la ideea definirii unor *indicatori sintetici de calitate* care să înglobeze toate aspectele avute în vedere atunci când s-au definit indicii de calitate pe baza răspunsului indicial.

Un indicator sintetic de calitate asigură o apreciere globală a calităților unui sistem automat. El se exprimă printr-un număr real și pozitiv, poate fi calculat și măsurat experimental. Se dorește, uzual, minimizarea valorii indicatorului, ceea ce implică

înseamnă realizarea unei *optimizări* a sistemului automat. Acest fapt are consecințe asupra structurii și parametrilor sistemului automat (în primul rând ai regulatorului).

Cei mai utilizați indicatori sintetici de calitate sunt următorii:

**1<sup>o</sup> ISE** (integral of the square of the error)

$$I_1 = \int_0^T e^2(t) dt, \quad T \geq t_s.$$

Acest indicator asigură o bună distincție între răspunsurile (indiciile) slab amortizate și cele puternic amortizate.  $I_1$  = minim se obține pentru o valoare de compromis a amortizării.  $I_1$  este foarte util pentru tratări matematice și pentru simulare numerică.

**2<sup>o</sup> IAE** (integral of the absolute magnitude of the error)

$$I_2 = \int_0^T |e(t)| dt, \quad T \geq t_s.$$

Acest indicator este adecvat pentru studii de simulare numerică, dar mai dificil de utilizat în abordări matematice.

**3<sup>o</sup> ITAE** (integral of the time multiplied by the absolute magnitude of the error)

$$I_3 = \int_0^T t |e(t)| dt, \quad T \geq t_s.$$

În acest caz prezența variabilei  $t$  în integrand are ca efect o ponderare adecvată a valorilor inițiale și finale ale erorii  $e(t)$ . Astfel, valorile inițiale, de regulă mari (în valoare absolută), ale lui  $e(t)$  intră cu o pondere mică (deoarece  $t$  este mic), în schimb valorile finale, de regulă mici, ale lui  $e(t)$  intră cu o pondere mare (deoarece  $t$  este mare). Crește astfel rolul valorilor mici (finale – de regim staționar în cazul răspunsului indical) ale erorii. Prin minimizarea lui  $I_3$  se realizează implicit și o reducere a erorii pentru  $t$  de valori mari. În plus  $I_3$  are o sensibilitate ridicată la variația parametrilor sistemului automat, astfel că  $I_3$  = minim poate fi determinat experimental fără echivoc.

**4<sup>o</sup> ITSE** (integral of the time multiplied by the square of the error)

$$I_4 = \int_0^T t e^2(t) dt, \quad T \geq t_s.$$

Acest indicator are proprietăți similare cu  $I_3$ .

**Exemplul 6.1** (comparație între  $I_1$  și  $I_3$ )

Pentru examinarea comparativă a proprietăților indicatorilor  $I_1$  și  $I_3$  se consideră sistemul automat cu structura din fig.III.25, pentru care:  $G_0(s) = 1/(s^2 + 2zs + 1)$ ,  $E(s) = [(s^2 + 2zs)/(s^2 + 2zs + 1)]U(s)$ . Rezultatele obținute prin simulare pentru  $u(t) = S(t)$  sunt reprezentate în fig.III.26. Acestea confirmă cele prezentate la 1<sup>o</sup> și 3<sup>o</sup>. □

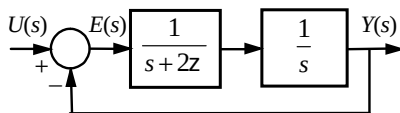


Fig. III.25. Schema bloc structurală a sistemului automat de la exemplul 6.1.

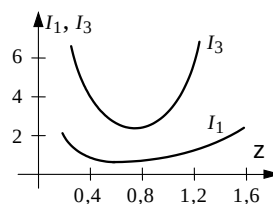


Fig. III.26. Graficele indicatorilor sintetici  $I_1$  și  $I_3$  la exemplul 6.1



De obicei legea de reglare este materializată de regulator (fig.III.14), dar există și excepții în sensul că anumite componente ale legii de reglare pot fi localizate în partea fixată a sistemului automat (de exemplu în elementul de execuție). În acest caz componenta respectivă există în mod natural și ea este folosită ca atare, nefiind necesară introducerea unei componente similare în regulator. În speță este vorba de componenta integratoare (I) care poate exista în mod natural în partea fixată.

## 1. Reglatoare realizate cu amplificatoare operaționale

### 1.1. Amplificatorul operațional

Un amplificator operațional, conform fig.IV.1, este constituit dintr-un amplificator electronic de c.c. (Acc) la care se adaugă un circuit de intrare (impedanța  $Z_1(s)$ ) și un circuit de reacție (impedanța  $Z_2(s)$ ). Amplificatorul electronic de c.c. (realizat ca circuit integrat) se caracterizează prin:

- factorul de amplificare,  $K_0$ , este foarte mare pentru un domeniu larg de frecvențe;
  - rezistențele de intrare și de ieșire au valori foarte mari și respectiv foarte mici.
- Ținând seama de notațiile din fig.IV.1, pentru domeniul de liniaritate al Acc, se scrie:

$$I_1(s) + I_2(s) = 0, \quad (1.1)$$

deoarece se consideră că rezistența proprie de intrare a Acc este infinită;

- pentru circuitul de intrare:

$$I_1(s) = \frac{A(s) - U_N(s)}{Z_1(s)}; \quad (1.2)$$

- pentru circuitul de reacție:

$$I_2(s) = \frac{X(s) - U_N(s)}{Z_2(s)}; \quad (1.3)$$

- pentru Acc:

$$X(s) = -K_0 U_N(s). \quad (1.4)$$

Eliminând  $I_1(s)$ ,  $I_2(s)$  și  $U_N(s)$  între ecuațiile (1.1) – (1.4) rezultă:

$$X(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{1}{1 - \frac{1}{K_0} \left[ 1 + \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \right]} A(s), \quad (1.5)$$

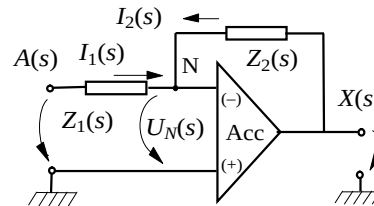


Fig.IV.1. Schema unui regulator electronic cu amplificator operațional; Acc – amplificator de c.c.,  $Z_1(s)$  – impedanța de intrare,  $Z_2(s)$  – impedanța de reacție;  $A(s)$  – abaterea,  $X(s)$  – mărimea de comandă (a elementului de execuție)

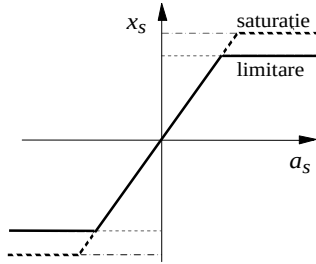


Fig. IV.2. Caracteristica statică a amplificatorului operațional (de tip P): cu zonă de saturație (naturală) și cu zonă de limitare (fig. IV.3)

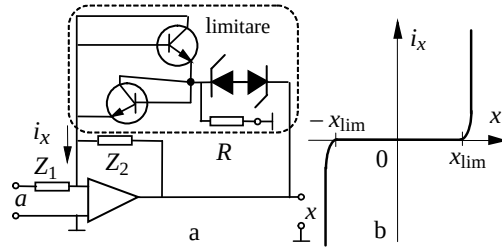


Fig. IV.3. Schema amplificatorului operațional: (a) cu circuit de limitare cu diode Zener; (b) caracteristica circuitului de limitare

în care se disting:

- funcția de transfer *ideală* a regulatorului:  $G_R^i(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$ , (1.6)

- factorul de *corecție*:  $C(s) = \frac{1}{1 - (1/K_0)[1 + Z_2(s)/Z_1(s)]}$ , (1.7)

- funcția de transfer a regulatorului:  $G_R(s) = G_R^i(s)C(s)$ . (1.8)

Din (1.7) rezultă:

$$\lim_{K_0 \rightarrow \infty} C(s) = 1, \quad (1.9)$$

ceea ce permite să se facă uzual aproximația:

$$G_R(s) \cong G_R^i(s). \quad (1.10)$$

Așa cum evidențiază relațiile (1.6) și (1.10), prin alegerea adecvată a impedanțelor  $Z_1(s)$  și  $Z_2(s)$  se pot obține funcții de transfer, respectiv legi de reglare de o relativ mare varietate de forme.

Din (1.5), respectiv (1.6) se remarcă faptul că regulatorul realizat cu amplificator operațional introduce și o schimbare de semn între intrare și ieșire. În consecință este necesară încă o schimbare de semn pe parcursul căii directe a sistemului automat. Aceasta se realizează de obicei în regulator, dar este posibilă și în elementul de execuție.

Reglatoare cu structură izomorfă cu cea din fig. IV.1 se pot realiza și cu amplificatoare pneumatice. Se obțin astfel reglatoare pneumatice utilizate în special în industria chimică și petrochimică (deoarece folosirea reglatoarelor electronice este inadecvată din cauza pericolului de explozie).

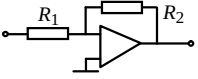
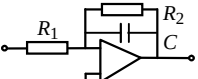
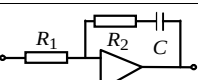
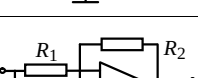
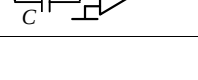
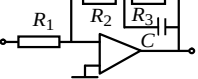
Se știe că zona de liniaritate a Acc este mărginită de fenomenul de *saturație*, așa cum se ilustrează în fig. IV.2. Funcționarea Acc în zona de saturație este anormală deoarece Acc rămâne în această zonă un timp relativ mare, chiar în situația în care cauza ( $a_s$  de amplitudine mare), care a adus Acc în saturație, a dispărut. Pentru evitarea acestui fenomen se introduce un circuit de *limitare* pe calea de reacție, de exemplu ca în fig. IV.3.a. Limitarea se realizează la un nivel (ajustabil) mai mic decât al saturației, cu ajutorul diodelor Zener (conform caracteristicii  $i_x = f(x)$  reprezentată grafic în fig. IV.3.b). Se evită astfel zona de saturație (fig. IV.2). Zona de limitare, deși similară formal cu saturația, nu are dezavantajul acesteia deoarece punctul de funcționare se poate mișca pe palierul de limitare ca și în zona de liniaritate.

Evident, un element dinamic cu o caracteristică statică cu limitare, pentru care punctul de funcționare ajunge în zona de limitare, este neliniar. În acest caz ecuațiile (1.1) și (1.4) și rezultatul lor – ecuația (1.5) nu mai reflectă ceea ce are loc în zona de limitare. Pentru a descrie și fenomenele din zona de limitare este necesară o abordare pe baza teoriei sistemelor automate neliniare (cap. VII).

### 1.2. Reglatoare uzuale

Elementele de circuit utilizate obișnuit pentru realizarea circuitelor de intrare și de reacție conform fig.IV.1 sunt rezistențele și condensatoarele (de foarte bună calitate). Cu acestea, în combinații adecvate, se pot obține practic reglatoare cu funcții de transfer prestabilite. Câteva dintre cele mai utilizate reglatoare cu amplificatoare operaționale din categoria PID sunt prezentate în tabelul IV.1.

Tabelul IV.1. Reglatoare din categoria PID

| Tip  | $Z_1(s)$                | $Z_2(s)$                                        | Parametri                                                                   | $G_R(s) = G_R^i(s)$              | Schema                                                                                |
|------|-------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| P    | $R_1$                   | $R_2$                                           | $k_p = \frac{R_2}{R_1}$                                                     | $-k_p$                           |    |
| PT1  | $R_1$                   | $\frac{R_2}{R_2Cs + 1}$                         | $k_p = \frac{R_2}{R_1}$<br>$T = R_2C$                                       | $-\frac{k_p}{Ts + 1}$            |    |
| PI   | $R_1$                   | $R_2 + \frac{1}{Cs}$                            | $k_p = \frac{R_2}{R_1}$<br>$T_1 = R_1C$                                     | $-(k_p + \frac{1}{T_1s})$        |  |
| PD   | $\frac{R_1}{R_1Cs + 1}$ | $R_2$                                           | $k_p = \frac{R_2}{R_1}$<br>$T_D = R_2C$                                     | $-(k_p + T_Ds)$                  |  |
| PDT1 | $R_1$                   | $\frac{R_2 + \frac{R_3}{R_3Cs + 1}}{R_3Cs + 1}$ | $k_p = \frac{R_2 + R_3}{R_1}$<br>$T_D = \frac{R_2R_3}{R_1}C$<br>$T = R_3C$  | $-\frac{k_p + T_Ds}{Ts + 1}$     |  |
| PID  | $\frac{R_1}{R_1Cs + 1}$ | $R_2 + \frac{1}{C_2s}$                          | $k_p = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}$<br>$T_D = R_2C$<br>$T_1 = R_1C_2$ | $-(k_p + T_Ds + \frac{1}{T_1s})$ |  |

Este important de observat că fiecare dintre parametrii regulatorului depinde de mai mulți parametri ai circuitelor de intrare și de reacție. Aceasta înseamnă că între parametrii regulatorului există o anumită *interdependență*. De exemplu în cazul regulatorului PID (tabelul IV.1) modificarea rezistenței  $R_1$  conduce la modificarea simultană a lui  $k_p$  și  $T_1$  (și anume în sensuri contrare). Această interdependență poate crea unele inconveniente la ajustarea parametrilor regulatorului. Situații de acest fel pot fi evitate realizând reglatoare

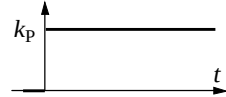
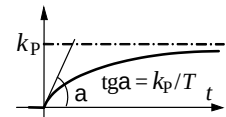
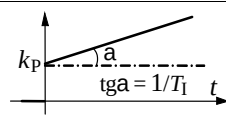
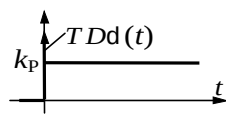
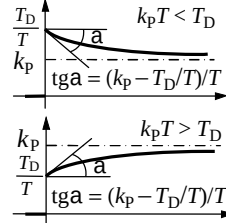
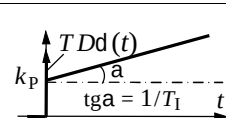
cu mai multe amplificatoare operaționale interconectate adecvat (în serie și paralel) astfel încât interdependența dintre parametrii regulatorului să se reducă sau chiar să se elimine.

### 1.3. Caracteristici ale reguletoarelor din categoria PID

Scurta prezentare care urmează se referă la legile de reglare realizate de reguletoarele din tabelul IV.1. Se au în vedere funcțiile de transfer din penultima coloană, pentru care, din motive de simplificare, se face abstracție de semnul  $[-]$  (s-a arătat la 1.1 că acest semn se compensează adecvat pe parcursul căii directe a sistemului automat).

Principalele caracteristici ale reguletoarelor din tabelul IV.1. sunt prezentate în tabelul IV.2 și anume: zerourile și polii suplimentari care pot fi introduși de regulator în funcția de transfer a căii directe a sistemului automat, legea de reglare (ca relație intrare – ieșire temporală) și graficul răspunsului indical.

Tabelul IV.2. Caracteristici ale reguletoarelor din categoria PID

| Tip  | $G_R(s) = G_R^i(s)$             | Zerouri și / sau poli suplimentari                             | Legea reglării                                          | $h_R(t) \equiv h_R^i(t)$                                                              |
|------|---------------------------------|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| P    | $k_p$                           | –                                                              | $x = k_p a$                                             |    |
| PT1  | $\frac{k_p}{Ts + 1}$            | $p = -\frac{1}{T}$                                             | $T\dot{x} + x = k_p a$                                  |   |
| PI   | $k_p + \frac{1}{T_I s}$         | $z = -\frac{1}{k_p T_I}$<br>$p = 0$                            | $x = k_p a + \frac{1}{T_I} \int_0^t a dt$               |  |
| PD   | $k_p + T_D s$                   | $z = -\frac{k_p}{T_D}$                                         | $x = k_p a + T_D \dot{a}$                               |  |
| PDT1 | $\frac{k_p + T_D s}{Ts + 1}$    | $z = -\frac{k_p}{T_D}$<br>$p = -\frac{1}{T}$                   | $T\dot{x} + x = k_p a + T_D \dot{a}$                    |  |
| PID  | $k_p + T_D s + \frac{1}{T_I s}$ | $z_{1,2} = (-k_p \pm \sqrt{k_p^2 - 4T_D/T_I})/2T_D$<br>$p = 0$ | $x = k_p a + \frac{1}{T_I} \int_0^t a dt + T_D \dot{a}$ |  |

## 2. Proprietăți ale sistemelor automate cu reglatoare P, PD, PI și PID

Scopul acestui subcapitol este acela de a ilustra, printr-o analiză succintă, proprietățile sistemelor automate echipate cu reglatoare din categoria PID. Problema sintezei regulatorului pornind de la indicii de calitate admisibili sau de la calitățile de BIBO-stabilitate impuse prin tema de proiectare face obiectul capitolelor V și respectiv VI.

Pentru a asigura o prezentare unitară și pentru obținerea unor rezultate comparabile în cazul celor patru tipuri de reglatoare, se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.IV.4 în care, pentru simplificarea studiului, partea fixată este un element de tipul PT2 cu funcția de transfer:

$$G_F(s) = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2z w_n s + w_n^2}, \quad (2.1)$$

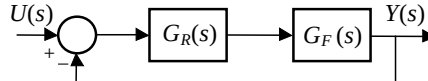


Fig.IV.4. Schema bloc structurală pentru studiul proprietăților reglatoarelor din categoria PID

în care  $k > 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $w_n > 0$  sunt fixați. În cazul polilor reali,  $G_F(s)$  are forma:

$$G_F(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}; \quad T_{1,2} = \frac{1}{w_n \left( z \mp \sqrt{z^2 - 1} \right)}, \quad z \geq 1. \quad (2.2)$$

Funcția de transfer a regulatorului,  $G_R(s)$ , urmează să fie concretizată în conformitate cu tabelul IV.2, pentru legile de reglare P, PD, PI și PID.

### 2.1. Sistem automat cu regulator P

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_p; \quad k_p > 0. \quad (2.3)$$

Conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1), (2.3), funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k_0 w_{n0}^2}{s^2 + 2z_0 w_{n0} s + w_{n0}^2}, \quad k_0 = k_p k / (k_p k + 1), \quad w_{n0} = w_n \sqrt{k_p k + 1}, \quad z_0 = z / \sqrt{k_p k + 1}. \quad (2.4)$$

Dependența acestor parametri de parametrul ajustabil  $k_p$  al regulatorului este ilustrată în fig.IV.5. Remarcabil este faptul că prin creșterea lui  $k_p$  se produce o scădere a factorului de amortizare  $z_0$ , ceea ce implică o creștere a suprareglării  $s_0$ , respectiv o creștere a erorii în regim tranzitoriu, și o scădere a duratei de creștere  $t_{c0}$ , respectiv o creștere a rapidității răspunsului indicial (datorită creșterii lui  $w_{n0}$ ).

Întrucât regulatorul utilizat este de tip P (un singur parametru ajustabil) rezultă că efectele menționate se datorează în primul rând reacției negative.

O caracterizare pertinentă a calității sistemului automat este posibilă pe baza *indicilor de calitate* ai regimurilor staționar și tranzitoriu.

În conformitate cu III.5.a, *eroarea staționară* este:

$$e_s = 1/(k_p k + 1).$$

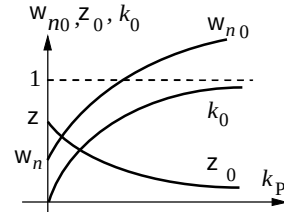


Fig.IV.5. Dependenta parametrilor  $k_0$ ,  $w_{n0}$  și  $z_0$  de  $k_p$  (relațiile (2.4)) în cazul regulatorului P

Utilizând II.7.2.c3 se poate scrie:

- pentru *suprareglare*:

$$s_0 = e^{-pz_0/\sqrt{1-z_0^2}} = e^{-pz/\sqrt{k_p k + 1 - z^2}}, 0 \leq z_0 < 1;$$

- pentru *durata regimului tranzitoriu*:

$$t_{s0} \cong \begin{cases} 6z_0/w_{n0} = 6z/w_n(k_p k + 1), & z_0 > 0,707 \\ 3/z_0 w_{n0} = 3/z w_n = \text{constant}, & 0 < z_0 \leq 0,707 \end{cases};$$

- pentru *durata de creștere*:

$$t_{c0} \cong 1,8/w_n \sqrt{k_p k + 1}, 0,3 \leq z_0 \leq 0,8.$$

Pe ansamblu efectele creșterii lui  $k_p$  sunt contradictorii:  $e_s$  și  $t_{c0}$  scad,  $t_{s0}$  inițial scade după care rămâne constant, în schimb  $s_0$  crește. Este ușor de constatat că dacă se impun valorile admisibile  $e_{s0}$ ,  $s_{0a}$ ,  $t_{s0a}$  și  $t_{c0a}$ , satisfacerea condițiilor:

$$e_s \leq e_{sa}, s_0 \leq s_{0a}, t_{s0} \leq t_{s0a}, t_{c0} \leq t_{c0a} \quad (2.5)$$

cu ajutorul singurului parametru ajustabil,  $k_p$ , este de obicei imposibilă.

Pe de altă parte realizarea unui compromis ar presupune de fapt schimbarea valorilor  $e_{sa}$ ,  $s_{0a}$ ,  $t_{s0a}$  și  $t_{c0a}$  ceea ce nu este posibil, de regulă, decât între limite relativ mici. Din acest motiv, regulatorul P este utilizat mai puțin frecvent. Un caz în care rezultatele utilizării unui regulator P pot fi satisfăcătoare este acela în care partea fixată este de tip PT1. Acest caz va fi studiat ca un caz particular la 2.2.b (relația (2.9)).

## 2.2. Sistem automat cu regulator PD

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_p + T_D s; \quad k_p > 0, \quad T_D \geq 0. \quad (2.6)$$

a) Pentru  $z \geq 0$ , conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1) și (2.5), funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k_0 w_{n0}^2 (1 + s T_D / k_p)}{s^2 + 2z_0 w_{n0} s + w_{n0}^2}, \quad k_0 = \frac{k_p k}{k_p k + 1}, \quad w_{n0} = w_n \sqrt{k_p k + 1}, \quad z_0 = \frac{2z + k w_n T_D}{2\sqrt{k_p k + 1}}. \quad (2.7)$$

Comparând (2.4) cu (2.7) se constată că dependența parametrilor  $k_0$ ,  $w_{n0}$  și  $z_0$  de  $k_p$  este similară cu aceea din cazul regulatorului P. În plus  $z_0$  depinde și de  $T_D$ . În acest caz la creșterea lui  $k_p$ , cerută de exemplu de creșterea lui  $k_0$  (respectiv de reducerea erorii staționare  $e_s = 1 - k_0$ ) și / sau de creșterea lui  $w_{n0}$  (respectiv de reducerea duratei de creștere  $t_{c0}$ ), este posibilă compensarea unei eventuale scăderi a factorului de amortizare  $z_0$  prin creșterea adecvată a lui  $T_D$ . De fapt singurul efect al componentei derivate  $T_D s$  a regulatorului este acela că prin creșterea lui  $T_D$  are loc o creștere a factorului de amortizare  $z_0$ . Acest efect este de luat în seamă atunci când factorul de amortizare  $z$  al părții fixate este foarte mic.

Regulatorul PD introduce un zero suplimentar pe calea directă a sistemului automat care se regăsește neschimbat în  $G_0(s)$  (relația (2.7)). În aceste circumstanțe duratele  $t_{s0}$  și  $t_{c0}$

depind într-o primă aproximație de  $z_0 w_{n0}$  și respectiv  $w_{n0}$ , ca în cazul elementului T2 (după cum s-a arătat la II.7.2.c3). În schimb așa cum s-a arătat la II.7.5, zeroul suplimentar poate introduce o dependență a suprareglării  $S_0$  de  $T_D/k_p$ .

b) În cazul particular  $z \geq 1$ , pentru schema din fig.IV.4, cu (2.2) și (2.5), se obține:

$$G_R(s)G_F(s) = \left(1 + \frac{T_D}{k_p}s\right) \frac{k_p k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}. \quad (2.8)$$

În aceste condiții zeroul suplimentar introdus de regulator poate fi utilizat pentru compensarea polului celui mai lent din partea fixată. Se poate deci adopta:

$$T_D/k_p = T_1,$$

ceea ce transformă partea fixată într-un element PT1; regulatorul devine de tip P și sistemul în circuit deschis are funcția de transfer:

$$G_R(s)G_F(s) = \frac{k_p k}{T_2 s + 1}.$$

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k_0}{T_0 s + 1}, \quad k_0 = k_p k / (k_p k + 1), \quad T_0 = T_2 / (k_p k + 1). \quad (2.9)$$

Pentru indicii de calitate:  $e_s = 1/(k_p k + 1)$ ,  $t_{s0} \approx 3T_0 = 3T_2/(k_p k + 1)$  și inegalitățile corespunzătoare din (2.5) se poate ajunge la o soluție adecvată pentru alegerea lui  $k_p$ , deoarece creșterea lui  $k_p$  are ca efect atât scăderea lui  $e_s$  cât și a lui  $t_{s0}$ . O dată ales  $k_p$ , în final se poate alege:

$$T_D = k_p T_1.$$

### 2.3. Sistem automat cu regulator PI

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_p + \frac{1}{T_I s}; \quad k_p \geq 0, \quad T_I > 0. \quad (2.10)$$

a) Pentru  $z \geq 0$ , conform schemei din fig.IV.4., cu (2.1) și (2.10), funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k w_n^2 (k_p s + 1/T_I)}{s^3 + 2z w_n s^2 + w_n^2 (k_p k + 1)s + k w_n^2 / T_I}. \quad (2.11)$$

Problema prioritară care trebuie rezolvată este aceea a *BIBO-stabilității*. În acest scop se asociază polinomului polilor lui  $G_0(s)$  matricea Hurwitz:

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2z w_n & 1 & 0 \\ k w_n^2 / T_I & w_n^2 (k_p k + 1) & 2z w_n \\ 0 & 0 & k w_n^2 / T_I \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Conform criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4.) din (2.12) se obțin condițiile:

$$\det H_1 = 2z w_n > 0, \quad \det H_2 = w_n^2 [2z w_n (k_p k + 1) - k / T_I] > 0, \quad \det H_3 = (k w_n^2 / T_I) \det H_2 > 0.$$

Rezultă că sistemul automat este *BIBO-stabil* dacă și numai dacă:

$$z > 0, \quad T_I > k/[2zw_n(k_p k + 1)]. \quad (2.13)$$

Inegalitatea (2.13), pentru care se dă și imaginea din fig.IV.6, este o condiție de ajustare a parametrilor regulatorului în scopul asigurării BIBO-stabilității.

Condiția (2.13) poate fi pusă și sub forma:

$$z > 0, \quad 1/T_I < 2zw_n(k_p K + 1)/k, \quad (2.14)$$

care exprimă faptul că amplitudinea  $1/T_I$  a componentei I a regulatorului PI (relația (2.10)) nu poate fi oricât de mare. Cu alte cuvinte, pentru  $1/T_I$  foarte mare ( $T_I$  foarte

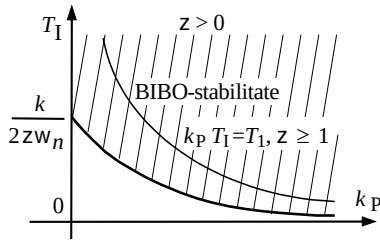


Fig. IV.6. Domeniul de BIBO-stabilitate (condiția (2.13)) în cazul regulatorului PI

mic) acțiunea componentei I a regulatorului este foarte puternică și acest lucru, în situația nesatisfacerii condiției (2.13), face ca, prin circuitul de reacție, abaterea să nu mai evolueze în sensul propriei sale diminuări sau chiar anulări, ci dimpotrivă. Sistemul automat este BIBO-instabil. Din acest motiv ajustarea efectivă a parametrului  $T_I$  (sistemul automat fiind în funcțiune) se face întotdeauna de la valori foarte mari către valori mici.

În situația în care este necesară o condiție de ajustare în scopul realizării unei rezerve de stabilitate  $a_{\min}$ , se face schimbarea de variabilă  $s = z - a_{\min}$  în polinomul polilor, urmând ca pentru noul polinom să se facă uz de criteriul Hurwitz sau de ecuațiile (6.19) de la II.6.7.

Avantajul principal al prezenței componentei I pe calea directă a sistemului automat, sub rezerva satisfacerii condiției (2.13) (sau (2.14)), este că sistemul automat realizează *eroarea staționară de poziționare nulă*, conform relației:  $e_s = 1 - G_0(0) = 0$ .

b) În cazul particular  $z \geq 1$ , pentru schema din fig.IV.4, cu (2.2) și (2.10), se obține:

$$G_R(s)G_F(s) = (k_p T_I s + 1) \frac{k/T_I}{s(T_I s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

În aceste circumstanțe zeroul suplimentar introdus de regulatorul PI poate fi utilizat pentru compensarea celui mai lent pol al părții fixate. Se adoptă  $k_p T_I = T_1$  (ramura unei hiperbole, fig.IV.6 – cu linie subțire), ceea ce transformă partea fixată într-un element PT1; în regulator rămâne componenta de tip I și sistemul în circuit deschis are acum funcția de transfer:

$$G_R(s)G_F(s) = \frac{k/T_I}{s(T_2 s + 1)}.$$

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k}{T_2 T_1 s^2 + T_1 s + k} = \frac{w^2}{s^2 + 2z_0 w_{n0} s + w_{n0}^2}, w_{n0} = \sqrt{k/T_2 T_1}, z_0 = \sqrt{T_1/k T_2}/2.$$

Ajustarea lui  $T_I$  urmează să se facă în scopul satisfacerii ultimelor trei inegalități din (2.5), eventual pe baza unui compromis acceptabil între  $s_{0a}$ ,  $t_{0a}$ ,  $t_{s0a}$ , având în vedere că



ajustarea lui  $T_I$  are efecte contrare asupra factorului de amortizare  $z_0$  și pulsației naturale  $w_{n0}$ . O dată ales  $T_I$  se determină în final:

$$k_P = T_I/T_1.$$

## 2.4. Sistem automat cu regulator PID

Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = k_P + \frac{1}{T_I s} + T_D s; \quad k_P \geq 0, \quad T_I > 0, \quad T_D \geq 0. \quad (2.15)$$

Pentru  $z \geq 0$ , conform schemei din fig.IV.4, cu (2.1) și (2.15), funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k w_n^2 (T_D s^2 + k_P s + 1/T_I)}{s^3 + w_n (2z + k w_n T_D) s^2 + w_n^2 (1 + k_P k) s + k w_n^2 / T_I}. \quad (2.16)$$

Și în acest caz este necesar să se analizeze cu prioritate *BIBO-stabilitatea*. În acest scop se asociază polinomului polilor lui  $G_0(s)$  matricea Hurwitz:

$$H_3 = \begin{bmatrix} w_n (2z + k w_n T_D) & 1 & 0 \\ k w_n^2 / T_I & w_n^2 (1 + k_P k) & w_n (2z + k w_n T_D) \\ 0 & 0 & k w_n^2 / T_I \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Conform cu criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) din (2.17) se obțin condițiile:  $\det H_1 = w_n (2z + k w_n T_D) > 0$ ,  $\det H_2 = w_n^2 [w_n (2z + k w_n T_D) (k_P k + 1) - k / T_I] > 0$ ,  $\det H_3 = (k w_n^2 / T_I) \det H_2 > 0$ . Din acestea rezultă că sistemul automat este *BIBO-stabil* dacă și numai dacă:

$$T_D > 0, \quad T_I > k / [w_n (2z + k w_n T_D) (k_P k + 1)] \quad (2.18)$$

Inegalitatea (2.18), pentru care se dă o imagine grafică în fig. IV.7, este o condiție de ajustare a parametrilor regulatorului pentru asigurarea BIBO-stabilității. Comparativ cu regulatorul PI, prezența componentei D în funcția de transfer a regulatorului oferă posibilități ceva mai largi de ajustare a parametrului  $T_I$ . Acest fapt este vizibil și din (2.18), în care creșterea / micșorarea lui  $T_D$

permite micșorarea / creșterea adecvată a lui  $T_I$ . Este de asemenea evident că legea de reglare PID îmbină toate proprietățile legilor PD și PI prezentate la 2.2 și 2.3.

Funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă este:

$$G_R(s) G_F(s) = \left( s^2 + \frac{k_P}{T_D} s + \frac{1}{T_I T_D} \right) \frac{k w_n^2 T_D}{s(s^2 + 2z w_n s + w_n^2)}.$$

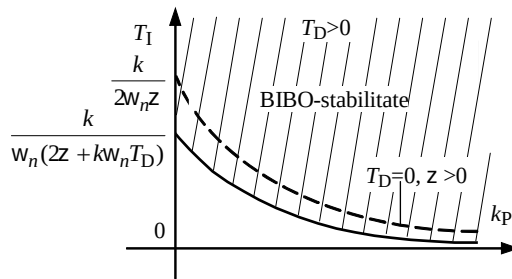


Fig.IV.7. Domeniul de BIBO-stabilitate (condiția (2.18)) în cazul regulatorului PID (mai larg față de cazul PI,  $T_D=0$ )

În această situație zerourile suplimentare introduse de regulatorul PID pot fi utilizate pentru compensarea polilor părții fixate. Se adoptă:

$$k_P/T_D = 2zw_n, \quad 1/T_I T_D = w_n^2.$$

În regulator există componenta de tip I și sistemul în circuit deschis are funcția de transfer:

$$G_R(s)G_F(s) = \frac{k w_n^2 T_D}{s}.$$

Funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{k w_n^2 T_D}{s + k w_n^2 T_D} = \frac{1}{T_0 s + 1}, \quad T_0 = \frac{1}{k w_n^2 T_D}.$$

Ajustarea parametrului  $T_D$  urmează să se facă în scopul satisfacerii condiției:

$$t_{s0} = 3T_0 \leq t_{s0a},$$

respectiv conform inegalității:

$$T_D \geq 3/k w_n^2 t_{s0a}.$$

Pe această bază, în final urmează să se ajusteze:

$$k_P = 2zw_n T_D,$$

$$T_I = 1/w_n^2 T_D.$$

## 1. Formularea problemei și ecuațiile locului rădăcinilor

### 1.1. Formularea problemei

S-a arătat deja că între performanțele unui sistem dinamic (exprimate prin indicii de calitate – a se vedea II.7.4 – 6) și localizarea polilor și zerourilor funcției sale de transfer există o legătură foarte strânsă. În cazul sistemelor automate această afirmație are o relevanță specială în conexiune cu particularitatea că în scopul sintezei regulatorului (adică a unei părți a căii directe) este necesar ca, pornind de la indicii de calitate admisibili, să se găsească ce localizare trebuie să aibă polii și zerourile sistemului automat și pe această bază să se stabilească structura și parametrii regulatorului. Nu trebuie pierdut din vedere că soluția se obține în condițiile în care o parte a sistemului automat este prestabilită; este vorba de partea fixată formată din instalația automatizată, elementul de execuție și traductorul (fig.III.14).

Schema bloc structurală avută în vedere este cea din fig.III.16, cu relațiile (III.2.1) – (III.2.4). În ipoteza că  $G_p(s) = k_p$ , se poate face abstracție de elementul de prescriere, astfel că schema bloc structurală pe care se bazează dezvoltările din acest capitol este aceea din fig.V.1. Pentru simplificarea expunerii se consideră  $W(s) \equiv 0$ , dar o abordare similară cu cea din acest capitol este posibilă și pentru  $W(s) \neq 0$ .

Conform schemei din fig.V.1, funcția de transfer a sistemului automat are expresia:

$$G_0(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)} G_t^{-1}(s), \quad (1.1)$$

în care

$$G_d(s) = G(s)G_t(s), \quad (1.2)$$

$$G(s) = G_R(s)G_E(s)G_{IA}(s) \quad (1.3)$$

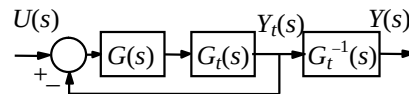


Fig.V.1. Schema bloc structurală pentru studiul metodei locului rădăcinilor

sunt funcția de transfer a sistemului în circuit deschis și funcția de transfer a căii directe (fig.III.14 și (III.2.4)). Întrucât  $G_t(s)$  este de regulă o funcție de transfer de tip P sau PT1, rezultă că  $G_t^{-1}(s)$  nu are poli finiți. Conform cu (1.1), urmează că

$$1 + G_d(s) = 0, \quad (1.4)$$

numită și *ecuația caracteristică a sistemului automat*, are ca rădăcini exact polii sistemului automat. Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis poate fi exprimată sub forma:

$$G_d(s) = kM(s)/N(s), \quad (1.5)$$

în care  $M(s)$  și  $N(s)$  sunt polinoamele (relativ prime între ele) zerourilor și respectiv polilor sistemului în circuit deschis și  $k \geq 0$  este un parametru dependent de factorul de amplificarea sistemului în circuit deschis. Din (1.4) și (1.5) se obține:

$$1 + kM(s)/N(s) = 0. \quad (1.6)$$

Prin eliminarea numitorului  $N(s)$  din (1.5) rezultă:

$$N(s) + kM(s) = 0, \quad (1.7)$$

care este *ecuația polilor sistemului automat*.

Ecuația (1.7) pune în evidență faptul că polii sistemului automat (*în circuit închis*) depind de parametrul  $k \geq 0$  și de polii și zerourile sistemului în circuit deschis. Se poate aprecia că evaluarea acestei dependențe este de o importanță cardinală atât pentru analiza proprietăților sistemului automat cât și, mai ales, pentru sinteza regulatorului. Un studiu al unei astfel de dependențe s-a făcut în subcapitolul III.4, la exemplul 4.1.

### Exemplul 1.1 (hodograful polilor)

Pentru schema bloc structurală din fig.V.1 se consideră:  $G_{IA}(s) = 1/(Ts+1)$ ,  $G_E(s) = 1$ ,  $G_t(s) = 1$  și a)  $G_R(s) = k$ , b)  $G_R(s) = k/s$ , c)  $G_R(s) = k(ts+1)/s$ .

Se cere să se studieze dependența polilor sistemului automat de parametrul  $k \geq 0$ .

a) În acest caz  $G_d(s) = G(s) = k/(Ts+1)$ , cu  $M(s) = 1$  și  $N(s) = Ts+1$ . În conformitate cu (1.7), ecuația polilor sistemului automat este:  $Ts+1+k=0$ , din care se obține polul:

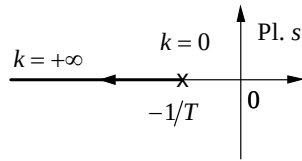


Fig.V.2. Hodograful polului sistemului automat la exemplul 1.1.a

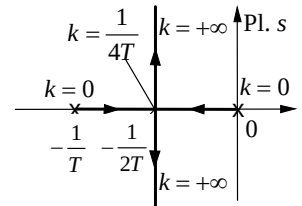


Fig.V.3. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.b

$s = -(k+1)/T$ . Pentru ilustrarea dependenței acestui pol de parametrul  $k$  se utilizează reprezentarea grafică din fig.V.2. Reprezentarea se face în planul complex deoarece, în general, polii unui sistem automat sunt numere complexe. Săgeata indică sensul de parcurgere a hodografului pentru  $k$  luând valori crescătoare; pentru  $k=0$  polul sistemului automat coincide cu polul  $s = -1/T$  al sistemului în circuit deschis; pentru  $k = +\infty$ , polul sistemului automat ajunge în punctul de la infinit al planului complex.

b) În acest caz  $G_d(s) = G(s) = k/[s(Ts+1)]$ , cu  $M(s) = 1$  și  $N(s) = s(Ts+1)$ . În conformitate cu (1.7) ecuația polilor sistemului automat este:  $Ts^2 + s + k = 0$ , din care se obțin polii:

$$s_{1,2} = \begin{cases} (-1 \pm \sqrt{1-4kT})/2T, & 0 \leq k \leq 1/4T, \\ (-1 \pm j\sqrt{4kT-1})/2T, & k > 1/4T. \end{cases}$$

Dependența acestor doi poli de parametrul  $k$  este ilustrată în fig.V.3. Comparativ cu cazul a, se observă că polul  $s = 0$ , existent în  $G_d(s)$ , produce o deplasare spre dreapta a hodografului. Pentru  $k = 0$  polii sistemului automat pornesc din polii  $s_1 = 0$  și  $s_2 = -1/T$  ai sistemului în circuit deschis; pentru  $k = 1/4T$  se obține  $s_1 = s_2 = -1/2T$  și pentru  $k > 1/4T$  cei doi poli sunt complex conjugați, ajungând în punctul de la infinit pentru  $k = +\infty$ .

c) În acest caz  $G_d(s) = G(s) = k(ts+1)/[s(Ts+1)]$ , cu  $M(s) = ts+1$  și  $N(s) = s(Ts+1)$ . În conformitate cu (1.7) ecuația polilor sistemului automat este:  $Ts^2 + (tk+1)s + k = 0$ , din care se obțin polii:

$$s_{1,2} = \begin{cases} [-(tk+1) \pm \sqrt{(tk+1)^2 - 4kT}]/2T, & (tk+1)^2 \geq 4kT, \\ [-(tk+1) \pm j\sqrt{4kT - (tk+1)^2}]/2T, & (tk+1)^2 < 4kT. \end{cases}$$

Discriminantul ecuației polilor este:  $D = t^2 k^2 + 2(t-2T)k + 1$ . Întrucât  $D$  este un polinom de gradul 2 în variabila  $k$ , trebuie avut în vedere și discriminantul ecuației  $D = 0$ . Aceasta este  $D_1 = 4T(T-t)$ .

În funcție de valorile constantelor  $T$  și  $t$  se disting următoarele cazuri:

**I.**  $t < T$ ,  $D_1 > 0$ . Rădăcinile ecuației  $D = 0$  sunt:

$$k_{1,2} = [-(t-2T) \pm 2\sqrt{T(T-t)}] / t^2, \quad k_1 < k_2.$$

1° Pentru  $k \in [0, k_1] \cup [k_2, +\infty)$  rezultă  $D \geq 0$ , ceea ce înseamnă că polii  $s_{1,2}$  sunt reali. Pentru  $k=0$  rezultă  $s_1 = 0$  și  $s_2 = -1/T$ . Pentru  $k = k_1$  rezultă

$s_{1,2} = -1/t \pm \sqrt{(1/t - 1/T)/t}$ , iar pentru  $k = k_2$  rezultă  $s_{1,2} = -1/t - \sqrt{(1/t - 1/T)/t}$ . Pentru  $k = +\infty$  se obține  $s_1 = -1/t$  și  $s_2 = -\infty$ .

2° Pentru  $k \in (k_1, k_2)$  rezultă  $D < 0$ , ceea ce înseamnă că polii  $s_{1,2}$  sunt complex conjugați. Cei doi poli descriu un cerc, fig.V.4. Pentru a demonstra acest lucru se notează:

$x = -(tk+1)/2T$ ,  $y = \sqrt{4Tk - (tk+1)^2} / 2T$ , care reprezintă părțile reală și imaginară ale polilor  $s_{1,2}$ . Eliminând  $k$  între  $x$  și  $y$  se ajunge la ecuația:  $(x+1/t)^2 + y^2 - (1/t - 1/T)/t = 0$ . Aceasta este ecuația unui cerc cu centrul în  $(-1/t, 0)$  și raza  $\sqrt{(1/t - 1/T)/t}$ .

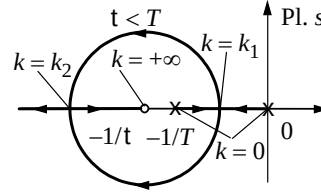


Fig.V.4. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul I)

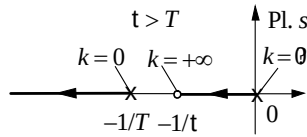


Fig.V.5. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul II)

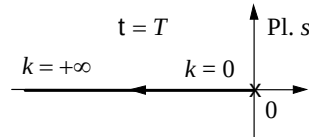


Fig.V.6. Hodograful polilor sistemului automat la exemplul 1.1.c (cazul III)

**II.**  $t > T$ ,  $D_1 < 0$ . În acest caz  $D > 0$  pentru  $k \geq 0$ , ceea ce înseamnă că polii sistemului automat,  $s_{1,2}$ , sunt reali. Pentru  $k = 0$  rezultă  $s_1 = 0$  și  $s_2 = -1/T$ . Pentru  $k = +\infty$  rezultă  $s_1 = -1/t$  și  $s_2 = -\infty$ . Hodograful polilor  $s_{1,2}$  este reprezentat în fig.V.5.

**III.**  $t = T$ . În acest caz  $G_d(s) = G(s) = k/s$ . Efectul polului  $s = -1/T$  este compensat de efectul zeroului  $s = -1/t$ . Ecuația polilor sistemului automat este  $s + k = 0$ , din care se obține polul  $s = -k$ . Hodograful corespunzător coincide cu semiaxa reală negativă (fig.V.6). □

După cum se poate constata de la exemplul 1.1. (în special punctul c) determinarea rădăcinilor ecuației (1.7) ca funcții explicite de parametrul  $k$  nu este procedura utilizabilă în general deoarece se bazează pe calcule relativ laborioase, iar în cazul ecuațiilor de grad mai mare ca 4 nu există formule pentru calculul rădăcinilor.

Sintetizând ceea ce s-a prezentat până aici, rezultă că problema de fond care va fi soluționată în continuare este aceea a determinării prin proceduri neconvenționale, sub formă grafică, a dependenței rădăcinilor ecuației (1.7) a sistemului în circuit închis de parametrul  $k$  al sistemului în circuit deschis. Rezultatul este locul rădăcinilor sau hodograful polilor sistemului automat, care este locul geometric al rădăcinilor ecuației (1.7) pentru  $k$  luând valori de la 0 la  $+\infty$ .

### 1.2. Ecuatiile fundamentale ale locului rădăcinilor

Pentru a ajunge la formularea unui rezultat fundamental, utilizabil la reprezentarea locului rădăcinilor, se concretizează următoarele:

$$M(s) = \prod_1^m (s - z_a), \quad (1.8)$$

$$N(s) = \prod_1^n (s - p_b), \quad (1.9)$$

în care  $m \leq n$  și  $z_a \neq p_b$ ,  $a = \overline{1, m}$ ,  $b = \overline{1, n}$ ;  $z_a$  și  $p_b$  sunt zerourile și polii finiți ai sistemului în circuit deschis;  $z_a$  și  $p_b$  sunt numere reale sau complexe; în acest ultim caz zerourile și polii respectivi există ca perechi de numere complex conjugate.

Înlocuind (1.8) și (1.9) în (1.6) se obține:

$$k \frac{\prod_1^m (s - z_a)}{\prod_1^n (s - p_b)} = -1, \quad s \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{R}_+. \quad (1.10)$$

Fie  $s = Ae^{jq}$ ,  $A \geq 0$ ,  $q \in \mathbb{R}$ . Se definesc fazorii:

$$s - z_a = A_{za} e^{jq_{za}}, \quad a = \overline{1, m}; \quad A_{za} \geq 0, \quad q_{za} \in \mathbb{R}; \quad (1.11)$$

$$s - p_b = A_{pb} e^{jq_{pb}}, \quad b = \overline{1, n}; \quad A_{pb} \geq 0, \quad q_{pb} \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Înlocuind (1.11) și (1.12) în (1.10) rezultă:

$$k \frac{\prod_1^m A_{za} e^{jq_{za}}}{\prod_1^n A_{pb} e^{jq_{pb}}} = -1,$$

din care, în mod echivalent, se obțin ecuațiile:

$$k \frac{\prod_1^m A_{za}}{\prod_1^n A_{pb}} = 1, \quad (1.13)$$

$$\sum_1^m q_{za} - \sum_1^n q_{pb} = (2i + 1)\pi, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Conform ecuației (1.14) se formulează următorul rezultat.

#### **Teorema 1**

Punctul  $s$  aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în zerourile lui  $G_d(s)$  și vârful în  $s$  (fazori definiți prin (1.11)) minus suma tuturor argumentelor fazorilor cu originea în polii lui  $G_d(s)$  și vârful în  $s$  (fazori definiți prin (1.12)) este un multiplu impar de  $\pi$ .  $\square$

Este ușor de intuit că ecuația (1.14), care nu depinde de  $k$ , conține *proprietatea esențială* utilizabilă pentru construcția locului rădăcinilor.

Ecuația (1.13), explicitată sub forma:

$$k = \prod_1^n A_{pb} / \prod_1^m A_{za} \quad (1.15)$$

se utilizează pentru parametrizarea locului rădăcinilor după valorile lui  $k \in \mathbb{R}_+$ .

## 2. Reguli de trasare a locului rădăcinilor

Pe baza ecuației (1.13) și (după caz) a ecuațiilor (1.6), (1.10) și (1.13) se pot formula următoarele 10 reguli de trasare calitativă rapidă a locului rădăcinilor pentru  $G_d(s)$  dat în formă factorizată (relația (1.5) cu (1.8), (1.9)).

**1 $\infty$**  Pentru  $k$  luând valori de la 0 la  $+\infty$  cele  $n$  rădăcini ale polinomului polilor sistemului automat pornesc din polii lui  $G_d(s)$  și ajung în zerourile lui  $G_d(s)$ .

**2 $\infty$**  Ecuația polilor (1.7) este de gradul  $n$  și are  $n$  rădăcini. Pentru  $k = 0$ , din (1.7) cu (1.9), ecuația polilor este:  $\prod_1^n (s - p_b) = 0$ , ceea ce înseamnă că locul rădăcinilor pornește din polii sistemului în circuit deschis. Înmulțind (1.10) cu  $1/k$  și făcând apoi  $k \rightarrow +\infty$  se obține:  $\prod_1^m (s - z_a) = 0$ , ceea ce înseamnă că  $m$  dintre polii sistemului automat ajung în zerourile finite ale sistemului în circuit deschis. Restul de  $n - m$  poli ai sistemului, pentru  $k \rightarrow +\infty$ , ajung în punctul de la  $\infty$ . Acest lucru este vizibil din (1.10) pentru  $k \rightarrow +\infty$  și  $|s| \rightarrow +\infty$ .  $\square$

### Exemplul 2.1.

Se consideră  $G_d(s) = k(s + 2)/[(s + 1)(s + 3)]$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

În conformitate cu (1.4), după eliminarea numitorului și efectuarea tuturor calculelor, se obține ecuația polilor sistemului automat:  $s^2 + (k + 4)s + 2k + 3 = 0$ . Aceasta are rădăcinile:

$s_{1,2} = [-(k + 4) \pm \sqrt{k^2 + 4}]/2$ . Pentru  $k = 0$  rezultă  $s_1 = -3$ ,  $s_2 = -1$ ; pentru  $k = +\infty$  se obține  $s_1 = -\infty$ ,  $s_2 = -2$ . Având în vedere că  $s_{1,2}$  sunt numere reale pentru orice  $k \geq 0$ , rezultă că locul rădăcinilor are imaginea din fig. V.7.  $\square$

**2 $\infty$**  Ramurile locului rădăcinilor sunt simetrice, câte două, față de axa reală a planului  $s$ .

**3 $\infty$**  Polinomul polilor (1.7) are toți coeficienții numere reale. Ca urmare, rădăcinile ecuației (1.7) sunt numere reale sau perechi de numere complex conjugate.  $\square$

### Exemplul 2.2

Se consideră  $G_d(s) = k/(s^2 + 1)$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

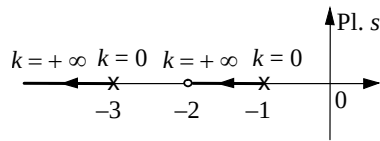


Fig. V.7. Locul rădăcinilor la exemplul 2.1

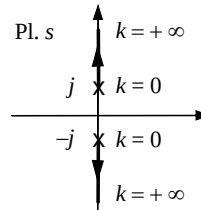


Fig. V.8. Locul rădăcinilor la exemplul 2.2

Utilizând (1.4), după eliminarea numitorului, se obține ecuația polilor sistemului automat:  $s^2 + k + 1 = 0$ , ale cărei rădăcini sunt:  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{k + 1}$ . Pentru  $k = 0$  rezultă  $s_{1,2} = \pm j$ ; pentru  $k = +\infty$  se obține:  $s_{1,2} = \pm j\infty$ . Întrucât  $s_{1,2}$  sunt numere imaginare pentru orice  $k \geq 0$ , rezultă că locul rădăcinilor are imaginea din fig. V.8.  $\square$

**3<sup>o</sup>** Se plasează pe axa reală a planului  $s$  zerourile reale (marcate prin  $\circ$ ) și polii reali (marcați prin  $\times$ ) ai lui  $G_d(s)$ . Se notează punctele corespunzătoare cu  $L_1, L_2, L_3, \dots$  în succesiunea lor de la  $+\infty$  la  $-\infty$ , contorizându-se și multiplicitățile respective. Segmentele  $L_1L_2, L_3L_4, L_5L_6, \dots$  (unele degenerate în puncte) aparțin locului rădăcinilor.

**4<sup>o</sup>** Un punct al axei reale a planului  $s$  aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă la dreapta sa, pe axa reală se află un număr impar de zerouri reale și de poli reali ai lui  $G_d(s)$ , fiecare considerat cu ordinul său de multiplicitate.

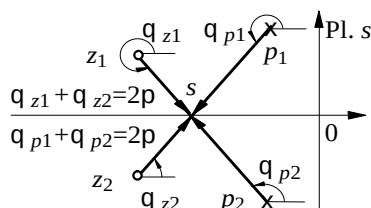


Fig. V.9. Contribuția în ecuația (1.14) în cazul  $s \in \mathbf{R}$  și pentru perechi de zerouri sau poli complex conjugați

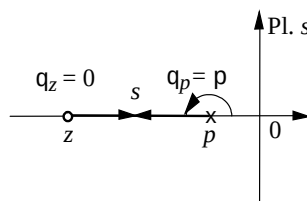


Fig. V.10. Contribuția în ecuația (1.14) în cazul  $s \in \mathbf{R}$  și pentru zerouri sau poli reali

Această afirmație este o consecință a ecuației (1.14), particularizată pentru  $s \in \mathbf{R}$ . Punctul  $s \in \mathbf{R}$  aparține locului rădăcinilor dacă și numai dacă contribuția argumentelor fazorilor (1.11) și (1.12) în (1.14) este un număr impar de  $p$ . Contribuția unei perechi de zerouri / poli complex conjugați este  $2p$  (fig. V.9). Contribuția unui zero / pol real situat la dreapta (stânga) lui  $s$  este  $p$  (respectiv 0) (fig. V.10). În consecință,  $s \in \mathbf{R}$  aparține locului rădăcinilor exact atunci când numărul de zerouri și de poli reali (inclusiv multiplicățile) ai lui  $G_d(s)$  situați la dreapta lui  $s$  (pe axa reală) este impar.  $\square$

### Exemplul 2.3

Se consideră  $G_d(s) = k(s+1)(s+3)(s+5)/[(s+2)^2(s+4)^2]$ . Se cere să se traseze acea parte a locului rădăcinilor care este situată pe axa reală.

Conform regulii **3<sup>o</sup>** se plasează pe axa reală a planului  $s$  zerourile  $-1, -3, -5$  (marcate cu  $\circ$ ) și polii  $-2$  (dublu),  $-4$  (dublu) (marcați cu  $\times$ ). De la dreapta la stânga se notează aceste puncte cu  $L_1, L_2, L_3$  ( $-2$  este pol dublu),  $L_4, L_5, L_6$  ( $-4$  este pol dublu),  $L_7$ , fig. V.11

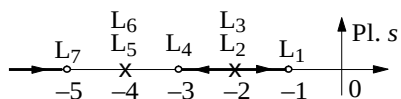


Fig. V.11. Partea situată pe partea reală a locului rădăcinilor la exemplul 2.3

Segmentele  $L_1L_4$ , punctul  $L_5L_6$  și semidreapta de la  $L_7$  la  $-\infty$  aparțin locului rădăcinilor.  $\square$

**4<sup>o</sup>** Pentru  $n - m \geq 1$  locul rădăcinilor are  $n - m$  ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$  pentru  $k \rightarrow +\infty$ . Dacă  $n - m = 1$ , este vorba de o singură ramură care coincide cu o parte a (semi)axe reale (negative). Dacă  $n - m \geq 2$ , este vorba de  $n - m$  ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$  (pentru  $k \rightarrow +\infty$ ) de-a lungul a  $n - m$  asimptote care trec prin centroidul:

$$s_{cg} = \frac{1}{n-m} \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i \right) \quad (2.1)$$

și care au direcțiile:



$$q_i = \frac{2i-1}{n-m} p, i = \overline{1, n-m}. \quad (2.2)$$

$\mathcal{D}$ . Se înmulțește ecuația (1.10) cu  $\prod_1^n (s - p_b) / \prod_1^m (s - z_a)$  și se obține:

$$\prod_1^n (s - p_b) / \prod_1^m (s - z_a) + k = 0; \quad n - m \geq 1. \quad (2.3)$$

Pentru  $k \rightarrow +\infty$  rezultă  $|s| \rightarrow +\infty$ . Efectuând împărțirea specificată în (2.3), pentru  $k$  suficient de mare și  $|s|$  suficient de mare, restul acestei împărțiri poate fi neglijat, astfel că din (2.3) se obține:

$$s^{n-m} + \left( \sum_1^m z_a - \sum_1^n p_b \right) s^{n-m-1} + \dots + k = 0. \quad (2.4)$$

Aceasta are rădăcinile  $s_i(k)$ ,  $i = \overline{1, n-m}$ , cu  $|s_i(k)| \rightarrow +\infty$  pentru  $k \rightarrow +\infty$ . Conform primei formule Viète se poate scrie:

$$\sum_1^{n-m} s_i(k) = - \left( \sum_1^m z_a - \sum_1^n p_b \right).$$

Centrul de greutate al acestor rădăcini, respectiv centroidul asimptotelor locului rădăcinilor, este dat de formula (2.1).

Pentru a determina direcțiile asimptotelor se are în vedere că, pentru  $k \rightarrow +\infty$  și  $|s| \rightarrow +\infty$ , din (2.4) se obține:  $s^{n-m} + k = 0$ . Din aceasta rezultă  $s_i(k) = k^{1/(n-m)} e^{(2i-1)\pi/(n-m)}$ ,  $i = \overline{1, n-m}$ , ceea ce înseamnă că cele  $n-m$  asimptote au direcțiile exprimate prin (2.2).  $\square$

**5 $^\circ$**  Pe segmentele locului rădăcinilor situate pe axa reală între două zerouri reale sau între doi poli reali există în mod necesar puncte de ramificare ale căror abscise se află printre rădăcinile reale ale ecuației :

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_a} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_b} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

Pentru  $k$  luând valori crescătoare, într-un (dintr-un) punct de ramificare situat între două zerouri reale (doi poli reali) sosesc (pleacă) două ramuri ale locului rădăcinilor.

$\mathcal{D}$ . Această regulă este o consecință a regulilor **1 $^\circ$**  și **3 $^\circ$** . Pentru a obține ecuația (2.5) se pornește de la (1.4) cu  $s = x \in \mathbf{R}$ , adică de la  $1 + G_d(x) = 0$ . Aceasta trebuie să aibă o rădăcină dublă pentru  $x \in \mathbf{R}$ , adică  $(1 + G_d(x))' = 0$ , respectiv  $G'_d(x) = 0$ . Pe de altă parte, utilizând (1.4), (1.8) și (1.9) se scrie:  $\ln G_d(x) = \ln k + \sum_1^m \ln(x - z_a) - \sum_1^n \ln(x - p_b)$ .

Derivând această expresie se obține:  $G'_d(s)/G_d(s) = \sum_1^m 1/(x - z_a) - \sum_1^n 1/(x - p_b) = 0$ , care este chiar ecuația (2.5).  $\square$

#### Exemplul 2.4.

Se consideră  $G_d(s) = k(s+4)/[(s+1)(s+2)^2]$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

Segmentul corespunzător intervalului  $[-4, -1]$  aparține locului rădăcinilor. Între  $-2$  și  $-1$  există un punct de ramificare a cărui abscisă se află printre rădăcinile reale ale ecuației:  $1/(x+4) - 1/(x+1) - 2/(x+2) = 0$ . Eliminând numitorul comun se obține ecuația polinomială:  $2x^2 + 13x + 14 = 0$  ale cărei rădăcini sunt  $x_1 = -5,125$  și  $x_2 = -1,36$ . A doua rădăcină este abscisa punctului de ramificare.

Conform regulii 4<sup>o</sup> locul rădăcinilor are două ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$ . Centroidul celor două asimptote este de abscisă  $s_{cg} = (-1-2+4)/2 = -1/2$ . Direcțiile celor două asimptote sunt  $q_1 = p/2$  și  $q_2 = 3p/2$ . Locul rădăcinilor este reprezentat în fig. V.12.  $\square$

6<sup>o</sup> În zerourile reale multiple și din polii reali multipli sosesc și respectiv pleacă un număr de ramuri egal cu multiplicitatea zeroului și respectiv polului. Direcțiile tangentelor la respectivele ramuri (în zerourile sau polii corespunzătoare, de multiplicitate  $q$ ) sunt:

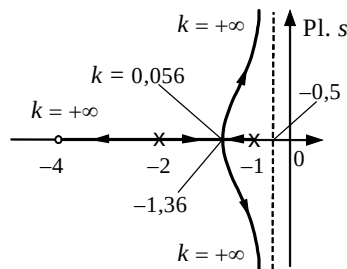


Fig.V.12. Locul rădăcinilor la exemplul 2.4

$$q_i = 2pi/q, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad (2.6)$$

dacă numărul de zerouri și de poli reali situați la dreapta (polului / zeroului considerat) este impar, sau

$$q_i = (2i+1)p/q, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad (2.7)$$

dacă numărul de zerouri și de poli reali situați la dreapta (polului / zeroului considerat) este par.

D. Această regulă este o consecință directă a ecuației (1.14). Demonstrația este similară cu aceea de la regula 3<sup>o</sup>. Pentru obținerea formulelor (2.6) și (2.7) cu ajutorul ecuației (1.14) se ține seama că argumentul corespunzător unui pol sau zero multiplu este  $q\varphi$  în care  $q$  este multiplicitatea corespunzătoare.  $\square$

### Exemplul 2.5

Se consideră  $G_d(s) = k(s+1)/s^2$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

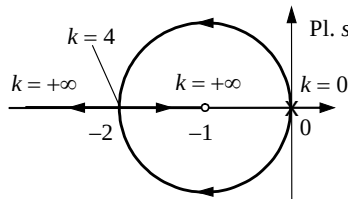


Fig.V.13. Locul rădăcinilor la exemplul 2.5

Semidreapta corespunzătoare intervalului  $(-\infty, -1]$  aparține locului rădăcinilor. Din polul dublu  $s = 0$  pornesc două ramuri ale căror tangente în  $s = 0$  au direcțiile  $q_0 = p/2$  și  $q_1 = 3p/2$ . Aceasta înseamnă că locul rădăcinilor este tangent, în origine, la axa imaginară a planului  $s$ .

Conform regulii 5<sup>o</sup> există un punct de ramificare la stânga punctului  $-1$ . Abscisa acestui punct se găsește printre rădăcinile reale ale ecuației:  $1/(x+1) - 2/x = 0$ . Punctul de ramificare este  $x = -2$  și ramurile care pornesc din  $s = 0$  ajung în acest punct pentru  $k = 4$ . Locul rădăcinilor este reprezentat în fig.V.13.  $\square$

7<sup>o</sup> În zerourile complexe multiple sosesc și din polii complecși multipli pleacă un număr de ramuri egal cu ordinul de multiplicitate  $m_a$  al zeroului și respectiv  $n_b$  al polului. Direcțiile tangentelor la respectivele ramuri se calculează cu:

$$q_{za\ i}^{tg} = \frac{1}{m_a} \left[ \sum_{a=1}^m \arg(z_a - z_a) - \sum_{b=1}^n \arg(z_a - p_b) - (2i+1)p \right], \quad i = \overline{0, m_a-1}, \quad (2.8)$$

în cazul zeroului  $z_a$ , și

$$q_{pb\ i}^{tg} = \frac{1}{n_b} \left[ \sum_{a=1}^m \arg(p_b - z_a) - \sum_{b=1}^n \arg(p_b - p_b) - (2i+1)p \right], \quad i = \overline{0, n_b-1}, \quad (2.9)$$

în cazul polului  $p_b$ .

$\mathcal{D}$ . Această regulă este o consecință directă a ecuației (1.14). Demonstrația este similară cu aceea de la regula  $3^\circ$ . Pentru obținerea formulelor (2.8) și (2.9) se ține seama că argumentul corespunzător unui zero sau pol multiplu este  $m_a q_{za}$ , respectiv  $n_b q_{pb}$ .  $\square$

$8^\circ$  După determinarea punctelor de ramificare și a numărului de ramuri care sosesc în și pleacă din fiecare punct de ramificare (în total  $2r$  ramuri), rezultă că unghiurile dintre două ramuri alăturate este  $p/r$ .

$\mathcal{D}$ . Această regulă este o consecință directă a ecuației (1.14).  $\square$

$9^\circ$  Se determină punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară a planului  $s$  și valorile corespunzătoare ale lui  $k$ . În acest scop se utilizează ecuația:

$$N(jw) + kM(jw) = 0, \quad w \in \mathbf{R}, \quad k \geq 0. \quad (2.10)$$

$\mathcal{D}$ . Ecuația (2.10) se obține din (1.7) pentru  $s = jw$ .  $\square$

O altă posibilitate de determinare mai întâi a lui  $k$  și apoi a lui  $w$  o oferă schema Routh (a se vedea II.6.5). Anulând elementele penultimei linii din schema Routh se obțin valorile lui  $k$  pentru care locul rădăcinilor intersectează axa imaginară. Dacă elementele antepenultimei linii sunt notate cu  $a(k)$  și  $b(k)$ , atunci punctele de intersecție ale locului rădăcinilor cu axa imaginară se obțin ca rădăcini ale ecuației:

$$a(k)s^2 + b(k) = 0.$$

$10^\circ$  Parametrizarea după  $k \geq 0$  a locului rădăcinilor este posibilă prin măsurarea segmentelor  $A_{za}$ ,  $a = 1, m$ ,  $A_{pb}$ ,  $b = 1, n$ , pentru punctele dorite ale locului rădăcinilor, după care se calculează valoarea lui  $k$  utilizând formula (1.15).  $\square$

### Exemplul 2.6 (aplicarea regulilor $1^\circ - 10^\circ$ )

Se consideră:

$$G_d(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+3)(s+8)(s+4-j5)(s+4+j5)}.$$

Se cere să se traseze locul rădăcinilor.

a. (Regula  $1^\circ$ ) Se plasează în planul  $s$ :  $z_1 = -2$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -3$ ,  $p_3 = -8$ ,  $p_{4,5} = -4 \pm j5$ . Pentru  $k = 0$  locul rădăcinilor pleacă din  $p_1, \dots, p_5$  și pentru  $k = +\infty$  o ramură ajunge în  $z_1$  și alte patru ramuri ajung în punctul de la  $\infty$  (fig.V.14).

b. (Regula  $2^\circ$ ) Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală a planului  $s$ .

c. (Regula  $3^\circ$ ) Se trasează acea parte a locului rădăcinilor care aparține axei reale a planului  $s$  (fig.V.14).

d. (Regula  $4^\circ$ ) Numărul de ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$  este  $n - m = 5 - 1 = 4$ . Centroidul celor patru asimptote are abscisa:  $s_{cg} = (0 - 3 - 8 - 4 + j5 - 4 - j5 + 2)/4 = -4,25$ . Direcțiile asimptotelor sunt:  $q_1 = p/4$ ,  $q_2 = 3p/4$ ,  $q_3 = 5p/4$ ,  $q_4 = 7p/4$ .

e. (Regula  $5^\circ$ ) Între  $-8$  și  $-3$  există un punct de ramificare. Abscisa acestui punct se află printre rădăcinile reale ale ecuației:  $1/(x+2) - 1/x - 1/(x+3) - 1/(x+8) - 1/(x+4-j5) - 1/(x+4+j5) = 0$ . Rădăcina căutată este  $x \cong -5,2$ .

f. (Regula  $7^\circ$ ) Unghiurile tangentelor ramurilor care pleacă din  $p_{4,5}$  sunt:

$$q_{p4}^{tg} = q_{z1} - (q_{p1} + q_{p2} + q_{p3} + q_{p5}) - 180^\circ = 112^\circ - (128^\circ + 101^\circ + 51^\circ + 90^\circ) - 180^\circ =$$

$$= -438^\circ \rightarrow q_{p_4}^{\text{tg}} = -78^\circ, \quad q_{p_5}^{\text{tg}} = 78^\circ,$$

$q_{p_5}^{\text{tg}}$  fiind obținut prin simetrie față de  $q_{p_4}^{\text{tg}}$ . Unghiurile  $q_{z_1}, q_{p_1}, q_{p_2}, q_{p_3}, q_{p_5}$  au fost măsurate pe baza reprezentării la scară din fig.V.15.

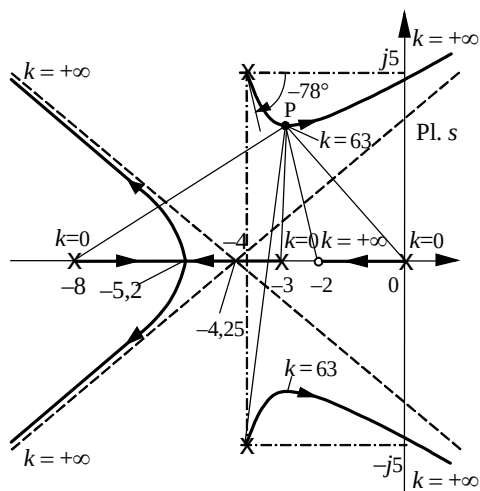
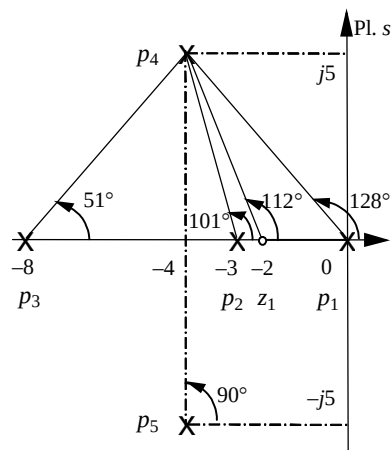


Fig. V.14. Locul rădăcinilor la exemplul 2.6

Fig.V.15. Determinarea unghiului de plecare din polul complex  $p_4$  la exemplul 2.6 (punctul f)

**g.** (Regula 8<sup>o</sup>) Unghiurile dintre două ramuri alăturate în punctul de ramificare sunt egale cu  $\pi/2$ .

**h.** (Regula 9<sup>o</sup>) Ecuația (1.7) are forma:

$$s^5 + 19s^4 + 153s^3 + 643s^2 + (948 + k)s + 2k = 0.$$

Pentru  $s = j\omega$  se obține:

$$\begin{cases} 19\omega^4 - 643\omega^2 + 2k = 0 \\ \omega^5 - 153\omega^4 + (984 + k)\omega = 0 \end{cases},$$

din care rezultă  $\omega_0 \cong \pm 4,939$  și  $k_0 = 2165$ . Punctele de intersecție cu axa imaginară sunt:  $s \cong \pm j4,939$  și ele corespund lui  $k = 2165$ . Se trage concluzia că pentru  $k \geq 2165$  sistemul automat este BIBO-instabil.

**i.** (Regula 10<sup>o</sup>) Locul rădăcinilor se poate parametriza după valorile lui  $k$ . De exemplu, pentru punctul P (fig.V.14) se măsoară  $A_{p_1} = |Pp_1| = 2,4$ ,  $A_{p_2} = |Pp_2| = 2,02$ ,  $A_{p_3} = |Pp_3| = 4,87$ ,  $A_{p_4} = |Pp_4| = 1,2$ ,  $A_{p_5} = |Pp_5| = 4,42$ ,  $A_{z_1} = |Pz_1| = 1,99$ . Utilizând (1.15) rezultă  $k \cong 63$ . □

### 3. Efectul unui zero suplimentar

Se consideră funcția de transfer a sistemului în circuit deschis:

$$G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_a)}{\prod_1^n (s - p_b)} (s - z), \quad (3.1)$$

în care  $s = z$  este un zero real suplimentar care poate lua valori de la  $-\infty$  la  $+\infty$ . Se admite că  $m+1 \leq n$ , astfel că  $G_d(s)$  este o funcție proprie.

Cu referire la regulile **1<sup>o</sup>** – **10<sup>o</sup>** (subcap.2), efectele zeroului real suplimentar sunt:

**1<sup>o</sup>** Gradul polinomului polilor sistemului automat rămâne același, adică  $n$ . În schimb crește cu 1 numărul zerourilor finite, respectiv locul rădăcinilor are o ramură care ajunge în  $s = z$  și scade cu 1 numărul ramurilor locului rădăcinilor care ajung în punctul de la  $\infty$ .

**2<sup>o</sup>** Rămâne neschimbată.

**3<sup>o</sup>** Se schimbă configurația locului rădăcinilor pe axa reală în funcție de poziția zeroului  $s = z$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

**4<sup>o</sup>** Dacă  $n - m = 1$ , prin prezența unui zero suplimentar, locul rădăcinilor nu mai are ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$ . Dacă  $n - m = 2$ , prin prezența zeroului suplimentar, locul rădăcinilor are o singură ramură care ajunge în punctul de la  $\infty$ , care coincide cu o parte a axei reale (de regulă a semiaxei reale negative). Dacă  $n - m \geq 3$ , prin prezența zeroului suplimentar locul rădăcinilor are  $n - m - 1$  ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$ .

Centroidul  $s_{cg}^z$ , față de vechiul centroid  $s_{cg}$  (relația (2.1)), are expresia:

$$\begin{aligned} s_{cg}^z &= \frac{1}{n-m-1} \left( \sum_1^n p_b - \sum_1^m z_a - z \right) = \frac{n-m-1+1}{n-m-1} \frac{1}{n-m} \left( \sum_1^n p_b - \sum_1^m z_a \right) - \frac{1}{n-m-1} z = \\ &= s_{cg} + \frac{1}{n-m-1} (s_{cg} - z), \text{ din care rezultă:} \\ s_{cg}^z - s_{cg} &= \frac{1}{n-m-1} (s_{cg} - z). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pentru  $z < s_{cg}$  se obține  $s_{cg}^z > s_{cg}$ , pentru  $z = s_{cg}$  rezultă  $s_{cg}^z = s_{cg}$  și pentru  $z > s_{cg}$  are loc  $s_{cg}^z < s_{cg}$ . Zeroul suplimentar produce o deplasare a locului rădăcinilor: pentru  $z$  situat la stânga / dreapta lui  $s_{cg}$  locul rădăcinilor se deplasează la dreapta / stânga lui  $s_{cg}$ , conform relației (3.2). Unghiurile asimptotelor cresc cu  $\pi / [(n-m)(n-m-1)]$ .

**5<sup>o</sup>** Numărul și poziția punctelor de ramificare se modifică în funcție de poziția zeroului suplimentar  $s = z$  față de poziția zerourilor  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și polilor  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ . Ecuația punctelor de ramificare este:

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_a} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_b} + \frac{1}{x - z} = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.3)$$

**6<sup>o</sup>** Pentru  $z_a \in \mathbf{R}$ , de multiplicitate  $m_a$  și  $z = z_a$ , numărul de ramuri care sosesc în  $z_a$  este  $m_a+1$ , iar unghiurile între două ramuri alăturate scade cu  $2\pi / [m_a(m_a+1)]$ .

Pentru  $p_b \in \mathbf{R}$  și  $z = p_b$  are loc o compensare a efectului polului  $p_b$  prin efectul zeroului

suplimentar  $s = z$ . Dacă  $p_b$  este de multiplicitate  $n_b \geq 2$ , atunci numărul de ramuri care pleacă din  $p_b$  este  $n_b - 1$ ; unghiul dintre două ramuri alăturate crește cu  $2\pi / [n_b(n_b - 1)]$ .

$7^\infty - 8^\infty$  Rămân neschimbate.

**9 $^\infty$**  Punctele de intersecție cu axa imaginară (dacă ele există) își schimbă poziția în funcție de poziția zeroului suplimentar  $s = z$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

**10 $^\infty$**  Parametrizarea după valorile lui  $k \geq 0$  a locului rădăcinilor se modifică în funcție de poziția zeroului suplimentar  $s = z$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

### Exemplul 3.1

Se consideră  $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)]$ . Prin introducerea unui zero suplimentar (prin intermediul funcției de transfer a regulatorului) se obține  $G_d(s) = k(s-z)/[s(s+2)(s+4)]$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor pentru  $G_d(s)$  dat inițial și pentru  $G_d(s)$  având zeroul suplimentar plasat în diferite puncte ale axei reale:  $z < -4$ ,  $z = -4$ ,  $-4 < z < -2$ ,  $z = -2$ ,  $-2 < z < 0$ ,  $z = 0$ ,  $z > 0$ . Locul rădăcinilor este reprezentat în fig.V.16. ■

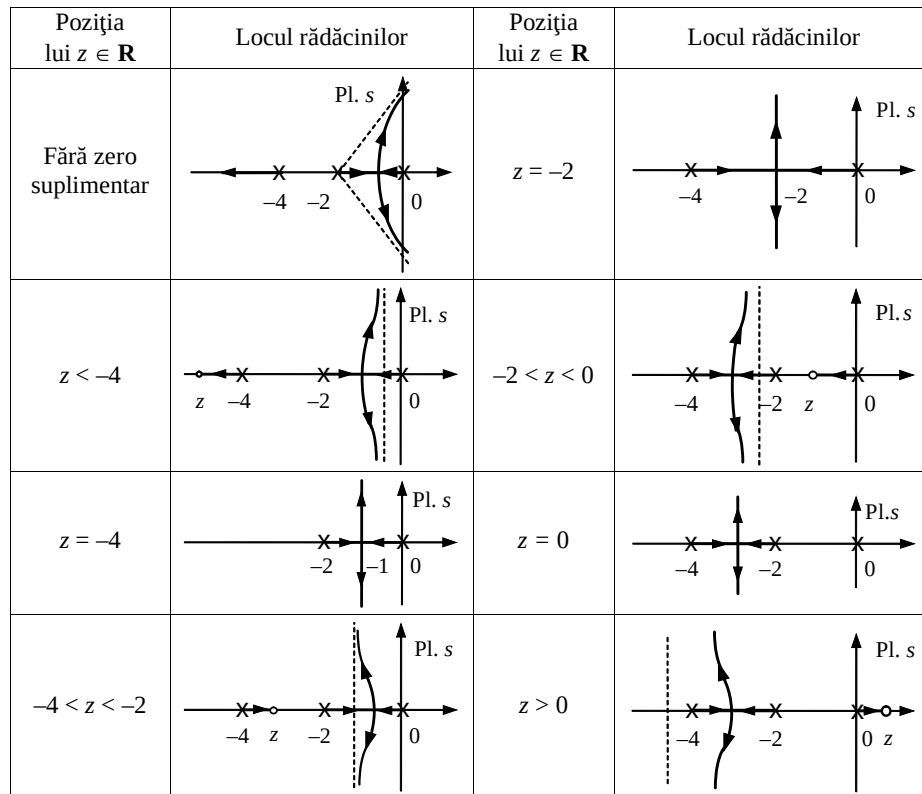


Fig.V.16. Locul rădăcinilor la exemplul 3.1

#### 4. Efectul unui pol suplimentar

Se consideră funcția de transfer a sistemului în circuit deschis:

$$G_d(s) = k \frac{\prod_1^m (s - z_a)}{\prod_1^n (s - p_b)} \frac{1}{s - p}, \quad (4.1)$$

în care  $s = p$  este un pol real suplimentar care poate lua valori de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .

Cu referire la regulile **1<sup>o</sup>** – **10<sup>o</sup>** (subcap.2), efectele polului real suplimentar sunt:

**1<sup>o</sup>** Gradul polinomului polilor sistemului automat crește cu 1. Locul rădăcinilor are o ramură nouă care pornește din  $s = p$ . Numărul de ramuri care ajung la  $\infty$  crește cu 1.

**2<sup>o</sup>** Rămâne neschimbată.

**3<sup>o</sup>** Se schimbă configurația locului rădăcinilor pe axa reală în funcție de poziția polului  $s = p$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

**4<sup>o</sup>** Dacă  $n = m$ , prin prezența unui pol suplimentar, locul rădăcinilor are o singură ramură care ajunge în punctul de la  $\infty$  care coincide cu o parte a axei reale (de regulă a semiaxei reale negative). Dacă  $n - m \geq 1$ , prin prezența unui pol suplimentar, locul rădăcinilor are  $n - m + 1$  ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$ .

Centroidul nou,  $s_{cg}^p$ , față de vechiul centroid,  $s_{cg}$  (relația (2.1)), are expresia:

$$\begin{aligned} s_{cg}^p &= \frac{1}{n - m + 1} \left( \sum_1^n p_b - \sum_1^m z_a + p \right) = \frac{n - m + 1 - 1}{n - m + 1} \frac{1}{n - m} \left( \sum_1^n p_b - \sum_1^m z_a \right) + \frac{1}{n - m + 1} p = \\ &= s_{cg} + \frac{1}{n - m + 1} (p - s_{cg}), \text{ din care rezultă:} \\ s_{cg}^p - s_{cg} &= \frac{1}{n - m + 1} (p - s_{cg}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pentru  $p < s_{cg}$  se obține  $s_{cg}^p < s_{cg}$ , pentru  $p = s_{cg}$  rezultă  $s_{cg}^p = s_{cg}$  și pentru  $p > s_{cg}$  are loc  $s_{cg}^p > s_{cg}$ . Polul suplimentar produce deplasarea locului rădăcinilor și anume: pentru  $p$  situat la stânga / dreapta lui  $s_{cg}$  locul rădăcinilor se deplasează la stânga / dreapta lui  $s_{cg}$ , conform relației (4.2).

Unghiurile asimptotelor se micșorează cu  $p / [(n - m)(n - m + 1)]$ .

**5<sup>o</sup>** Numărul și poziția punctelor de ramificare se modifică în funcție de poziția polului suplimentar  $s = p$  față de poziția zerourilor  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și polilor  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

Ecuția punctelor de ramificare este:

$$\sum_1^m \frac{1}{x - z_a} - \sum_1^n \frac{1}{x - p_b} - \frac{1}{x - p} = 0, x \in \mathbf{R}. \quad (4.3)$$

**6<sup>o</sup>** Pentru  $z_a \in \mathbf{R}$  și  $p = z_a$  are loc o compensare a efectului zeroului  $z_a$  prin efectul polului suplimentar  $s = p$ . Dacă  $z_a$  este de multiplicitate  $m_a \geq 2$ , atunci numărul de ramuri care ajung în  $z_a$  este  $m_a - 1$ ; unghiul dintre două ramuri alăturate crește cu  $2p / [m_a(m_a - 1)]$ .

Pentru  $p_b \in \mathbf{R}$ , de multiplicitate  $n_b$  și  $p = p_b$ , numărul de ramuri care pleacă din  $p_b$  este

$n_a+1$ , iar unghiurile între două ramuri alăturate scade cu  $2p / [n_b(n_b+1)]$ .

$7^\infty - 8^\infty$  Rămân neschimbate.

**9<sup>o</sup>** Punctele de intersecție cu axa imaginară (dacă ele există) își schimbă poziția în funcție de poziția polului suplimentar  $s = p$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

**10<sup>o</sup>** Parametrizarea după valorile lui  $k \geq 0$  a locului rădăcinilor se modifică în funcție de poziția polului suplimentar  $s = p$  față de  $z_a$ ,  $a = \overline{1, m}$ , și  $p_b$ ,  $b = \overline{1, n}$ .

#### Exemplul 4.1

Se consideră  $G_d(s) = k/[s(s+2)(s+4)]$ . Prin introducerea unui pol suplimentar (prin intermediul funcției de transfer a regulatorului) se obține  $G_{d1}(s) = k/[s(s+2)(s+4)(s-p)]$ . Se cere să se traseze locul rădăcinilor pentru  $G_d(s)$  dat inițial și pentru  $G_{d1}(s)$  având polul suplimentar plasat în diferite puncte ale axei reale:  $p < -4$ ,  $p = -4$ ,  $-4 < p < -2$ ,  $p = -2$ ,  $-2 < p < 0$ ,  $p = 0$ ,  $p > 0$ . Locul rădăcinilor este reprezentat în fig.V.17. ■

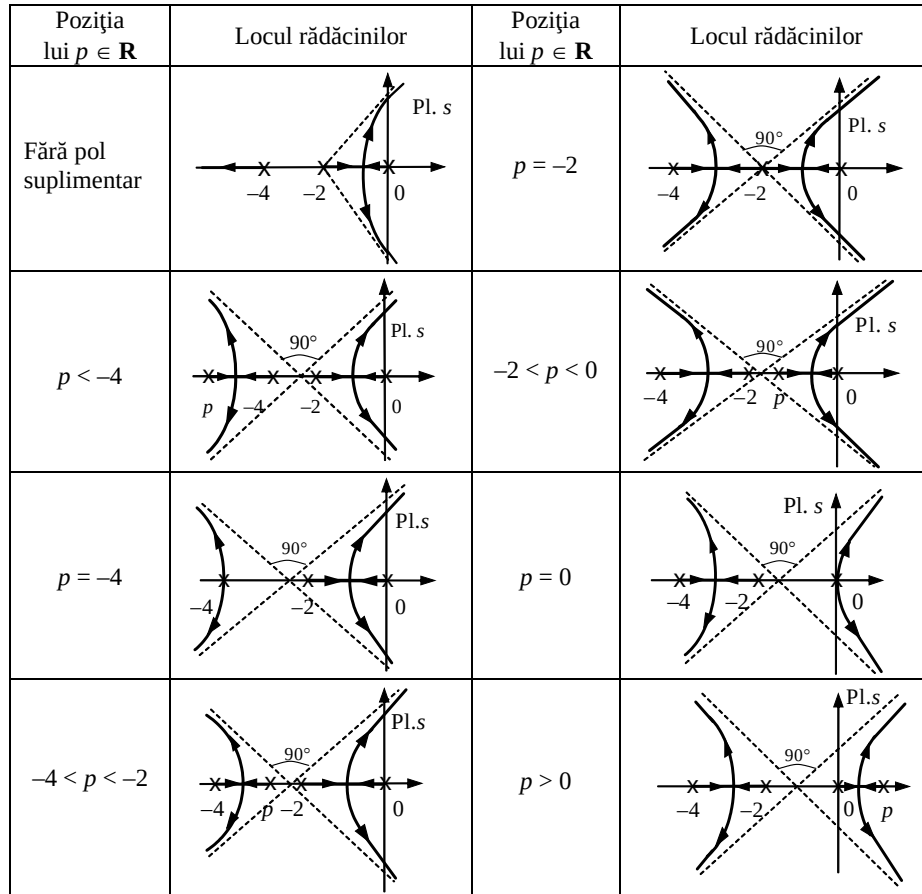


Fig. V.17. Locul rădăcinilor la exemplul 3.2



## 5. Sinteza regulatorului

### 5.1. Tema de proiectare

Prin tema de proiectare a unui sistem automat (fig.III.14) se precizează următoarele:

a. Instalația tehnologică automatizată ca sistem: se definesc mărimile de intrare (mărimi de comandă și perturbatoare), mărimea de ieșire și relațiile dintre ele.

b. Mărimea de ieșire este mărimea după care se realizează reacția negativă printr-un traductor adecvat. Mărimea de ieșire – numită și mărimea reglată – trebuie să aibă o evoluție prescrisă în conformitate cu o mărime prescrisă sau de referință (definită ca mărime de intrare a sistemului automat – fig.III.14).

c. Performanțele pe care trebuie să le realizeze sistemul automat în regim tranzitoriu și în regim staționar pe baza următorilor indici de calitate: suprareglarea  $S$ , durata regimului tranzitoriu  $t_s$ , durata de creștere  $t_c$  (conform cu II.7.1) și erorile staționare în raport cu mărimea prescrisă (de referință),  $e_{ps}$ , și cu perturbația,  $e_{ws}$  (conform cu III.5.2).

### 5.2. Rezolvarea temei de proiectare

Pentru rezolvarea temei de proiectare se parcurg următoarele etape:

a. Se scriu ecuațiile care guvernează funcționarea părților componente ale sistemului și se stabilește schema bloc structurală a întregului sistem. Aceasta este baza de pornire a rezolvării temei de proiectare.

Elementul de execuție și traductorul se aleg (se adoptă) în funcție de instalația automatizată (împreună cu care formează partea fixată a sistemului).

Se subînțelege că structura și parametrii părții fixate sunt cunoscute cu precizie acceptabilă.

b. Se adoptă un tip de regulator pe baza teoremei Aizerman – Gantmaher (teorema 1 de la III.4.2) sau pe baza experienței existente privitor la automatizările din aceeași categorie cu aceea din tema de proiectare.

c. Se analizează BIBO-stabilitatea sistemului automat și se determină domeniile parametrice de BIBO-stabilitate și de rezervă de BIBO-stabilitate impusă, pentru parametrii încă necunoscuți ai regulatorului.

d. Se realizează stabilizarea sistemului automat prin modificarea adecvată a parametrilor și / sau structurii regulatorului în scopul realizării valorilor admisibile ale indicilor de calitate.

Metoda locului rădăcinilor permite să se țină seama direct și efectiv de valorile admisibile ale indicilor de calitate. Acest avantaj derivă din faptul că prin metoda locului rădăcinilor se pot realiza configurații cu o pereche de poli dominanți a căror localizare se corelează direct cu valorile (maxime) admisibile ale indicilor de calitate (a se vedea II.7.5) și anume:

- $S_a$  – suprareglarea admisibilă, căreia îi corespunde condiția:  $S \leq S_a$  ;
- $t_{sa}$  – durata admisibilă a regimului tranzitoriu, căreia îi corespunde condiția  $t_s \leq t_{sa}$  ;
- $t_{ca}$  – durata admisibilă de creștere, căreia îi corespunde condiția  $t_c \leq t_{ca}$  .

Se va alege regulatorul astfel încât sistemul automat să aibă polii dominanți:

$$p_{1,2} = w_n \left( -z \pm j\sqrt{1-z^2} \right) \quad 0 < z < 1.$$

Suprareglarea  $S$  depinde numai de factorul de amortizare  $z$ ; această dependență este strict monoton descrescătoare (fig.II.47)

**1) Condiția  $s \leq s_a$**  are loc dacă și numai dacă  $z \geq z_a$ ,  $z_a$  fiind factorul de amortizare (minim) admisibil. Pentru  $z = \cos y$ , cu  $0 < y < 90^\circ$ , condiția  $s \leq s_a$  are loc dacă și numai dacă  $y \leq y_a$ , unde  $y_a$  definește sectorul unghiular (maxim) admisibil în care se pot localiza polii dominanți (fig.II.53). Relația dintre  $y_a$  și  $s_a$  este:

$$\cos y_a = 2,3 | \lg s_a | / \sqrt{9,86 + (2,3 \lg s_a)^2}.$$

Se alege  $y_0 \leq y_a$  (fig. V.18), cu  $y_0$  cât mai apropiat de  $y_a$ , din care rezultă  $z_0 = \cos y_0$ .

**2) Condiția  $t_s \leq t_{sa}$**  se ia în considerare cu ajutorul fig.II.47 sau al formulei:

$$t_s = w_n t_s \cong 3/z.$$

Pentru  $z_0$  deja ales la punctul 1 se determină  $t_{s0}$  din fig.II.47 sau, pentru  $0 < z_0 < 0,707$ , cu relația  $t_{s0} \cong 3/z_0$ . Durata reală a regimului tranzitoriu,  $t_{s0}$ , trebuie să satisfacă condiția:

$$t_{s0} = t_{s0}/w_{n0} \leq t_{sa},$$

în care  $w_{n0}$  este pulsația naturală a polilor dominanți care se determină din chiar această inegalitate și anume din condiția:

$$w_{n0} \geq t_{s0}/t_{sa}.$$

**3) Condiția  $t_c \leq t_{ca}$**  se ia în considerare cu ajutorul formulei:

$$t_c \cong 1,8/w_n, \text{ pentru } 0,3 \leq z \leq 0,8.$$

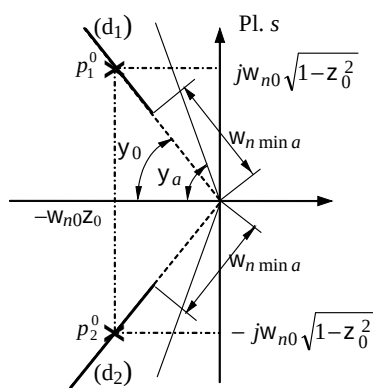


Fig.V.18. Localizarea polilor dominanți în funcție de indicii de calitate admisibili

$w_{n \min a}$  poate fi evidențiat, ca distanță, direct pe semidreptele  $(d_1)$  și  $(d_2)$  – fig.V.18, urmând ca polii:

$$p_{1,2}^0 = w_{n0} \left( -z_0 \pm j \sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

Pentru  $z_0$  deja adoptat, durata reală de creștere,  $t_{c0}$ , trebuie să satisfacă condiția:

$$t_{c0} \cong 1,8/w_{n0} \leq t_{ca},$$

din care rezultă;

$$w_{n0} \geq 1,8/t_{ca}.$$

Din condițiile  $t_{s0} \leq t_{sa}$  și  $t_{c0} \leq t_{ca}$  rezultă în final condiția de alegere a pulsației  $w_{n0}$ , respectiv:

$$w_{n0} \geq w_{n \min a} = \max(t_{s0}/t_{sa}, 1,8/t_{ca}),$$

în care  $w_{n \min a}$  este valoarea minimă admisibilă a pulsației naturale a celor doi poli dominanți. Întrucât  $|p_{1,2}| = w_n$  rezultă că

să fie plasați tot pe semidreptele ( $d_1$ ) și ( $d_2$ ) și anume în zonele trasate cu linie continuă. Se are în vedere ca  $w_{n0}$  să nu fie prea mare față de  $w_{n \min a}$ , deoarece în caz contrar polii  $p_{1,2}^0$  își pot pierde caracterul dominant.

Polii dominanți fiind stabiliți, se alege funcția de transfer a regulatorului,  $G_R(s)$ , astfel încât funcția de transfer a sistemului automat,  $G_0(s)$ , să se caracterizeze prin polii dominanți  $p_{1,2}^0$ . Utilizând metoda locului rădăcinilor acest lucru se realizează relativ simplu prin introducerea unor zerouri și / sau poli suplimentari care produc modificări ale locului rădăcinilor și în final prin alegerea adecvată a parametrului  $k > 0$ .

### Exemplul 5.1.

Se consideră

$$G_F(s) = \frac{12,5}{(s+1)(s+2,5)}$$

(fig.IV.4) și  $s_a = 0,17$ ,  $t_{sa} = 3\text{sec}$ ,  $t_{ca} = 1,5\text{sec}$ , și  $e_{ps} = 0$ . Se cere să se determine  $G_R(s)$ .

Pentru a realiza  $e_{ps} = 0$  se introduce în regulator o componentă integratoare. Până la stabilirea structurii definitive a regulatorului se consideră:

$$G_R(s) = \frac{k_r}{s},$$

$k_r$  fiind factorul de proporționalitate.

Pentru  $s_a = 0,17$ , din fig. II.47 rezultă  $z_a \approx 0,5$  și apoi  $y_a \approx 60^\circ$ . Se adoptă  $z_0 = 0,5$  și  $y_0 = 60^\circ$ . Din fig. II.47 rezultă  $t_{s0} = 6,25$ . Mai departe,  $w_{n\min a} = \max(t_{s0}/t_{sa}, 1,8/t_a) = \max(6,25/3, 1,8/1,5) \approx 2,1 [\text{sec}]^{-1}$ . Se adoptă  $w_{n0} = 2,2 [\text{sec}]^{-1}$ . Așadar polii dominanți care asigură realizarea indicilor de calitate admisibili sunt  $p_{1,2}^0 = 2,2(-0,5 \pm j0,87)$ .

Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis (relația (III.2.4)) este:

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2,5)} G_d(s)$$

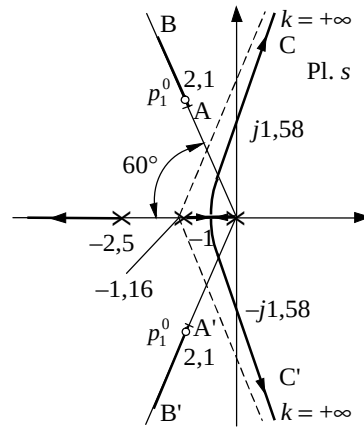


Fig.V.19.Locul rădăcinilor pentru  $G_R(s)=k_r/s$  la exemplul 5.1r

în care  $k = 12,5k_r$ . Locul rădăcinilor este reprezentat în fig. V.19. Se observă că oricare ar fi  $k \geq 0$  sistemul automat nu poate avea polii dominanți pe semidreptele AB și A'B' (pe care se află și polii dominanți impuși,  $p_{1,2}^0$ ).

Se știe că prin introducerea în  $G_d(s)$  a unor zerouri și / sau poli suplimentari locul rădăcinilor se modifică. În cazul de față este necesară o deplasare a locului rădăcinilor spre stânga, fără modificarea numărului de ramuri care ajung în punctul de la  $\infty$  dar cu reparametrizarea după valorile lui  $k$  astfel încât ramurile C și C' să intersecteze semidreptele AB și A'B' (fig.V.19). Pentru aceasta este suficient să se introducă un zero suplimentar în -1 (care compensează polul cel mai lent al părții fixate situat în -1)

și un pol suplimentar îndepărtat, de exemplu în  $-20$ , care să deplaseze locul rădăcinilor spre stânga. În aceste circumstanțe se adoptă:

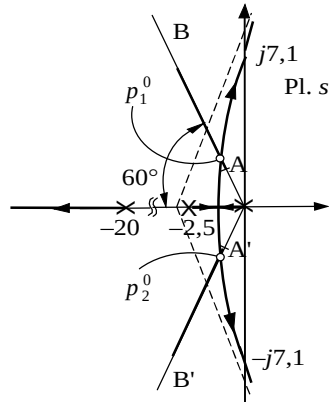


Fig.V.20. Locul rădăcinilor pentru  $G_R(s) = k_r / [s(s+1)(s+20)]$  la exemplul 5.1

$$G_R(s) = \frac{k_r}{s(s+1)(s+20)},$$

cu care se obține:

$$G_d(s) = \frac{k}{s(s+2.5)(s+20)}.$$

Locul rădăcinilor corespunzător acestui  $G_d(s)$  este reprezentat în fig.V.20. Pentru confirmarea faptului că locul rădăcinilor intersectează semidreptele AB și A'B' se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} G_d(s) + 1 = 0 \\ \text{Im } s = -(\tan 60^\circ) \text{Re } s. \end{cases}$$

Rezultă  $\text{Re } s = -10/9$  și  $\text{Im } s = 10\sqrt{3}/9$ , respectiv

$|s| \approx 2,2$ , ceea ce înseamnă că locul rădăcinilor se intersectează cu semidreptele AB și A'B' foarte aproape de polii dominanți impuși  $p_{1,2}^0$ . Valoarea lui  $k$  pentru care are loc această intersecție se calculează din:

$$|G_d(-10/9 + j10\sqrt{3}/9)| = 1.$$

Rezultă

$$k = |-10/9 + j10\sqrt{3}/9| \cdot |-10/9 + 2.5 + j10\sqrt{3}/9| \cdot |-10/9 + 20 + j10\sqrt{3}/9| \approx 100.$$

Întrucât  $k = 12,5k_r$ , rezultă  $k_r = 8$ . Funcția de transfer a regulatorului este:

$$G_R(s) = \frac{8}{s(s+1)(s+20)}.$$

Funcția de transfer a sistemului automat este:

$$G_0(s) = \frac{100}{s^3 + 22,5s^2 + 50s + 100} = \frac{100}{(s + 10/9 - j10\sqrt{3}/9)(s + 10/9 + j10\sqrt{3}/9)(s + 20,25)},$$

din care rezultă în mod evident că polii  $p_{1,2}^0 = -10/9 \pm j10\sqrt{3}/9$  sunt dominanți. ■

Metoda frecvențială este prima metodă de analiză și de sinteză a sistemelor automate care s-a dezvoltat coerent și unitar și care s-a aplicat consecvent în perioada clasică a automatizării (anii 1930 – 1960). Se poate afirma cu certitudine că marea majoritate a sistemelor automate de tip clasic existente astăzi în industrie sau în alte domenii au fost și sunt proiectate și realizate pe baza conceptelor și tehnicilor elaborate în cadrul metodei frecvențiale. Succesul aplicării acestei metode în proiectarea sistemelor automate liniare a determinat utilizarea ei, cu adaptările de rigoare, și pentru sistemele automate neliniare (se va vedea în capitolul VII).

Fundamentul matematic pe care s-a dezvoltat metoda frecvențială este constituit de transformarea Laplace (Anexa A.1), transformarea Fourier (Anexa A.2 și 3, Anexa B.2), teoria funcțiilor de variabilă complexă, iar în cadrul acesteia de principiul argumentului.

Baza experimentală a metodei frecvențiale o constituie **răspunsul la frecvență**. Suportul matematic constituit de transformarea Fourier conferă răspunsului la frecvență rigoarea necesară pentru dezvoltări teoretice eficiente în analiza unor aspecte ale *principiului cauzalității* (abordarea într-o manieră intuitivă în subcap. II.1 și în mod riguros în subcap VI.3) sau pentru formularea unor caracterizări pertinente ale BIBO-stabilității sistemelor automate, cu elaborarea subsecventă a unor procedee de sinteză a sistemelor automate.

## 1. Răspunsul la frecvență

### 1.1. Semnificația funcției $G(j\omega)$

Se consideră sistemul dinamic neted, cu parametri concentrați, liniar și invariant în timp, cu o singură mărime de intrare și o singură mărime de ieșire, ambele funcții scalare de timp, descris de ecuația (1.4) de la II.1.3. Conform cu II.1.4, transferul intrare – ieșire este:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad (1.1)$$

în care funcția de transfer  $G(s)$  are expresia (1.11) de la II.1.4.

Mărimea de intrare este funcția sinusoidală:

$$u(t) = \sin \omega_0 t, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (1.2)$$

în care  $\omega_0 \in \mathbf{R}$  este un parametru (în sensul că  $\omega_0$  poate lua orice valoare reală fixată). Se știe că între pulsația  $\omega$  [ $\text{rad} \times \text{s}^{-1}$ ] și frecvența  $f$  [ $\text{s}^{-1}$ ] există relația  $\omega = 2\pi f$ , ceea ce înseamnă că din punct de vedere dimensional  $\omega$  și  $f$  sunt de același tip. Din acest motiv nu se face o distincție specială între pulsație și frecvență, exceptând situațiile când se ține seama efectiv de relația cantitativă dintre  $\omega$  și  $f$ . În acest context se vorbește de «metoda frecvențială», «răspunsul la frecvență» etc., deși variabila frecvențială avută în vedere este pulsația  $\omega$ .

Se va determina componenta de regim permanent  $y_p(t)$  a mărimii de ieșire  $y(t)$ . Se știe că:  $U(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \omega_0 / (s^2 + \omega_0^2)$ , ceea ce, după înlocuirea în (1.1), conduce la:

$$Y(s) = G(s) \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}. \quad (1.3)$$

Pentru simplificarea calculelor se presupune că  $s = \pm jw_0$  nu sunt nici zerouri și nici poli ai funcției  $G(s)$ . Componenta de regim permanent,  $Y_P(s)$ , se separă foarte ușor din  $Y(s)$  deoarece, după cum s-a arătat și la II.5.1., aceasta este formată din fracțiile simple corespunzătoare polilor lui  $U(s)$ . Aceștia sunt  $s_{1,2} = \pm jw_0$ . Așadar:

$$Y_P(s) = \frac{A_1}{s - jw_0} + \frac{A_2}{s + jw_0}, \quad (1.4)$$

pentru care, din (1.3), conform teoremei dezvoltării (Anexa A.1.2.b.1°), rezultă:

$$A_{1,2} = \left[ (s \mp jw_0) G(s) \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} \right]_{s = \pm jw_0} = \pm \frac{1}{2j} G(\pm jw_0). \quad (1.5)$$

$G(s)$  este o fracție rațională cu coeficienți reali, astfel că se poate scrie:

$$G(\pm jw_0) = R(w_0) \pm jI(w_0), \quad (1.6)$$

în care  $R(w_0)$  și  $I(w_0)$  sunt partea reală și respectiv imaginară ale lui  $G(jw_0)$ . Prin înlocuirea în (1.4) a relațiilor (1.5) și (1.6), după calcule elementare, se obține:

$$\begin{aligned} Y_P(s) &= \frac{1}{2j} G(jw_0) \frac{1}{s - jw_0} - \frac{1}{2j} G(-jw_0) \frac{1}{s + jw_0} = \\ &= \frac{1}{2j} [R(w_0) + jI(w_0)] \frac{1}{s - jw_0} - \frac{1}{2j} [R(w_0) - jI(w_0)] \frac{1}{s + jw_0} = \\ &= \frac{1}{2j} R(w_0) \left[ \frac{1}{s - jw_0} - \frac{1}{s + jw_0} \right] + \frac{1}{2j} jI(w_0) \left[ \frac{1}{s - jw_0} + \frac{1}{s + jw_0} \right] = \\ &= R(w_0) \frac{w_0}{s^2 + w_0^2} + I(w_0) \frac{s}{s^2 + w_0^2}. \end{aligned}$$

Funcția original corespunzătoare (conform Anexei C.1) este:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= R(w_0) \sin w_0 t + I(w_0) \cos w_0 t = R(w_0) \left\{ \sin w_0 t + \frac{[I(w_0)/R(w_0)]}{\operatorname{tg} j} \cos w_0 t \right\} = \\ &= |G(jw_0)| \sin(w_0 t + \arg G(jw_0)), \quad t \in \mathbf{R}_+, \end{aligned} \quad (1.7)$$

în care

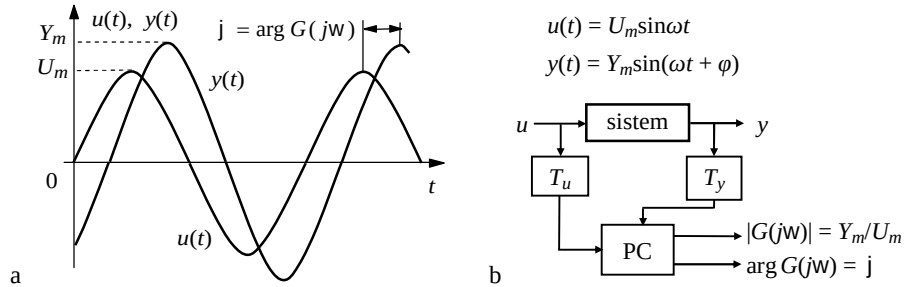
$$|G(jw_0)| = \sqrt{R^2(w_0) + I^2(w_0)}, \quad \arg G(jw_0) = j(w_0) = \operatorname{arctg}[I(w_0)/R(w_0)].$$

Rezultatul (1.7) pune în evidență faptul că în regim permanent sinusoidal mărimea de ieșire a sistemului descris de ecuația intrare – ieșire (1.1) este o funcție sinusoidală de amplitudine egală cu modulul lui  $G(jw_0)$  și de fază egală cu argumentul lui  $G(jw_0)$ . Pentru o intrare de amplitudine  $U_m$  și pulsație  $w$  cele două sinusoidale sunt reprezentate în fig. VI.1.a, în care, în virtutea liniarității, are loc:

$$Y_m = |G(jw)| U_m, \quad j = \arg G(jw).$$

Formal,  $G(jw)$  rezultă din  $G(s)$  pentru  $s = jw$ . Răspunsul la frecvență se obține prin

calcul (când se cunoaște funcția de transfer) sau pe cale experimentală. Dacă este necesară o validare a unui rezultat obținut prin calcul sau  $G(s)$  nu este cunoscută cu precizie adecvată,  $G(j\omega)$  se determină experimental, de exemplu conform schemei fig. VI.1.b.



## 1.2. Definiții

### Definiția 1

Funcția  $G(j\omega)$  care definește complet regimul permanent sinusoidal pentru  $\omega \in \mathbf{R}$  se numește *răspunsul la frecvență* al sistemului descris de funcția de transfer  $G(s)$ .  $\square$

Întrucât  $G(j\omega)$  se obține din  $G(s)$  pentru  $s = j\omega$ , care este ecuația axei imaginare a planului  $s$ , rezultă că  $G(j\omega)$  este imaginea axei imaginare prin *transformarea conformă*:

$$z = G(s).$$

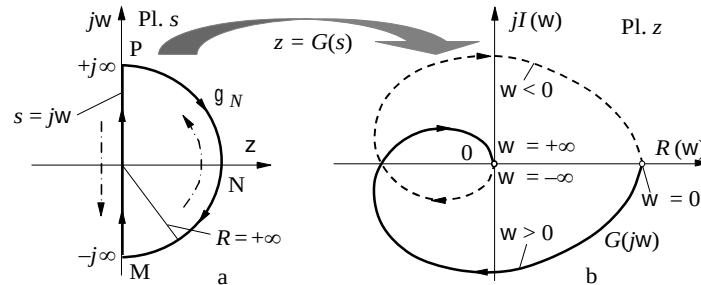


Fig. IV.2. (a) Conturul Nyquist  $g_N$  (a) parcurs în sens orar (trigonometric negativ; separat, cu linie-punct este indicat sensul pozitiv – trigonometric); (b) hodograful obținut prin transformarea conformă  $z = G(s)$

Axa imaginară a planului  $s$  este o curbă închisă (prin punctul de la infinit), numită **conturul Nyquist** ( $g_N$ , fig. IV.2.a). Rezultă că hodograful  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , este de asemenea o curbă închisă (eventual prin punctul de la infinit din planul  $z$ ) – fig. IV.2.b. Săgețile de pe  $g_N$  și de pe  $G(j\omega)$  indică sensul crescător al pulsației  $\omega$  (de la  $-\infty$  la  $+\infty$ ). Acesta corespunde parcurgerii în sens trigonometric negativ a lui  $g_N$  (sensul pozitiv este indicat de săgețile cu linie-punct). Urmează că domeniile mărginite de  $g_N$  și de  $G(j\omega)$  se află la dreapta conturilor respective atunci când acestea sunt parcurse în sensul crescător al pulsației  $\omega$ .

Ținând seama de faptul că  $G(s)$  se exprimă și sub forma *transformatei Laplace*:

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt,$$

în care  $g(t)$  este răspunsul la impulsul Dirac (II.3), urmează că înlocuind  $s = j\omega$  se obține:

$$G(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.8)$$

Rezultă că răspunsul la frecvență,  $G(j\omega)$ , este transformata Fourier a răspunsului la impulsul Dirac,  $g(t)$ . Transformata Fourier din (1.8) este *unilaterală* deoarece  $g(t) \equiv 0$  pentru  $t < 0$ . Acest rezultat prilejuiește și o interpretare frecvențială a transformatei  $G(j\omega)$  (și în general a transformării Fourier), în sensul că  $G(j\omega)$  este o imagine a spectrului de frecvențe conținute de originalul  $g(t)$ .

Transformata inversă:

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.9)$$

pune în evidență faptul că  $g(t)$  reprezintă o superpoziție, în formă integrală, a unor oscilații complexe de forma:  $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$  de amplitudine  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ .

Interpretarea frecvențială a transformării Fourier se extinde în mod natural și în cazul semnalelor  $u(t)$  și  $y(t)$  (în fond și  $g(t)$  este un semnal).

### Definiția 2.

În cazul în care originalul  $f(t)$  este un semnal, imaginea,  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , se numește *densitatea spectrală* și modulul imaginii,  $|F(j\omega)|$ , se numește *densitatea spectrală de amplitudine* ale semnalului  $f(t)$ .  $\square$

### 1.3. Transferul intrare – ieșire în domeniul frecvențelor

În cazul transferului intrare – ieșire (1.1), pentru  $s = j\omega$  se obține:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega), \quad (1.10)$$

care exprimă modul în care se transformă densitatea spectrală a mărimii de intrare,  $U(j\omega)$ , în densitatea spectrală a mărimii de ieșire,  $Y(j\omega)$ , prin transferul prin sistemul caracterizat de răspunsul său la frecvență,  $G(j\omega)$ .

#### Exemplul 1.1

Ecuația (1.10) poate fi utilizată pentru obținerea, pe altă cale, a rezultatului (1.7). Într-adevăr, având în vedere că pentru (1.2) se poate scrie (Anexa B.2.1.b.3°):

$$U(j\omega) = \mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = p[d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0)]/j,$$

din (1.10), după ce se înlocuiește  $U(j\omega)$ , se obține:

$$Y(j\omega) = p[G(j\omega_0)d(\omega - \omega_0) - G(-j\omega_0)d(\omega + \omega_0)]/j.$$

Utilizând (1.6), se scrie:

$$Y(j\omega) = R(\omega_0)p[d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0)]/j + I(\omega_0)p[d(\omega - \omega_0) + d(\omega + \omega_0)]$$

din care, trecând la domeniul timpului, rezultă (1.7).  $\square$

Ecuația (1.10) mai evidențiază și faptul că sistemul dinamic descris de (1.1) se comportă, în domeniul frecvențelor, ca un **filtru**.

#### Exemplul 1.2

Pentru  $u(t) = d(t)$ , care se caracterizează printr-o densitate spectrală uniformă și unitară (fig. VI.3.a; Anexa B.1.2.b.1°, Anexa C.2):  $U(j\omega) = \mathcal{F}\{d(t)\} = 1$ , din (1.10) rezultă:



$$Y(j\omega) = G(j\omega).$$

Așadar, mărimea de ieșire,  $y(t)$ , are o densitate spectrală neuniformă și neunitară (fig. VI.3.b, diferită de aceea a mărimii de intrare,  $u(t)$ ), densitate spectrală dependentă de  $G(s)$  (în acest caz chiar egală chiar cu  $G(j\omega)$ ).  $\square$

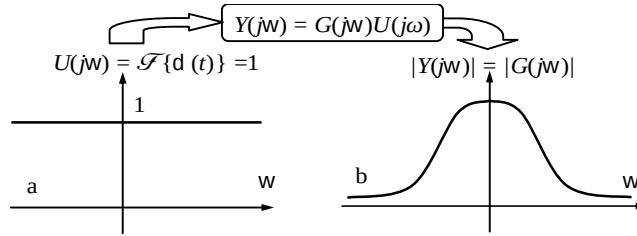


Fig. VI.3. Transferul frecvențial intrare – ieșire al impulsului Dirac (exemplul 1.2)

Forma densității spectrale de amplitudine pentru principalele tipuri de *filtre ideale* și, corespunzător, pentru câteva *sisteme realiste* (filtre electrice uzuale) se prezintă în 3.1 și respectiv 3.2 (exemplele 3.1 – 3.4).

### Exemplul 1.3

Se consideră un filtru cu (Anexele A.1.2.c.4o, C.2)

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} = r_{\omega_0}(\omega) = S(\omega - \omega_0) - S(\omega + \omega_0), \quad \omega \in \mathbf{R},$$

în care  $\omega_0 > 0$  este *pulsăția de tăiere* a filtrului. Graficul funcției  $G(j\omega)$  este reprezentat în fig. VI.a cu linie întreruptă. Pentru mărimea de intrare:

$$u(t) = ke^{-|a|t}, \quad t \in \mathbf{R},$$

cu  $2k/|a| > \pi$ , se cere să se determine densitatea spectrală a mărimii de ieșire  $y(t)$ .

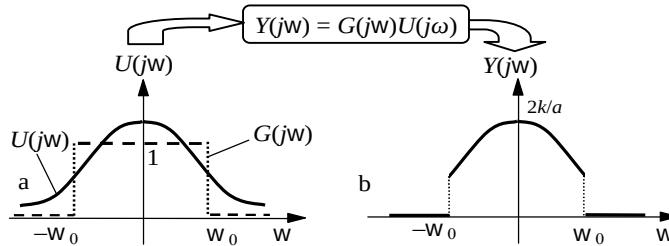


Fig. VI.4. Transferul frecvențial la exemplul 1.3;  $\omega_0$  – pulsăția de tăiere

$U(j\omega)$  are expresia:

$$U(j\omega) = \frac{2ka}{\omega^2 + a^2},$$

și este reprezentat în fig. VI.4.a (Anexele A.2.1.c.2o, C.2). Utilizând (1.10) se obține densitatea spectrală a ieșirii:

$$Y(j\omega) = [S(\omega - \omega_0) - S(\omega + \omega_0)] \frac{2ka}{\omega^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{2ka}{\omega^2 + a^2}, & |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Rezultă că filtrul considerat este de tipul «trece-jos» în sensul că, la ieșire, pulsațiile mai mari ca pulsația de tăiere  $\omega_0$  (existente în spectrul lui  $u(t)$ ) sunt eliminate – fig. VI.4.b.  $\square$

#### 1.4. Caracteristica reală de frecvență și relația cu răspunsul indicial

În anumite abordări teoretice și în unele aplicații se utilizează și caracteristica reală de frecvență  $R(\omega)$  și caracteristica imaginară de frecvență  $I(\omega)$ .

Ca funcție pară,  $R(\omega)$  poate fi utilizată pentru determinarea relației dintre răspunsul indicial și răspunsul la frecvență. Pe baza relației (4.3) de la II.4.1 pentru  $G(s)$  BIBO-stabil, cu (2.1) (în condițiile precizate în Anexa B.2.3.b) și conform proprietăților 12° din Anexa A.2.1.b, în urma unor calcule elementare, se obține:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{s}G(s)\right\} = \frac{2}{p} \int_0^\infty R(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (1.11)$$

##### a. Relația dintre durata regimului tranzitoriu și pulsația de tăiere

Fie două sisteme diferite cu caracteristicile  $R_1(\omega)$  și  $R_2(\omega)$  și  $R_1(\omega) = R_2(a\omega)$ ,  $a > 1$ . Cele două caracteristici reale de frecvență sunt similare ca formă dar diferite numai prin factorul  $a > 1$  de scalare a pulsației. În conformitate cu (1.1) se poate scrie:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \frac{2}{p} \int_0^\infty R_1(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{p} \int_0^\infty R_2(a\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{p} \int_0^\infty R_2(\omega) \frac{\sin(a\omega)(t/a)}{a\omega} d(a\omega) = h_2(t/a). \end{aligned}$$

Din acest rezultat se trage concluzia că durata regimului tranzitoriu  $t_s$  este cu atât mai mică cu cât  $R(\omega)$  se extinde pe un interval de frecvențe mai mare, respectiv cu cât pulsația de tăiere (pentru un sistem de tipul «trece-jos», exemplul 1.3) este mai mare.

##### b. Relația dintre suprareglare și maximul funcției $R(\omega)$

Cu substituția  $h = \omega t$ , din (1.11) pentru  $R(\omega) > 0$  și  $dR(\omega)/d\omega < 0$ ,  $\omega > 0$ , se obține:

$$h(t) = \frac{2}{p} \sum_{k=0}^\infty \int_{kp}^{(k+1)p} R(h/t) \frac{\sinh}{h} dh \leq \frac{2}{p} \int_0^p R(h/t) \frac{\sinh}{h} dh \leq \frac{2}{p} R(0) \int_0^p \frac{\sinh}{h} dh \leq 1,18 R(0).$$

Pe de altă parte, cu (4.2) de la II.4, pentru valoarea de regim staționar se scrie:

$$\bar{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = G(0) = R(0) \quad (1.12)$$

deoarece  $I(0) = 0$  ( $I(\omega)$  este funcție impară, Anexa A.2.1.b.9°). Utilizând (7.1) de la II.7.1 și rezultatul (1.12), pentru suprareglarea sistemului se obține:  $S\% \leq 18\%$ .

În situația în care  $R(\omega)$  are o formă oarecare, cu un singur maxim  $R_{\max} > R(0) > 0$ , procedând în mod similar, se poate arăta că suprareglarea satisface:  $S\% \leq 18\%[R_{\max}/R(0)]$ .

Se trage concluzia că o valoare  $R_{\max}/R(0)$  mare corespunde unei limite superioare mari a suprareglării  $S\%$ . În același timp, un raport  $R_{\max}/R(0)$  de valoare redusă poate asigura ca limita superioară a suprareglării să fie de asemenea redusă.

## 2. Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvență

Răspunsul la frecvență se utilizează practic și sub forma unor reprezentări grafice. Cele mai utilizate sunt *locul de transfer* și *diagrama Bode*.

### 2.1. Locul de transfer

Locul de transfer este hodograful funcției  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$  (fig.IV.2.b).  $G(j\omega)$  se obține din  $G(s)$  pentru  $s = j\omega$  și este imaginea *conturului Nyquist* ( $g_N$ , fig.IV.2.a). Locul de transfer se parametrizează după valorile lui  $\omega$ .

Funcția de transfer  $G(s)$  este raportul a două polinoame cu coeficienți reali. În aceste condiții are loc:

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)}, \quad (2.1)$$

în care bara superioară simbolizează operația de conjugare a numerelor complexe. Conform relației (2.1), rezultă că locul de transfer  $G(j\omega)$  este simetric față de axa reală a planului  $z$ . În consecință este suficientă reprezentarea locului de transfer numai pentru  $\omega \in \mathbf{R}_+$ , urmând ca restul locului să se obțină prin simetrie față de axa reală.

#### a. Forma locului de transfer la frecvențe înalte

Pentru a determina forma locului de transfer la frecvențe înalte se consideră funcția de transfer (1.11) de la II.1.4. Se înlocuiește  $s = j\omega$  și se obține:

$$G(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}. \quad (2.2)$$

Pentru  $\omega \rightarrow +\infty$  se obține:

$$G(+j\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{b_m}{a_n} \lim_{\omega \rightarrow \infty} (j\omega)^{m-n} = \frac{b_m}{a_n} e^{j(m-n)\pi/2} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{m-n}.$$

Valoarea limitei depinde de  $m - n$ . Pentru cazul  $b_m/a_n > 0$  se poate scrie:

$$m - n = 1, \quad G(+j\infty) = +\infty e^{j\pi/2} = +\infty$$

$$m - n = 2, \quad G(+j\infty) = +\infty e^{j\pi} = -\infty$$

$$m - n = 3, \quad G(+j\infty) = +\infty e^{j3\pi/2} = -j\infty$$

$$m - n = 4, \quad G(+j\infty) = +\infty e^{j2\pi} = +\infty$$

.....

Este evidentă o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind egală cu 4. În continuare:

$$m - n = 0, \quad G(+j\infty) = b_m/a_n > 0,$$

$$m - n \leq -1, \quad G(+j\infty) = 0 \cdot e^{j(m-n)\pi/2} = 0 \cdot j^{m-n},$$

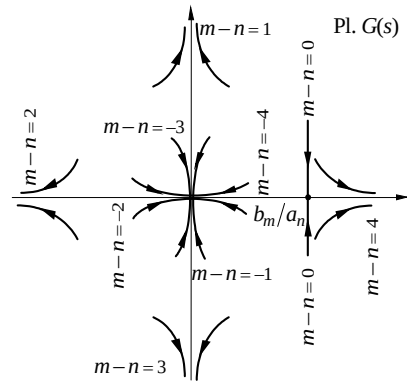


Fig. VI.5. Forma locului de transfer la frecvențe înalte ( $\omega \rightarrow +\infty$ )

fiind vizibilă și aici o periodicitate a valorii limitei, perioada fiind aceeași.

Pentru  $-4 \leq m - n \leq 4$  toate situațiile posibile ale formei locului de transfer la frecvențe înalte sunt reprezentate în fig. VI.5. Săgețile indică sensul de creștere a lui  $\omega$ .



## 2.2. Diagrama Bode

Diagrama Bode este o reprezentare în coordonate carteziene a funcțiilor:

$$A_{dB}(w) = 20 \lg |G(jw)|, \quad w \in \mathbf{R}_+, \quad (2.4)$$

$$j(w) = \arg G(jw), \quad w \in \mathbf{R}_+, \quad (2.5)$$

de regulă, pentru o scară logaritmică (în baza 10) a pulsației – fig.VI.7.

- $A_{dB}(w)$  se numește **atenuearea** răspunsului la frecvență și se măsoară în deciBell (dB) și
- $j(w)$  se numește **faza** răspunsului la frecvență și se măsoară în grade (mai rar în radiani).

Diagrama Bode este utilizată mai ales în aplicații, deoarece, adeseori, *caracteristica atenuare – frecvență* (2.4) și, uneori, *caracteristica fază – frecvență* (2.5) pot fi approximate prin linii frânte. Totodată, diagrama Bode permite evidențierea și utilizarea mai simplă a corelațiilor care există sau se dorește să existe, pe anumite benzi de frecvențe, între atenuarea și faza răspunsului la frecvență.

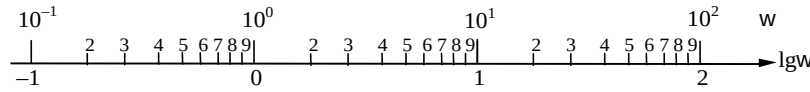


Fig. VI.7. Scara logaritmică (în baza 10) a pulsației

## 2.3. Elemente de transfer tipice

În continuare se va analiza comportarea în domeniul frecvențelor a elementelor de transfer tipice prezentate la II.7.2.

**a) Elementul proporțional (P)** are funcția de transfer:

$$G_P(s) = K. \quad (2.6)$$

Răspunsul la frecvență este  $G_P(jw) = K$ . Locul de transfer se reduce la un punct situat pe axa reală și diagrama Bode se reprezintă utilizând  $A_{dB}(w) = 20 \lg K$  și  $j(w) = 0$ .

S-a arătat la II.7.2.a că funcția de transfer (2.6), în cazul unor sisteme dinamice reale, este o aproximare bazată pe idealizări și / sau simplificări ale modelului matematic. Aproximări similare se pot face pe baze experimentale, și anume atunci când  $A_{dB}(w) \approx$  constant și  $j(w) \approx 0$  pe domenii relativ largi de frecvențe (începând cu frecvența nulă).

**b) Elementul de întârziere de ordinul 1 (T1)** are funcția de transfer:

$$G_{T1}(s) = \frac{1}{Ts + 1}. \quad (2.7)$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G_{T1}(jw) = \frac{1}{jTw + 1} = \frac{1}{1 + jh}, \quad h = Tw, \quad (2.8)$$

în care  $h$  este pulsația normalată (adimensională). Din (2.8) rezultă:

$$R(w) = \frac{1}{T^2 w^2 + 1} = \frac{1}{h^2 + 1}, \quad I(w) = -\frac{Tw}{T^2 w^2 + 1} = -\frac{h}{h^2 + 1}, \quad (2.9)$$

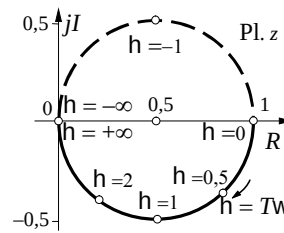


Fig. VI.8. Locul de transfer al elementului de întârziere de ordinul 1 (T1).

$$A_{dB}(w) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{T^2 w^2 + 1}} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{h^2 + 1}}, \quad j(w) = -\arctg Tw = -\arctg h. \quad (2.10)$$

Ecuația locului de transfer se obține imediat din (2.9) prin eliminarea lui  $h$  între  $R(w)$  și  $I(w)$ . Rezultă  $h = -I(w)/R(w)$ , care se înlocuiește în  $R(w)$ , după care se obține:  $R^2 + I^2 - R = 0$ . Aceasta este ecuația unui cerc (fig.VI.8) cu centrul în  $(1/2, 0)$  și de rază  $1/2$ .

Pentru a trasa diagrama Bode se are în vedere că din (2.10) rezultă:

$$A_{dB}(w) = -20 \lg \sqrt{h^2 + 1} \cong \begin{cases} 0, & 0 \leq h \ll 1 \\ -20 \lg h, & 1 \ll h < +\infty \end{cases} \quad (2.11)$$

$$j(w) = -\arctg 10^{\lg h} \cong \begin{cases} 0, & 0 \leq h \ll 0,1 \\ -45^\circ (\lg h + 1), & 0,1 < h < 10 \\ -90^\circ, & 10 \ll h < +\infty. \end{cases} \quad (2.12)$$

$A_{dB}(w)$  și  $j(w)$  conforme cu (2.10) sunt trasate . cu linie întreruptă în fig.VI.9. Conform cu (2.11), caracteristica atenuare – frecvență are două asimptote:  $A_{dB}(w)=0$  și  $A_{dB}(w)=-20 \lg h$ . Ele se intersectează în *punctul de frângere*, de abscisă  $h = 1$  ( $\lg h = 0$ );  $h = 1$  ( $w = 1/T$ ) se numește *pulsăția de frângere*. Asimptotele se utilizează pentru aproximarea caracteristicii atenuare – frecvență, fig.VI.9.a. Eroarea maximă introdusă este de 3dB

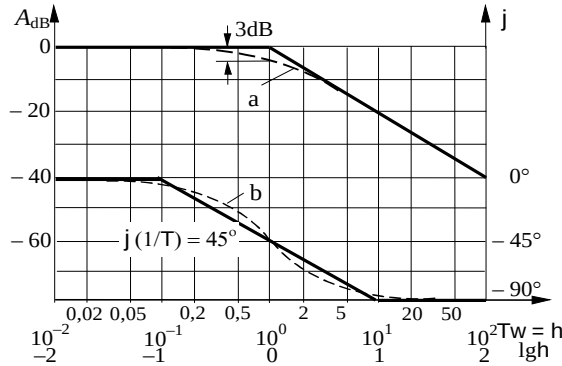


Fig.VI.9. Diagrama Bode a elementului de întârziere de ordinul 1 (T1); caracteristicile: (a) atenuare – frecvență și (b) fază – frecvență

pentru  $h = 1$  (aceasta rezultă din  $A_{dB}(1/T) = -20 \lg \sqrt{2} \cong -3\text{dB}$ ).

Din fig.VI.9.a mai rezultă că elementul T1 este un filtru «trece-jos», cu panta de  $-20\text{dB}/\text{decadă}$  pentru pulsații mai mari ca  $h = 1$  ( $w = 1/T$ ). În mod convențional,  $h = 1$  ( $w = 1/T$ ), pentru care  $A_{dB}(1/T) = -3\text{dB}$ , se numește *pulsăția de tăiere* în sensul filtrelor (coincide cu pulsăția de frângere), iar intervalul de pulsații  $[0,1]$  (respectiv  $[0,1/T]$ ) este *banda de trecere* a filtrului «trece-jos».

În mod similar, ținând seama de (2.12), caracteristica fază – frecvență poate fi aproximată prin trei segmente de dreaptă, fig.VI.9.b. Remarcabil este faptul că  $j(1/T) = -45^\circ$ .

**c) Elementul de întârziere de ordinul 2 (T2)** are funcția de transfer:

$$G_{T2}(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2Zw_n s + w_n^2}. \quad (2.13)$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G_{T2}(jw) = \frac{w_n^2}{w_n^2 - w^2 + j2Zw_n w} = \frac{1}{1 - h^2 + j2Zh}, \quad h = \frac{w}{w_n}, \quad (2.14)$$

în care  $h$  este pulsăția normalizată. Din (2.14) rezultă:

$$\begin{cases} R(w) = \frac{w_n^2(w_n^2 - w^2)}{(w_n^2 - w^2)^2 + 4z^2 w_n^2 w^2} = \frac{1 - h^2}{(1 - h^2)^2 + 4z^2 h^2} \\ I(w) = \frac{-2zw_n^3 w}{(w_n^2 - w^2)^2 + 4z^2 w_n^2 w^2} = \frac{-2zh}{(1 - h^2)^2 + 4z^2 h^2} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} A_{dB}(w) = 20 \lg \frac{w_n^2}{\sqrt{(w_n^2 - w^2)^2 + 4z^2 w_n^2 w^2}} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - h^2)^2 + 4z^2 h^2}} \\ j(w) = -\arctg \frac{2zw_n w}{w_n^2 - w^2} = -\arctg \frac{2zh}{1 - h^2} \end{cases} \quad (2.16)$$

Ecuațiile (2.15) nu mai oferă posibilitatea obținerii pe cale analitică a ecuației locului de transfer (ca funcție implicită de  $R$  și  $I$ ). Ecuațiile (2.15) pot fi utilizate pentru trasarea prin puncte a locului de transfer – fig.VI.10, pentru diferite valori ale factorului de amortizare  $z$ .

Diagrama Bode, în conformitate cu (2.16), este reprezentată în fig.VI.11. Se constată că  $A_{dB}(w)$ , pentru  $0 < z < 1/\sqrt{2}$ , are un maxim  $A_{dB\max} = 20 \lg(1/(2z\sqrt{1-z^2}))$  la pulsația

$h_r = \sqrt{1-2z^2}$  ( $w_r = w_n \sqrt{1-2z^2} < w_n$ ). Acesta este fenomenul de rezonanță: mărimea de intrare (1.2) are amplitudinea 1 (respectiv  $20 \lg 1 = 0$ ) în timp ce mărimea de ieșire în regim sinusoidal – (1.7) are amplitudinea  $1/(2z\sqrt{1-z^2}) > 1$  (respectiv  $20 \lg[1/(2z\sqrt{1-z^2})] > 0$ ).

Remarcabil este faptul că pentru  $0 \leq z < 1/\sqrt{2}$  există o bandă de pulsații pentru care  $A_{dB}(w) > 0$ , numită și banda de rezonanță.

Înlocuind  $A_{dB}(w)$  din (2.16) în inegalitatea precedentă rezultă banda de rezonanță:

$((0, \sqrt{2}h_r)$  adică  $(0, w_n \sqrt{2(1-2z^2)})$ .

Și în cazul elementului T2 se pot pune în evidență două asimptote ale caracteristicii atenuare – frecvență. Din prima relație din (2.16) rezultă:

$$A_{dB}(w) \equiv \begin{cases} 0, & 0 \leq h \ll 1 \\ -40 \lg h, & 1 \ll h < +\infty. \end{cases}$$

Aceste asimptote se intersectează pe axa absciselor în punctul  $h = 1$ , adică  $\lg h = 0$ . Acesta este punctul de frângere și  $h = 1$  ( $w = w_n$ ) este pulsația de frângere.

Din fig.VI.11 rezultă că utilizarea asimptotelor pentru aproximarea caracteristicii atenuare – frecvență nu este adecvată decât în cazul  $z \in [0,4, 0,6]$ , datorită erorilor inacceptabile care se introduc pe această cale.

Caracteristica atenuare – frecvență din fig.VI.11 arată că elementul T2 este un filtru «trece-jos», cu panta de  $-40\text{dB/decadă}$  pentru pulsații mai mari ca  $h = 1$  ( $w = w_n$ ). Convențional,  $h_0$  ( $w_0$ ) pentru care  $A_{dB}(w_0) = -3\text{dB}$  se numește pulsația de tăiere în sensul filtrelor iar banda de trecere a filtrului «trece-jos» este  $[0, h_0]$  (respectiv  $[0, w_0]$ ).

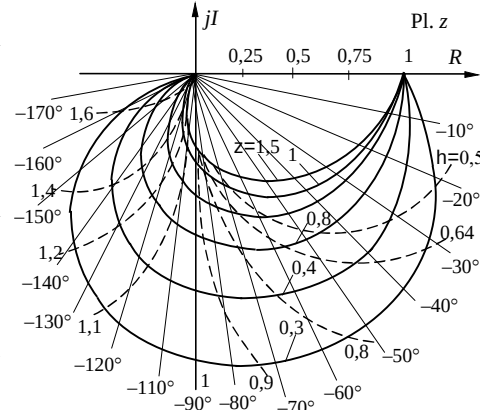


Fig. VI.10. Locul de transfer al elementului de întârziere de ordinul 2 (T2)

Semnificativ este faptul că pentru  $h = 1$  ( $w = w_n$ , care este pulsația naturală) se obține:  
 $A_{dB}(w_n) = -20 \lg 2z$  și  $j(w_n) = -90^\circ$ .

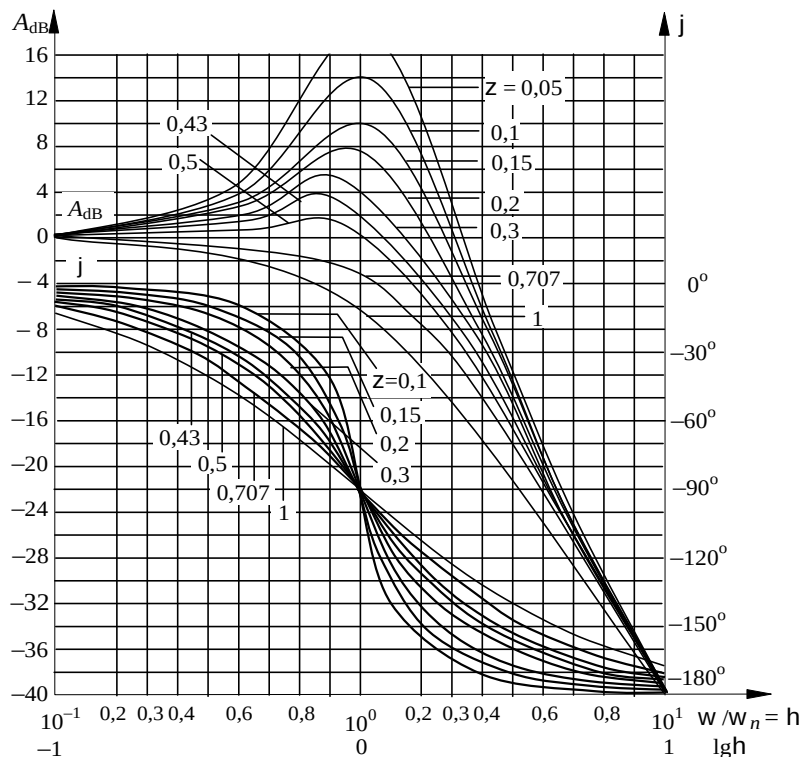


Fig.VI.11. Diagrama Bode a elementului de întârziere de ordinul 2 (T2)

**d) Elementul integrator (I)** are funcția de transfer:

$$G_I(s) = \frac{1}{T_I s}. \quad (2.17)$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G_I(jw) = \frac{1}{jT_I w} = \frac{1}{jh}, \quad h = T_I w, \quad (2.18)$$

în care  $h$  este pulsația normală. Din (2.18) rezultă:

$$R(w) = 0, \quad I(w) = -1/T_I w = -1/h, \quad (2.19)$$

$$A_{dB}(w) = 20 \lg(1/h), \quad j(w) = -90^\circ. \quad (2.20)$$

Locul de transfer și diagrama Bode sunt reprezentate respectiv în fig.VI.12 și fig.VI.13.

**e) Elementul derivator (D)** are funcția de transfer:

$$G_D(s) = T_D s. \quad (2.21)$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G_D(jw) = jT_D w = jh, \quad h = T_D w, \quad (2.22)$$



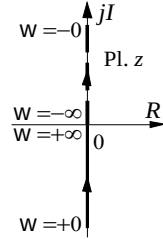


Fig.VI.12. Locul de transfer al elementului integrator (I)

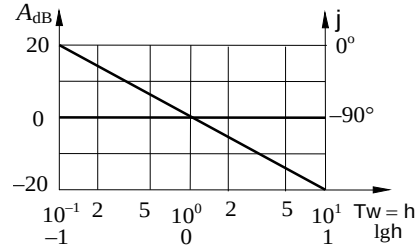


Fig.VI.13. Diagrama Bode a elementului integrator (I)

în care  $h$  este pulsația normalată. Din (2.22) rezultă:

$$R(w) = 0, \quad I(w) = T_D w = h, \quad (2.23)$$

$$A_{dB} = 20 \lg T_D w = 20 \lg h, \quad j(w) = 90^\circ. \quad (2.24)$$

Locul de transfer și diagrama Bode sunt reprezentate respectiv în fig.VI.14 și fig.VI.15.

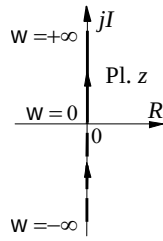


Fig.VI.14. Locul de transfer al elementului derivator (D)

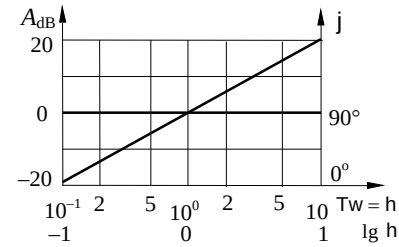


Fig.VI.15. Diagrama Bode a elementului derivator (D)

**f) Elementul cu timp mort (TM)** are funcția de transfer

$$G(s) = e^{-Ts}; \quad T > 0. \quad (2.25)$$

Răspunsul la frecvență are expresia:

$$G(jw) = e^{-jTw} = \cos Tw - j \sin Tw = \cosh - j \sinh, \quad h = Tw, \quad (2.26)$$

în care  $h$  este pulsația normalată. Din (2.26) rezultă:

$$R(w) = \cos Tw = \cosh, \quad I(w) = -\sin Tw = -\sinh, \quad (2.27)$$

$$|G(jw)| = 1, \quad j(w) = -Tw = -h. \quad (2.28)$$

Din (2.27) sau (2.28) se obține  $R^2 + I^2 = 1$ , ceea ce înseamnă că locul de transfer este un cerc, fig.VI.16. Caracteristicile (2.28) fac obiectul paragrafului 3.1.a (fig.VI.19).

## 2.4. Trasarea diagramei Bode prin linii poligonale aproximante

Principalul avantaj al definiției (2.4) a caracteristicii atenuare – frecvență constă în faptul că, dacă  $|G(jw)|$  este în formă factorizată, atunci  $\lg|G(jw)|$  se exprimă sub forma unei sume. De regulă termenii acestei sume admit aproximări grafice sub formă de linii frânte (așa cum s-a arătat la elementul T1 – fig.VI.9.a.). Prin sumarea grafică a respectivilor

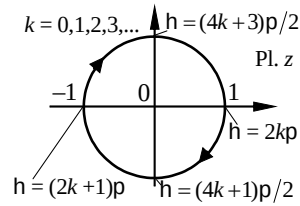


Fig.IV.16. Locul de transfer al elementului cu timp mort (TM)

termeni se obține relativ ușor caracteristica atenuare – frecvență sub forma unei linii poligonale aproximante. În mod similar se poate obține și caracteristica fază – frecvență. În acest caz se are în vedere, ca posibilitate, aproximarea utilizată la elementul T1 – fig.VI.9.b.

### Exemplul 2.1

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = 10(0,1s + 1) / [s(10s + 1)]$  și se cere să se traseze diagrama Bode prin linii poligonale.

Pentru  $s = j\omega$ , în conformitate cu (2.4) și (2.5), se obține:

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 20 \lg 10 - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (10\omega)^2} \\ j(\omega) = -90^\circ + \arctg 0,1\omega - \arctg 10\omega. \end{cases}$$

Diagrama Bode este reprezentată în fig.VI.17. Cu linii întrerupte s-au trasat caracteristicile parțiale, corespunzătoare termenilor din funcțiile  $A_{dB}(\omega)$  și  $j(\omega)$ . □

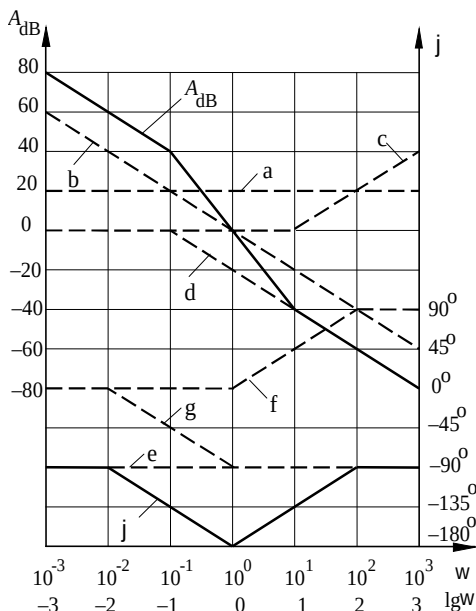


Fig.VI.17. Diagrama Bode la exemplul 2.1; a, b, c, d corespund respectiv termenilor din  $A_{dB}(\omega)$ ; e, f, g corespund respectiv termenilor din  $j(\omega)$

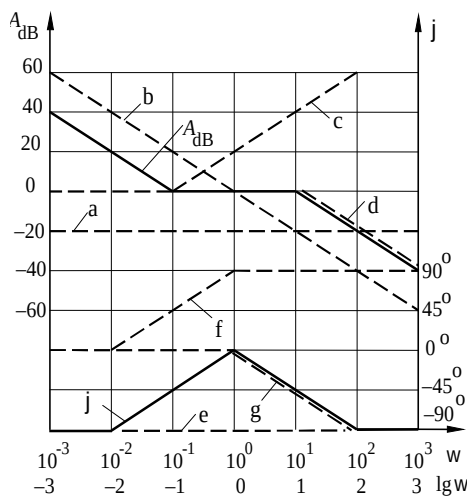


Fig.VI.18. Diagrama Bode la exemplul 2.2; a, b, c, d corespund respectiv termenilor din  $A_{dB}(\omega)$ ; e, f, g corespund respectiv termenilor din  $j(\omega)$

### Exemplul 2.2

Se consideră funcția de transfer:  $G(s) = 0,1(10s + 1) / [s(0,1s + 1)]$  și se cere să se traseze diagrama Bode prin linii poligonale.

Pentru  $s = j\omega$ , în conformitate cu (2.4) și (2.5), se obține:

$$\begin{cases} A_{dB}(\omega) = 20 \lg 0,1 - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + (10\omega)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + (0,1\omega)^2} \\ j(\omega) = -90^\circ + \arctg 10\omega - \arctg 0,1\omega. \end{cases}$$

Diagrama Bode este reprezentată în fig.VI.18. Cu linii întrerupte s-au trasat caracteristicile parțiale, corespunzătoare termenilor din funcțiile  $A_{dB}(\omega)$  și  $j(\omega)$ . □

### 3. Principiul non-anticipării

În acest subcapitol se vor prezenta caracterizări în domeniul frecvențelor ale sistemelor dinamice liniare care satisfac principiul non-anticipării (a se vedea observațiile 1.1 și 1.3 de la II.1.4). În acest scop și pentru a crea contrastul necesar și un cadru propice pentru o înțelegere profundă a întregii problematice, se va examina mai întâi o clasă de sisteme dinamice liniare cu proprietăți ideale. Întrucât sistemele dinamice se comportă în domeniul frecvențelor ca niște filtre (deși nu au, de regulă, în mod explicit o astfel de destinație), respectiva clasă de sisteme este desemnată în mod tradițional prin sintagma *filtre ideale*.

#### 3.1. Filtre ideale

Caracterul ideal al acestor sisteme dinamice constă în aceea că răspunsul la frecvență,  $G(j\omega)$ , are o formă care nu satisface principiul non-anticipării. De exemplu, pe anumite intervale de frecvență  $G(j\omega) = 0$ . Aceasta înseamnă că frecvențele respective, deși sunt prezente în mărimea de intrare, sunt absente în mărimea de ieșire (a se vedea exemplul 1.3). De regulă, această idealizare constituie o simplificare prin care se elimină dificultățile implicate de utilizarea formei exacte a lui  $G(j\omega)$  și are avantajul considerării proprietăților frecvențiale esențiale ale sistemelor dinamice. Dezavantajul introducerii acestor simplificări idealizatoare este că se încalcă principiul non-anticipării. O abordare pertinentă, în domeniul frecvențelor, a principiului non-anticipării va face obiectul paragrafului 3.2.

##### a. Filtorul ideal «trece-tot» (elementul cu timp mort)

În conformitate cu definiția răspunsului la frecvență se poate scrie:

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.1)$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg G(j\omega) \quad (3.2)$$

sunt *modul* și *faza* răspunsului la frecvență.

$G(s)$  are proprietatea că pentru  $s \in \mathbf{R}$  are loc  $G(s) \in \mathbf{R}$  ( $G(s)$  are coeficienți reali). Rezultă că  $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$  are următoarele proprietăți:

$$G(-j\omega) = \overline{G(j\omega)} = R(\omega) - jI(\omega), \quad (3.3)$$

$$R(-\omega) = R(\omega), \quad I(-\omega) = -I(\omega), \quad (3.4)$$

$$M(-\omega) = M(\omega), \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega). \quad (3.5)$$

Se spune că un sistem dinamic caracterizat prin răspunsul la frecvență (3.1), cu (3.2), este un *filtru ideal «trece – tot»* (FITT) dacă:

$$M(\omega) = M_0 = \text{constant} > 0 \quad (3.6)$$

$$\varphi(\omega) = -T\omega, \quad T = \text{constant} \geq 0, \quad (3.7)$$

fig.VI.19 (modulul nu depinde de frecvență și faza este liniar descrescătoare). Orice abateri față de (3.6) și / sau (3.7) reprezintă **distorsiuni de amplificare** și /sau **de fază**.

Din (3.1) și (3.6), (3.7) rezultă:

$$G(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega}, \quad (3.8)$$

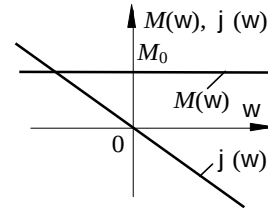


Fig. VI.19. Răspunsul la frecvență al filtrului ideal «trece-tot» (FITT) (elementul cu timp mort)

ceea ce înseamnă că transferul intrare – ieșire în domeniul frecvențelor are forma:

$$Y(j\omega) = M_0 e^{-jT\omega} U(j\omega). \quad (3.9)$$

Trecând la domeniul timpului (translația originalului, Anexa A.2.1.b.14<sup>o</sup>) se obține:

$$y(t) = M_0 u(t - T). \quad (3.10)$$

Conform cu II.7.2.f și 2.3.f, ecuația (3.10) reprezintă un *element proporțional cu timp mort* (PTM). Comportarea ideală (3.10) este de fapt un deziderat (mai ales în tehnica transmisiunii informației) în sensul că este de dorit ca, exceptând întârzierea  $T$ , necesară propagării lui  $u(t)$  prin sistem, mărimea de ieșire,  $y(t)$ , să fie proporțională cu mărimea de intrare,  $u(t)$ . Conform cu (3.8) funcția de transfer este:

$$G(s) = M_0 e^{-Ts}. \quad (3.11)$$

*b. Filtrul ideal fără distorsiuni de fază*

Sistemul dinamic caracterizat de răspunsul la frecvență:

$$\begin{cases} M(\omega) \neq \text{constant} \\ j(\omega) = -T\omega \end{cases} \quad (3.12)$$

$$G(j\omega) = M(\omega) e^{-jT\omega} \quad (3.13)$$

se numește *filtru ideal fără distorsiuni de fază*.

Dacă  $M(\omega)$  este funcție absolut integrabilă, atunci există o funcție original  $m(t) = \mathcal{F}^{-1}\{M(\omega)\}$ . Întrucât  $M(\omega)$  este reală și pară, rezultă că și  $m(t)$  este pară, adică:

$$m(-t) = m(t). \quad (3.14)$$

Ca urmare:

$$m(t) = \mathcal{F}^{-1}\{M(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} M(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.15)$$

Din (3.11), conform teoremei translatei originalului (Anexa A.2.1.b.14<sup>o</sup>), se obține:

$$g(t) = m(t - T). \quad (3.16)$$

Pentru  $t - T = t$ , din (3.12) și (3.14) rezultă:

$$g(T + t) = g(T - t), \quad (3.17)$$

ceea ce înseamnă că graficul răspunsului la impuls,  $g(t)$ , este simetric față de dreapta  $t = T$  (paralelă cu axa ordonatelor).

În continuare, din (3.17) – (3.19) rezultă:

$$g(t) = m(t - T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} M(\omega) \cos \omega(t - T) d\omega, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3.18)$$

din care se mai obține:

$$|g(t)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} M(\omega) d\omega = g(T), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (3.19)$$

adică  $g(t)$  își atinge maximumul în  $t = T$ .

Răspunsul indicial se poate determina cu ajutorul produsului de convoluție:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) s(t - t) dt, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.21)$$

Întrucât  $\mathcal{F}\{s(t)\} = \text{pd}(\omega) + 1/j\omega$  (Anexa B.2.3.b.3<sup>o</sup>,  $k = 0$ ), din (3.18) se obține:

$$H(jw) = G(jw) \left[ p d(w) + \frac{1}{jw} \right] = p G(0) d(w) + G(jw) \frac{1}{jw} = p M(0) d(w) + M(w) \frac{1}{jw} e^{-jTw}.$$

Revenind la domeniul timpului se obține răspunsul indicial:

$$h(t) = \frac{1}{2} M(0) + \frac{1}{p} \int_0^\infty M(w) \frac{\sin w(t-T)}{w} dw, t \in \mathbf{R}. \quad (3.21)$$

Din (3.21), pe baza substituției  $t - T = t$ , se scrie:

$$h(T-t) - M(0)/2 = M(0)/2 - h(T-t), \quad (3.22)$$

adică  $h(t)$  este o funcție impară într-un sistem de axe cu originea în  $(T, M(0)/2)$ .

Se remarcă faptul că  $g(t)$  și  $h(t)$  sunt nenule pentru  $t < 0$ , ceea ce contravine principiului non-anticipării.

#### b1. Filtrul ideal «trece-jos»

Un filtru «trece-jos» permite transferul frecvențelor într-un interval  $[-w_1, w_1]$ , în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalul  $[-w_1, w_1]$  se numește *banda de trecere* a filtrului «trece-jos». Răspunsul la frecvență (3.13) al unui filtru ideal «trece-jos» (FITJ) se caracterizează prin (fig.VI.20):

$$M(w) = \begin{cases} M_0, & w \in [-w_1, w_1] \\ 0, & w \in (-\infty, -w_1) \cup (w_1, +\infty) \end{cases}. \quad (3.23)$$

Răspunsul la impulsul Dirac se obține înlocuind (3.23) în (3.18). După calcule elementare se obține:

$$g(t) = \frac{1}{p} M_0 \frac{\sin w_1(t-T)}{t-T}, t \in \mathbf{R}, \quad (3.24)$$

al cărei grafic este reprezentat în fig.VI.21.

Răspunsul indicial se obține înlocuind (3.23) în (3.21). Rezultă:

$$h(t) = M_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \text{Si} w_1(t-T) \right], t \in \mathbf{R}, \quad (3.25)$$

în care  $\text{Si} ax = \int_0^x \frac{\sin ax}{x} dx$  este funcția *sinus integral*.

Graficul răspunsului indicial este reprezentat în fig.VI.22.

Adoptând ca măsură a rapidității răspunsului indicial panta sa maximă normală (prin împărțirea la  $M_0$ ), care se obține pentru  $t = T$ , se constată că:

$$h'_{\max} = h'(T) / M_0 = g(T) / M_0 = w_1 / p. \quad (3.26)$$

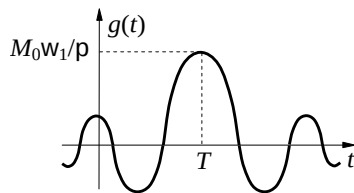


Fig. IV.21. Răspunsul la impuls al filtrului ideal «trece-jos» (FITJ)

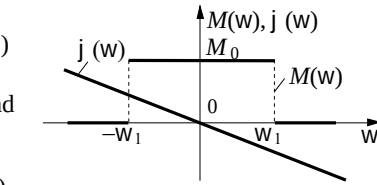


Fig. IV.20. Răspunsul la frecvență al filtrului ideal «trece-jos» (FITJ)

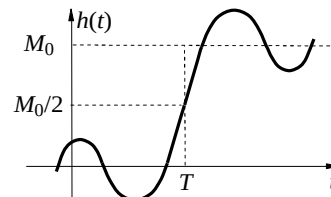


Fig. IV.22. Răspunsul indicial al filtrului ideal «trece-jos» (FITJ)

**Rapiditatea** astfel definită este proporțională cu **banda de trecere**,  $w_1$ , a filtrului ideal «trece-jos». Pe de altă parte, calitativ, rapiditatea este invers proporțională cu durata de creștere,  $t_c$ , definită la II.7.1. Ca urmare, se poate afirma că *durata de creștere*  $t_c$  este invers proporțională cu *banda de trecere* a filtrului ideal «trece-jos». Acest fapt este confirmat de relația (7.33) de la II.7.2.c3 și are valabilitate calitativă generală pentru filtrele «trece-jos». Rezultatul (3.26) este consistent cu definiția (3.23), care exprimă faptul că filtrul ideal «trece-jos» transferă numai semnalele sinusoidale a căror pulsație este maximum  $w_1$ , și că, în context frecvențial,  $w_1$  este o măsură a rapidității.

### b2. Filtrul ideal «trece-sus»

Un filtru «trece-sus» permite transferul frecvențelor în intervalele  $(-\infty, -w_1]$ ,  $[w_1, +\infty)$ , în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalul  $(-w_1, w_1)$  se numește *banda de blocare* a filtrului «trece-sus». Răspunsul la frecvență (3.13) al unui filtru ideal «trece-sus» (FITS) se caracterizează prin (fig.IV.23):

$$M(w) = \begin{cases} 0, & w \in (-w_1, w_1), \\ M_0, & w \in (-\infty, -w_1] \cup [w_1, +\infty). \end{cases} \quad (3.27)$$

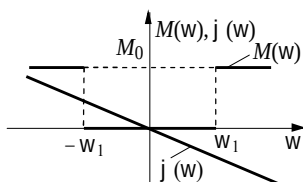


Fig.IV.23. Răspunsul la frecvență al unui filtru ideal «trece-sus» (FITS)

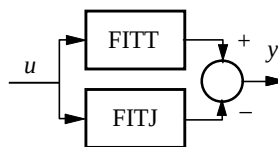


Fig.IV.24. Filtru ideal «trece-sus» (FITS) format prin conectarea în paralel a unui filtru ideal «trece-tot» (FITT) și unui filtru ideal «trece-jos» (FITJ)

Este ușor de constatat că un FITS se poate realiza prin conectarea unui FITT și a unui FITJ ca în fig. VI.24, în care se au în vedere fig. VI.19, 20 și 23.. Pe această bază se pot scrie expresiile răspunsurilor la impulsul Dirac și indicial.

### b3. Filtrul ideal «trece-bandă»

Un filtru permite transferul frecvențelor în intervalele  $[-w_2, -w_1]$ ,  $[w_1, w_2]$ , în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Aceste intervale constituie *benzile de trecere* ale filtrului «trece-bandă».

Răspunsul la frecvență (3.13) al unui filtru ideal «trece-bandă» FITB se caracterizează prin (fig.IV.25.a):

$$M(w) = \begin{cases} M_0, & w \in [-w_2, -w_1] \cup [w_1, w_2], \\ 0, & w \in (-\infty, -w_2) \cup (-w_1, w_1) \cup (w_2, +\infty). \end{cases} \quad (3.28)$$

Un FITB se poate realiza prin conectarea în serie, ca în fig.IV.25.b, a unui FITJ, cu banda de trecere  $[-w_2, w_2]$ , și a unui FITS cu banda de blocare  $(-w_1, w_1)$ ,  $w_2 > w_1$ , fig.IV.25.a. Pe baza fig.IV.25.b se pot determina și răspunsurile la impulsul Dirac și indicial.

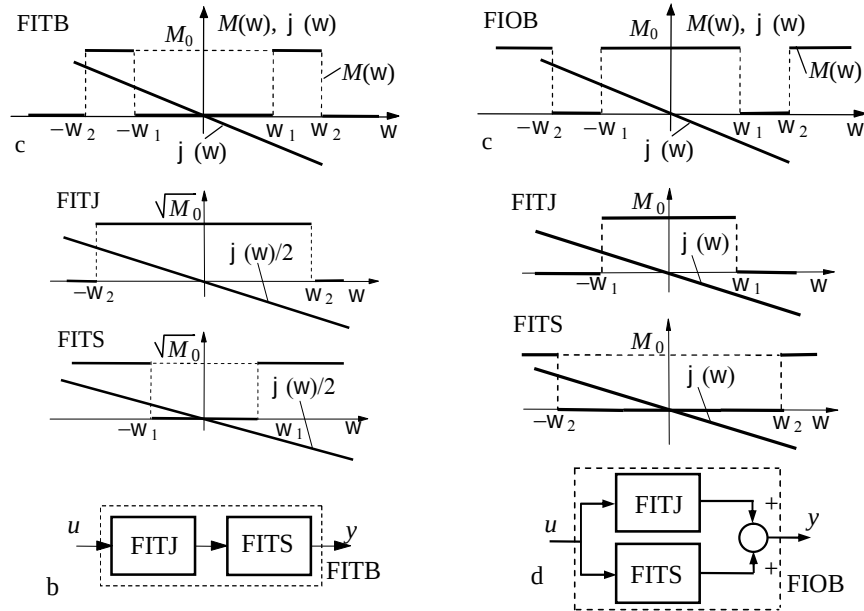


Fig.IV.25. Răspunsurile la frecvență ale filtrelor ideale: a – «trece-bandă» (FITB), c – «oprește-bandă» (FIOB); b – FITB obținut prin conectarea în serie a FITJ și FITS; d – FIOB obținut prin conectarea în paralel a FITJ și FITS

#### b4. Filtrul ideal «oprește-bandă»

Un filtru «oprește-bandă» permite transferul frecvențelor în intervalele  $(-\infty, -W_2]$ ,  $[-W_1, W_1]$ ,  $[W_2, +\infty)$ , în timp ce pe celelalte le atenuează sau, în cazul ideal, le elimină. Intervalele  $(-W_2, -W_1)$ ,  $(W_1, W_2)$  constituie *benzile de blocare* ale filtrului «oprește-bandă».

Răspunsul la frecvență (3.13) al unui filtru ideal «oprește-bandă» (FIOB) are forma (fig.IV.25.c):

$$M(w) = \begin{cases} M_0, & w \in (-\infty, -W_2] \cup [-W_1, W_1] \cup [W_2, +\infty), \\ 0, & w \in (-W_2, -W_1) \cup (W_1, W_2). \end{cases} \quad (3.29)$$

Un FIOB se poate realiza prin conectarea în paralel, ca în fig.IV.25.d, a unui FITJ, cu banda de trecere  $[-W_1, W_1]$ , și a unui FITS cu banda de blocare  $(-W_2, W_2)$ ,  $W_2 > W_1$ . Caracteristica (3.31) se obține ca în fig.VI.25.c. Pe baza fig.IV.25.d se pot determina răspunsurile la impulsul Dirac și indicial.

### 3.2. Sisteme dinamice realiste

Răspunsul la frecvență al filtrelor reale, comparativ cu comportarea ideală statuată prin (3.8), prezintă distorsiuni de amplitudine și de fază. Pentru exemplificare și pentru a trece în revistă posibilitățile de realizare a unor filtre reale corespunzătoare filtrelor ideale fără distorsiuni de fază se vor prezenta în continuare patru filtre electrice «R, C» pasive sau active, de tip cuadripol. Se are în vedere ipoteza conform căreia rezistența de sarcină este infinită, respectiv curentul de ieșire al cuadripolului este nul.

**Exemplul 3.1**

Cel mai simplu filtru «trece-jos» este elementul T1. Varianta electrică este cuadripolul «R, C» din fig.IV.26.a, cu  $G(s) = 1/(Ts+1)$ . *Pulsația de tăiere* în sensul filtrelor este  $w_1 = 1/T$  ( $M(w_1) = M(0)/\sqrt{2} \cong 0,707$ ) și  $[0, w_1]$  este *banda de trecere* a filtrului «trece-jos». □

**Exemplul 3.2**

Cel mai simplu filtru «trece-sus» este elementul DT1. Varianta electrică este cuadripolul «R, C» din fig.IV.26.b, cu  $G(s) = Ts/(Ts+1)$ . *Pulsația de blocare* în sensul filtrelor este  $w_2 = 1/T$  ( $M(w_2) = M(\infty)/\sqrt{2} \cong 0,707$ ) și  $[0, w_2]$  este *banda de blocare* a filtrului «trece-sus». □

**Exemplul 3.3**

Conform fig.IV.25.b, un filtru «trece-bandă» se poate realiza prin conectarea în serie a elementelor T1 și DT1. Varianta electrică este cuadripolul din fig.IV.26.c, cu  $G(s) = T_1s/[(T_1s+1)(T_2s+1)]$ . □

**Exemplul 3.4**

În conformitate cu fig.IV.25.d, un filtru «oprește-bandă» se poate realiza prin conectarea în paralel a elementelor T1 și DT1. Varianta electrică este cuadripolul din fig.IV.26.d, cu  $G(s) = (T_1T_2s^2+2T_2s+1)/[(T_1s+1)(T_2s+1)]$ . □

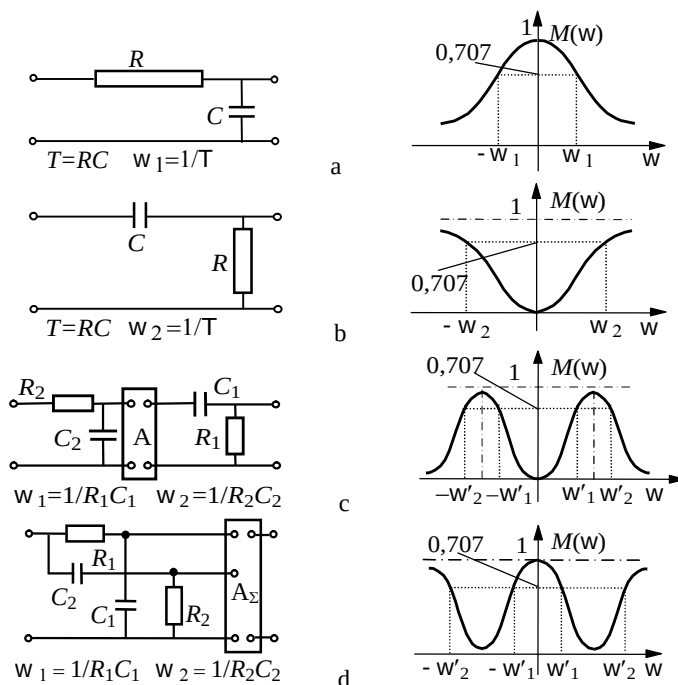


Fig.IV.26. Filtre electrice: a – «trece-jos» (exemplul 3.1); b – «trece-sus» (exemplul 3.2); c – «trece-bandă» (exemplul 3.3), A – amplificator; d – «oprește-bandă» (exemplul 3.4),  $A_\Sigma$  – amplificator sumator



**Observația 3.1**

Filtrele prezentate la exemplele 3.1 – 3.4 (fig.VI.25) sunt constituite cu elemente de circuit ( $R$  și  $C$ ) ideale. Elementele de circuit reale nu sunt „pure”, ci se caracterizează prin parametri suplimentari. Astfel, un rezistor, pe lângă rezistența  $R$ , se caracterizează și prin inductanța  $L_R$  și un condensator, pe lângă capacitatea

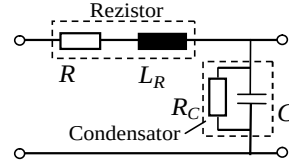


Fig.IV.27. Schema unui filtru «R,C» real «trece-jos»

$C$ , se caracterizează prin rezistența de pierderi  $R_C$ . În aceste condiții, de exemplu schema efectivă a unui filtru real «trece-jos» nu este cea din fig.VI.26.a, ci aceea din fig.VI.27. Evident, dacă  $L_R$  și  $1/R_C$  au valori foarte mici ele pot fi neglijate, pe benzi de frecvențe precizabile, ceea ce justifică utilizarea în multe situații a schemei din fig.VI.26.a.  $\square$

**Definiția 1**

Un sistem dinamic se numește *realist* dacă satisface principiul non-anticipării, adică răspunsul sistemului (mărimea de ieșire) nu precede în timp excitația (mărimea de intrare).  $\square$

Pentru sistemele dinamice liniare această proprietate se poate exprima cu ajutorul răspunsului la impuls,  $g(t)$ , sub forma (a se vedea II.3.2.a):

$$g(t) \equiv 0, \quad t < 0. \quad (3.30)$$

**Observația 3.2**

În unele lucrări se utilizează denumirea de *sistem dinamic fizic realizabil* (în loc de sistem dinamic realist), adică fizic concretizabil, ceea ce depășește limitele definiției 1. Modelele matematice sunt ele însele sisteme dinamice. Atributul *fizic realizabil* se utilizează de regulă în legătură cu modelele matematice. Evident, nu toate modelele matematice care sunt realiste sunt și fizic realizabile (se are în vedere observația 3.1).  $\square$

**Teorema 1**

Un sistem dinamic liniar realist este complet caracterizabil fie de partea pară, fie de partea impară a răspunsului său la impuls.

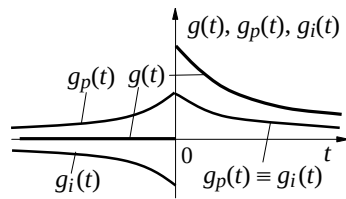


Fig.IV.28. Exemplificare la demonstrația teoremei 1

$\mathcal{D}$ . Fie  $g_p(t)$  și  $g_i(t)$  partea pară și respectiv impară ale răspunsului la impuls  $g(t)$ . Se scrie:

$$g(t) = g_p(t) + g_i(t), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (3.31)$$

Din (3.30) și (3.31) rezultă:

$$g_p(t) + g_i(t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad (3.32)$$

respectiv:

$$g_p(-t) + g_i(-t) \equiv 0, \quad t > 0. \quad (3.33)$$

Din (3.31) – (3.33) se obține:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2g_p(t) \equiv 2g_i(t), & t > 0. \end{cases} \quad \square \quad (3.34)$$

În conformitate cu (3.31) și (3.34), cu titlu de exemplu, reprezentarea grafică a răspunsului la impuls se prezintă în fig.VI.28.

**Teorema 2**

Răspunsul la impuls al unui sistem dinamic linear realist este complet determinat fie de partea reală, fie de partea imaginară a răspunsului la frecvență.

$\mathcal{D}$ . Pentru  $g(t) = g_p(t) + g_i(t)$  și  $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ , conform unei proprietăți a transformatei Fourier (Anexa A.2.1.b.12°) se pot scrie relațiile:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t) e^{-j\omega t} dt, \quad jI(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.35)$$

$$g_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad g_i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} jI(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.36)$$

Ținând seama de (3.34) se obține:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega) e^{j\omega t} d\omega \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} jI(\omega) e^{j\omega t} d\omega, & t > 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Rezultatul (3.37) sugerează existența unei legături între  $R(\omega)$  și  $jI(\omega)$  în cazul sistemelor liniare realiste. Într-adevăr, înlocuind (3.36) în (3.32) și (3.33) se obține:

$$\int_0^{+\infty} [R(\omega) \cos \omega t + I(\omega) \sin \omega t] d\omega = 0, \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \quad (3.38)$$

Rezultatul (3.38) este o relație implicită între  $R(\omega)$  și  $I(\omega)$  în cazul sistemelor dinamice liniare realiste. Explicitarea lui  $R(\omega)$  în funcție de  $I(\omega)$  sau a lui  $I(\omega)$  în funcție de  $R(\omega)$  face obiectul rezultatului următor. Acest rezultat este fundamental pentru caracterizarea răspunsului la frecvență al unui sistem dinamic liniar realist.

**Teorema 3** (transformarea Hilbert)

O condiție necesară și suficientă ca  $G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ , funcție de pătrat integrabil, să fie răspunsul la frecvență al unui sistem dinamic liniar realist este ca să aibă loc:

$$I(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(h)}{\omega - h} dh, \quad (3.39)$$

$$R(\omega) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(h)}{\omega - h} dh. \quad (3.40)$$

$\mathcal{D}$ . *Necesitatea*. Răspunsul la impuls satisface în mod evident relația:

$$g(t) = g(t) \mathcal{S}(t). \quad (3.41)$$

Trecând la transformate Fourier, în conformitate cu teorema transformării produsului de originale (Anexa A.3.b.2°), din (3.41) se obține:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * \left( \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) \text{ din care rezultă:}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\pi} G(j\omega) * \frac{1}{\omega}. \quad (3.42)$$

În mod explicit, din (3.44) se obține:  $R(\omega) + jI(\omega) = \frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(h) + jI(h)}{\omega - h} dh$ , din care, prin identificarea părților reală și imaginară, rezultă (3.41) și (3.42).

*Suficiența.* Se poate porni de la (3.39) sau (3.40). De exemplu din (3.40) rezultă:

$$R(w) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} jI(h) \frac{2}{j(w-h)} dh = jI(w) * \frac{2}{jw}. \quad (3.43)$$

Întrucât  $2/jw = \mathcal{F}\{\text{sgn } t\}$ , trecând la domeniul timpului, din (3.43) se obține:  $g_p(t) = g_i(t) \text{sgn } t$  din care, pentru  $t < 0$ , rezultă  $g_p(t) \equiv -g_i(t)$  și pentru  $t > 0$  rezultă  $g_p(t) \equiv g_i(t)$ . În aceste condiții  $g(t)$  are forma (3.34), adică reprezintă un sistem dinamic liniar realist.  $\square$

### Exemplul 3.5

Se consideră  $G(s) = 1/(s+1)$ . Se cere să se arate că răspunsul la frecvență corespunzător satisface condițiile teoremei 3.

Pentru  $s = jw$  se obține:

$$R(w) = 1/(w^2+1), \quad I(w) = -w/(w^2+1).$$

Conform relației (3.41) se scrie:

$$\begin{aligned} I(w) &= -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(h)}{(w-h)} dh = -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(h^2+1)(w-h)} dh = -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w^2+1} \left( \frac{h+w}{h^2+1} + \frac{1}{w-h} \right) dh = \\ &= -\frac{1}{p} \frac{1}{w^2+1} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \int_{-a}^{+a} \frac{h+w}{h^2+1} dh + \lim_{e \downarrow 0} \left( \int_{-a}^{w-e} \frac{1}{w-h} dh + \int_{w+e}^{+a} \frac{1}{w-h} dh \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{p} \frac{1}{w^2+1} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(h^2+1) \Big|_{-a}^{+a} + w \operatorname{arctgh} \Big|_{-a}^{+a} - \lim_{e \downarrow 0} \left( \ln|w-h| \Big|_{-a}^{w-e} + \ln|w-h| \Big|_{w+e}^{+a} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{p} \frac{1}{w^2+1} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(a^2+1) - \frac{1}{2} \ln(a^2+1) + w \operatorname{arctg} a + w \operatorname{arctg} a - \right. \\ &\quad \left. - \lim_{e \rightarrow 0} (\ln e - \ln|w+a| + \ln|w-a| - \ln e) \right] = -\frac{1}{p} \frac{1}{w^2+1} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left( 2w \operatorname{arctg} a + \ln \left| \frac{w+a}{w-a} \right| \right) = -\frac{w}{w^2+1}. \square \end{aligned}$$

Deoarece teorema 3 este mai puțin utilizată în aplicații datorită dificultăților de calcul pe care le prezintă relațiile (3.39), (3.40), s-au elaborat și alte rezultate mai ușor de aplicat practic.

### Teorema 4

Dacă  $G(s)$  este olomoră în semiplanul  $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ ,  $G(jw)$  este absolut integrabilă pentru  $w \in \mathbf{R}$  și în plus are loc:

$$|G(s)| \leq \frac{M}{|s|}, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad (3.44)$$

în care  $M > 0$ , atunci  $G(jw)$  este răspunsul la frecvență al unui sistem dinamic liniar realist.

$\mathcal{D}$ . Prima ipoteză asigură existența transformatei inverse:

$$g(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} G(jw) e^{jw t} dw. \quad (3.45)$$

În continuare demonstrația se sprijină pe teorema reziduurilor. Întrucât  $G(s)$  este olomoră pentru  $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ , pentru conturul închis din fig.VI.2.a (conturul Nyquist) se poate scrie:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{M\hat{N}P} G(s)e^{st} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{+R}^{-R} G(jw)e^{j\omega t} d(jw) = 0, \quad t < 0. \quad (3.46)$$

Pe semicercul  $M\hat{N}P$ , pe baza ipotezei (3.46), are loc evaluarea  $|G(s)| \leq M/R$ . Conform lemei a lui Jordan (Anexa A.1.2.b.3<sup>o</sup>), integrala pe  $M\hat{N}P$  tinde la 0 pentru  $R \rightarrow +\infty$ . În aceste condiții din (3.45) și (3.46), pentru  $R \rightarrow +\infty$ , se obține:  $g(t) = 0, t < 0$ .  $\square$

Rezultatul precedent este o condiție suficientă astfel încât  $G(jw)$  să fie răspunsul la frecvență al unui sistem dinamic realist. Ea constituie suportul riguros al observației 1.3 de la II.1.4.

### Teorema 5 (Paley - Wiener)

O condiție necesară și suficientă ca o funcție  $M(w) > 0, w \in \mathbf{R}$ , de pătrat integrabil, să fie modulul răspunsului la frecvență al unui sistem dinamic liniar realist este ca să aibă loc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln M(w)|}{1+w^2} dw < +\infty. \quad \square \quad (3.47)$$

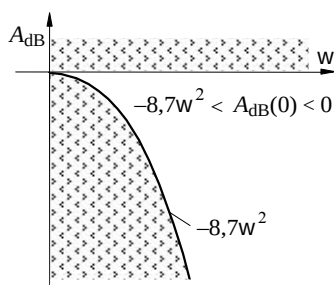


Fig. VI.29. Domeniul admisibil (nehașurat) pentru caracteristica atenuare – frecvență a unui filtru «trece-jos» realist (exemplul 3.6).

### Exemplul 3.6

Se consideră un filtru «trece-jos» descris de  $M(w), w \in \mathbf{R}$ , cu  $M(0) = 1, 0 < M(w) < 1, w \neq 0$ , și  $\lim_{w \rightarrow \pm\infty} M(w) = 0$ . Se cere să se determine mulțimea de funcții  $M(w)$  pentru care are loc (3.47).

Situația limită care trebuie avută în vedere, în context, este filtrul «trece-jos» de tipul „clopotul lui Gauss”, descris de  $M(w) = e^{-w^2}$ . În acest caz

integrala din (3.49) are forma:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ w^2 / (1+w^2) \right] dw$ , care în mod evident este divergentă.

Urmează că:  $|\ln M(w)| < w^2$ . Întrucât  $M(0) = 1$  și  $0 < M(w) < 1, w \neq 0$ , pentru  $A_{dB}(w) = 20 \lg M(w)$  din inegalitatea precedentă rezultă:  $-8,7w^2 < A_{dB}(w) < 0, A_{dB}(0) = 0$ . Domeniul admisibil în care se poate afla caracteristica atenuare – frecvență este reprezentat în fig. VI.29 (zona nehașurată din cadranul IV). Este de domeniul evidenței că filtrul ideal «trece-jos» (fig. VI.19) nu satisface condiția (3.47).  $\square$

### 3.3. Sisteme de defazaj minim

Teorema 5 nu afirmă că orice  $G(jw)$  al cărui modul  $M(w)$  satisface (3.47) este răspunsul la frecvență al unui sistem dinamic liniar realist. Acest fapt depinde evident și de  $j(w) = \arg G(jw)$ , care nu poate fi total arbitrară, așa cum, în mod implicit, rezultă din teorema 3. Pe de altă parte, în general, principiul non-anticipării nu implică existența unei relații bine determinate între  $M(w)$  și  $j(w)$ , de tipul aceleia dintre  $R(w)$  și  $I(w)$  – relațiile (3.39), (3.40).

În mod firesc se pune următoarea întrebare: în ce situație există o relație bine determinată între  $M(w)$  și  $j(w)$ ?

Pentru formularea unui răspuns se consideră sistemul dinamic descris  $G(jw)$  și un nou sistem dinamic al cărui răspuns la frecvență este:

$$G_I(jw) = \ln G(jw) = \ln M(w) e^{j j(w)} = \ln M(w) + j j(w). \quad (3.48)$$

În condițiile teoremei 3 pentru acest sistem se pot scrie relațiile:

$$j(w) = -\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(h)}{w-h} dh, \quad (3.49)$$

$$A(w) = \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j(w)}{w-h} dh, \quad (3.50)$$

în care  $A(w) = \ln M(w)$  este *atenuearea* răspunsului la frecvență  $G(jw)$ .

Relațiile (3.49), (3.50) sunt cunoscute sub numele de **condițiile Bode**. Ele stabilesc o legătură între  $M(w)$  și  $j(w)$  pentru o anumită clasă de sisteme dinamice liniare realiste definită de transformarea (3.48).

Pentru  $G(s) = Q(s)/P(s)$ , în care  $Q(s)$  și  $P(s)$  sunt două polinoame relativ prime între ele, în conformitate cu (3.48), se poate scrie:  $G_I(s) = \ln Q(s) - \ln P(s)$ . Rezultă că (3.49), (3.50) au loc numai dacă  $Q(s)$  și  $P(s)$  au, ambele, toate zerourile în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ , deoarece respectivele zerouri constituie singularități pentru funcțiile  $\ln Q(s)$  și  $\ln P(s)$ .

### Definiția 2

Sistemele dinamice liniare ale căror funcții de transfer au toți polii și toate zerourile în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$  se numesc sisteme de *defazaj minim*.

Sistemele dinamice liniare ale căror funcții de transfer au toți polii și numai o parte din zerouri în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$  se numesc sisteme de *defazaj neminim*.  $\square$

Denumirile (introduse deja la II.7.1) sunt justificate de faptul că ambele tipuri de sisteme satisfac teorema 5 și sistemele de defazaj minim se disting prin aceea că dintre toate sistemele dinamice liniare realiste care au același modul al răspunsului la frecvență, numai acestea introduc *defazajul cel mai mic*. Defazajul  $y(w)$  se definește ca diferența între fazele mărimilor de intrare și de ieșire, ceea ce înseamnă  $y(w) = -j(w) = -\arg G(jw)$ . Sistemele de defazaj minim satisfac *condițiile Bode* – relațiile (3.49), (3.50).

### Exemplul 3.7

Se consideră sistemul de defazaj minim  $G_m(s) = (bs+1)/[(a_1s+1)(a_2+1)]$ , cu  $a_1, a_2, b > 0$ , și sistemul de defazaj neminim  $G_{nm}(s) = (bs-1)/[(a_1s+1)(a_2+1)]$ . Se cere să se compare defazajele introduse de cele două sisteme.

Se remarcă mai întâi că cele două sisteme au același modul al răspunsului la frecvență. Într-adevăr:

$$M_m(w) = M_{nm}(w) = \sqrt{(b^2w^2 + 1)/[(a_1^2w^2 + 1)(a_2^2w^2 + 1)]}.$$

Defazajele introduse de cele două sisteme sunt:  $y_m(w) = -j_m(w) = \arctg a_1w + \arctg a_2w - \arctg bw$  și  $y_{nm}(w) = -j_{nm}(w) = \arctg a_1w + \arctg a_2w + \arctg bw$ . Este de domeniul evidenței că:  $y_m(w) < y_{nm}(w)$ .  $\square$

### Exemplul 3.8 (termometrul cu mercur; continuare)

Se consideră termometrul de la II.7.2.b, exemplul 7.1. Se cere să se determine relația dintre variația  $Dx_m$  a lungimii coloanei de mercur și variația  $Dq_i$  a temperaturii de măsurat.

Ca urmare a variației  $Dq_m$  a temperaturii mercurului, se produce o variație a volumului mercurului:  $DV_m = k_m Dq_m$ , în care  $k_m$  este o constantă.

Într-o primă aproximație și din punct de vedere geometric, variația  $DV_m$  are expresia:  $DV_m = A_{s0}Dx_m + x_{m0}DA_s$ , în care  $A_{s0}$  este aria inițială a secțiunii tubului capilar,  $x_{m0}$  este lungimea inițială a coloanei de mercur și  $DA_s$  este variația ariei secțiunii tubului capilar.

Variația  $DA_s$  este cauzată de variația  $Dq_i$  a temperaturii de măsurat, conform relației  $\Delta A_s = k_s q_i$ , și se datorează dilatării tubului capilar.

Eliminând  $DV_m$ ,  $DA_s$  și  $Dq_m$  între relațiile de mai sus și  $T(d\Delta q_m/dt) + Dq_m = Dq_i$  (obținută la exemplul 7.1) rezultă:  $TdDx_m/dt + Dx_m = k(Dq_i - T_1 dDq_i/dt)$ , în care:  $k = (k_m - x_{m0}k_s)/A_{s0}$ ,  $T_1 = Tx_{m0}k_s/(k_m - x_{m0}k_s)$ .

Funcția de transfer corespunzătoare are forma:  $G(s) = k(1 - T_1s)/(1 + Ts)$ , ceea ce înseamnă că termometrul este un sistem dinamic liniar de defazaj neminim.

Caracteristica esențială a unui astfel de element se evidențiază cu ajutorul răspunsului indicial (fig.VI.30) și ea constă în faptul că  $h(0)$  este de semn opus față de

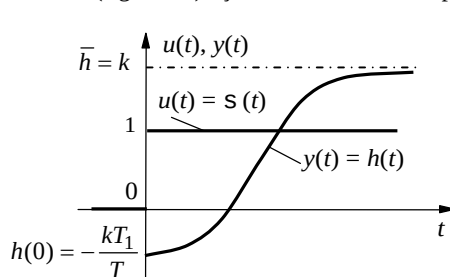


Fig.IV.30. Răspunsul indicial al unui sistem de defazaj neminim (exemplul 3.9)

$$\bar{h} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Utilizând rezultatul de la II.7.2.c, exemplul 7.3, se poate ține seama și de rezistența termică și capacitatea termică a tubului capilar. □

Funcția de transfer a unui sistem de defazaj neminim se poate scrie sub următoarea formă factorizată:

$$G(s) = \frac{Q_1(s)Q_2(s)}{P(s)}, \quad (3.51)$$

în care  $P(s)$  și  $Q_1(s)$  sunt polinoame ale

căror zerouri sunt toate în  $\{\text{Re } s < 0\}$  și  $Q_2(s)$  este un polinom ale cărui zerouri sunt toate în  $\{\text{Re } s > 0\}$ .

Întrucât polinomul  $Q_2(-s)$  are toate zerourile în  $\{\text{Re } s < 0\}$ , prin înmulțirea membrului drept din (3.51) cu  $Q_2(-s)/Q_2(-s)$  se obține:

$$G(s) = G_m(s)G_t(s), \quad (3.52)$$

în care:

$$G_m(s) = Q_1(s)Q_2(-s)/P(s), \quad (3.53)$$

este funcția de transfer a unui sistem de defazaj minim și

$$G_t(s) = Q_2(s)/Q_2(-s) \quad (3.54)$$

este funcția de transfer a unui sistem de defazaj neminim, având proprietatea:

$$|G_t(j\omega)| = |Q_2(j\omega)|/|Q_2(-j\omega)| = 1. \quad (3.55)$$

Conform proprietății (3.55), sistemul descris de funcția de transfer (3.56) se numește *filtru ideal «trece – tot»* cu distorsiuni de fază.

Ca urmare a proprietății (3.55), din (3.52) se obține:

$$|G(j\omega)| = |G_m(j\omega)|,$$

ceea ce înseamnă că sistemele dinamice liniare caracterizate prin același modul al răspunsului la frecvență se deosebesc între ele numai prin filtrele ideale «trece – tot» de forma (3.54) conform factorizării (3.52).

## 4. Stabilitatea și stabilizarea sistemelor automate

### 4.1. Principiul argumentului

#### a. Integrala pe contur a derivatei logaritmice

Fie

$$G(s) = Q(s) / P(s) \quad (4.1)$$

funcția de transfer a unui sistem dinamic liniar în care  $P(s)$  și  $Q(s)$  sunt două polinoame cu coeficienți reali, relativ prime între ele și cu  $\text{grad } Q(s) = m$ ,  $\text{grad } P(s) = n$ .

*Ipoteza 1.* Fie  $\gamma$  un contur închis, situat în planul complex  $\mathbb{C}$ , în interiorul căruia  $G(s)$  are  $m_\gamma$  zerouri și  $n_\gamma$  poli (incluzându-se și multiplicitățile corespunzătoare).  $\square$

Principiul argumentului, care permite evaluarea variației totale a argumentului funcției  $G(s)$  pentru  $s \in \gamma$ , se deduce din următorul rezultat clasic din teoria funcțiilor de o variabilă complexă.

#### **Teorema 1** (Cauchy)

Funcția  $G(s)$ , conform ipotezei 1, satisface relația:

$$\int_{\gamma} \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2\pi j (m_\gamma - n_\gamma). \quad (4.2)$$

*D.* Fie  $z_i$ , de multiplicitate  $m_i$ , zerourile lui  $G(s)$  situate în interiorul conturului  $\gamma$ , și  $p_k$ , de multiplicitate  $n_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , poli lui  $G(s)$  situați în interiorul conturului  $\gamma$ . Evident, au loc:

$$\sum_1^m m_i = m_\gamma, \quad \sum_1^n n_k = n_\gamma.$$

Pentru  $G'(s)/G(s) = d[\ln G(s)]/ds$ , numită și *derivata logaritmică* a lui  $G(s)$ , atât  $z_i$  cât și  $p_k$  sunt, după cum se va arăta imediat, singularități de tip pol simplu. Ca urmare, pentru evaluarea integralei pe contur din (4.2), se aplică *teorema reziduurilor* și se obține:

$$\int_{\gamma} \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2\pi j \left[ \sum_1^m \text{Re } z_\gamma(z_i) + \sum_1^n \text{Re } z_\gamma(p_k) \right]. \quad (4.3)$$

Pe de altă parte, pentru  $z_i$  se poate scrie:  $G(s) = (s - z_i)^{m_i} G_i(s)$ , unde  $G_i(s)$  este o funcție pentru care  $z_i$  nu este zero. În aceste condiții se obține:  $G'(s)/G(s) = m_i/(s - z_i) + G'_i(s)/G_i(s)$ , ceea ce înseamnă că:  $\text{Re } z_\gamma(z_i) = m_i$ . Ca urmare:

$$\sum_1^m \text{Re } z_\gamma(z_i) = \sum_1^m m_i = m_\gamma. \quad (4.4)$$

În mod similar pentru  $p_k$  se poate scrie:  $G(s) = (s - p_k)^{-n_k} G_k(s)$ , unde  $G_k(s)$  este o funcție pentru care  $p_k$  nu este pol. Acesta conduce la:  $G'(s)/G(s) = -n_k/(s - p_k) + G'_k(s)/G_k(s)$ , ceea ce înseamnă că:  $\text{Re } z_\gamma(p_k) = -n_k$ . Ca urmare,

$$\sum_1^n \text{Re } z_\gamma(p_k) = -\sum_1^n n_k = -n_\gamma. \quad (4.5)$$

Înlocuind (4.4) și (4.5) în (4.3) se obține (4.2).  $\square$

*Ipoteza 2.* Se presupune în plus că  $G(s)$  are  $\tilde{m}_\gamma$  zerouri și  $\tilde{n}_\gamma$  poli (incluzându-se și multiplicitățile corespunzătoare) pe conturul  $\gamma$  (cu tangenta continuă).  $\square$

Se prezintă în continuare, fără demonstrație, un rezultat care ține seama și de ipoteza 2.

**Teorema 2** (Cauchy)

Funcția  $G(s)$ , conform ipotezelor 1 și 2, satisface relația:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{G'(s)}{G(s)} ds = 2p_j(m_g - n_g) + p_j(\tilde{m}_g - \tilde{n}_g). \quad (4.6)$$

**b. Variația totală a argumentului**

Din (4.6) se obține:

$$[\ln G(s)]_{s \in \mathcal{C}} = 2p_j(m_g - n_g) + p_j(\tilde{m}_g - \tilde{n}_g). \quad (4.7)$$

Înlocuind  $G(s) = |G(s)|e^{j\arg G(s)}$  în (4.7), după calcule elementare, rezultă:

$$[\arg G(s)]_{s \in \mathcal{C}} = 2p(m_g - n_g) + p(\tilde{m}_g - \tilde{n}_g). \quad (4.8)$$

Relația (4.8) este expresia analitică a **principiului argumentului**. La o alegere convenabilă a conturului  $\mathcal{C}$ , relația (4.8) poate fi folosită pentru evaluarea variației totale a argumentului în funcție de numărul de zerouri și de poli ai lui  $G(s)$  în semiplanul  $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ . Un astfel de contur este *conturul Nyquist*  $\mathcal{C}_N$  – fig.VI.2.a.

Fie  $m_{\mathcal{C}_N} = m_+$  și  $n_{\mathcal{C}_N} = n_+$  numărul de zerouri și respectiv de poli ai lui  $G(s)$  situați în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ . Fie de asemenea  $m_0$  și  $n_0$  numărul de zerouri finite și respectiv de poli finiți în  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ . Se știe că  $G(s)$  mai are în punctul de la infinit: fie un zero de multiplicitate  $|m - n|$  pentru  $m < n$ , fie un pol de aceeași multiplicitate pentru  $m > n$ . Întrucât  $R = +\infty$ , fig.VI.2.a, rezultă că punctul de la infinit aparține conturului  $\mathcal{C}_N$ . Ca urmare

$$\tilde{m}_{\mathcal{C}_N} - \tilde{n}_{\mathcal{C}_N} = m_0 - n_0 - (m - n).$$

În aceste circumstanțe, pentru  $s = j\omega$ , din (4.8) se obține:

$$\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty} = 2p(n_+ - m_+) + p(n_0 - m_0) + p(m - n), \quad (4.9)$$

deoarece s-a ținut seama de  $\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = +\infty}^{\omega = -\infty} = -\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty}$ .

Întrucât  $\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty} = 2 \arg G(j\omega) \Big|_{\omega = 0}^{\omega = +\infty}$ , din (4.9) se mai obține :

$$\arg G(j\omega) \Big|_{\omega = 0}^{\omega = +\infty} = p(n_+ - m_+) + \frac{p}{2}(n_0 - m_0) + \frac{p}{2}(m - n). \quad (4.10)$$

**c. Criteriul Cremer - Leonhard**

Forma (4.10) a **principiului argumentului** poate fi utilizată pentru obținerea unui rezultat de BIBO-stabilitate (subcap. II.6) atunci când se cunoaște polinomul polilor.

Fie  $D(s)$  un polinom monic, cu coeficienți reali și grad  $D(s) = r$ .

**Teorema 3** (Cremer - Leonhard)

Polinomul  $D(s)$  este hurwitzian dacă și numai dacă:

$$\arg D(j\omega) \Big|_{\omega = 0}^{\omega = +\infty} = \frac{p}{2} r. \quad (4.11)$$



*D.* Fie  $r_+$  și  $r_0$  numărul de zerouri (incluzându-se și multiplicitățile corespunzătoare) situate în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$  și respectiv în  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ . Înlocuind în (4.10):  $n_+ = 0$ ,  $n_0 = 0$ ,  $n = 0$  și  $m_+ = r_+$ ,  $m_0 = r_0$ ,  $m = r$  se obține:

$$\arg D(j\omega) \Big|_{\substack{\omega = +\infty \\ \omega = 0}} = -pr_+ - \frac{p}{2}r_0 + \frac{p}{2}r. \quad (4.12)$$

*Suficiența.* Dacă (4.11) este adevărată, atunci din (4.11) și (4.12) rezultă  $r_+ = 0$  și  $r_0 = 0$ , ceea ce înseamnă că  $D(s)$  este hurwitzian.

*Necesitatea.* Dacă  $D(s)$  este hurwitzian, atunci  $r_+ = 0$  și  $r_0 = 0$ . În aceste condiții din (4.12) rezultă (4.11).  $\square$

Un rezultat echivalent cu teorema 3, care face uz de hodograful  $D(j\omega)$ , este următorul.

**Teorema 4** (Cremer – Leonhard)

Polinomul  $D(s)$  este hurwitzian dacă și numai dacă hodograful  $D(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$ , parcurge în sens pozitiv exact  $r$  cadrane în succesiunea lor naturală.  $\square$

**Exemplul 4.1**

Se consideră polinomul  $D(s) = s^3 + 17s^2 + 2s + 1$ . Se cere să se studieze natura acestui polinom în conformitate cu teorema 4.

După trasarea prin puncte a hodograful  $D(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$ , se obține imaginea din fig.VI.31. Conform teoremei 4 rezultă că  $D(s)$  este hurwitzian.  $\square$

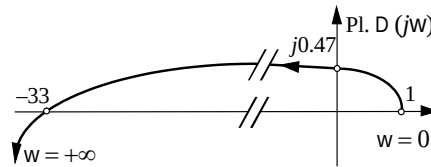


Fig.VI.31. Hodograful  $D(j\omega)$  la exemplul 4.1

**4.2. Criteriul Nyquist**

*a. Utilizarea locului de transfer*

Fie sistemul automat cu structura din fig.VI.32 (conform schemei din fig.V.1), în care

$$G_d(s) = G(s)G_t(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (4.13)$$

este funcția de transfer a sistemului în circuit deschis, cu  $m = \operatorname{grad} Q$ ,  $n = \operatorname{grad} P$  și  $m < n$ . Funcția de transfer a sistemului închis are expresia:

$$G_0(s) = \frac{G_d(s)}{F(s)}, \quad (4.14)$$

în care

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s) + Q(s)}{P(s)} \quad (4.15)$$

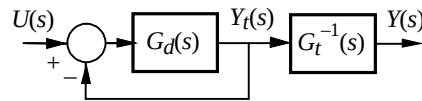


Fig.VI.32. Schema bloc structurală pentru studiul BIBO-stabilității

este funcția de transfer diferență a reacției (a se vedea III.3.2). Polii lui  $G_0(s)$  coincid cu zerourile lui  $F(s)$ , respectiv cu zerourile polinomului  $P(s) + Q(s)$ .

Se știe de la II.4.1 că funcția de transfer a sistemului închis în raport cu perturbația,  $G_{0w}(s)$ , are exact aceiași poli ca și  $G_0(s)$ . În aceste condiții utilizarea funcției  $F(s)$  pentru studiul BIBO-stabilității unui sistem automat este pe deplin justificată.

În general  $F(s)$  poate avea  $z_+$  zerouri în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$  și  $z_0$  zerouri în  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ . Polii lui  $F(s)$  coincid cu polii lui  $G_d(s)$ , dintre care  $n_+$  se află în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$  și  $n_0$  în  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ . Punctul de la infinit nu este nici zero și nici pol pentru  $F(s)$  deoarece  $F(s)$  este raportul a două polinoame de grad  $n$ . În aceste circumstanțe variația totală a argumentului lui  $F(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , se determină cu formula (4.9) și are expresia:

$$\arg F(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty} = 2p(n_+ - z_+) + p(n_0 - z_0). \quad (4.16)$$

Se știe că sistemul automat cu structura din fig.VI.32 este BIBO-stabil ( $G_t(s)$  este un element de tip P, PT1 sau, în mod excepțional, PT2; ca atare  $G_t^{-1}(s)$  nu are poli finiți) dacă și numai dacă toți polii lui  $G_0(s)$ , respectiv toate zerourile lui  $F(s)$  sunt situate în  $\{\operatorname{Re} s < 0\}$ . În consecință se poate formula următorul rezultat.

#### Teorema 5 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.32 este BIBO-stabil dacă și numai dacă  $F(s)$ , definit prin (4.15), satisface condiția:

$$\arg F(j\omega) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = +\infty} = 2pn_+ + pn_0. \quad (4.17)$$

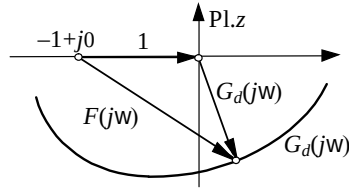


Fig. VI.33. Determinarea lui  $F(j\omega)$  din  $G_d(j\omega)$ .

**D. Suficiența.** Dacă (4.17) este adevărată, atunci din (4.16) rezultă  $z_+ = 0$  și  $z_0 = 0$ , ceea ce implică BIBO-stabilitatea a sistemului automat.

**Necesitatea.** Dacă sistemul automat este BIBO-stabil, atunci  $z_+ = 0$  și  $z_0 = 0$ . În aceste condiții din (4.16) rezultă (4.17).  $\square$

Din punct de vedere practic, este mai util și mai simplu de aplicat un enunț echivalent al teoremei 5 care se bazează pe următoarea observație. Întrucât între  $F(s)$  și  $G_d(s)$  există relația (4.15), este suficient să se reprezinte hodograful  $G_d(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , celălalt hodograf, și anume  $F(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , rezultând automat față de o nouă origine, traslată în punctul  $-1+j0$ , fig.VI.33. Enunțul echivalent al teoremei 5 este următorul.

#### Teorema 6 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.32 este BIBO-stabil dacă și numai dacă locul de transfer al sistemului în circuit deschis (hodograful  $G_d(j\omega)$ ) înconjoară punctul  $-1+j0$ , în sens pozitiv, de un număr de  $n_+ + n_0/2$  ori atunci când  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .  $\square$

S-a văzut că  $n_+$  și  $n_0$  reprezintă numărul de poli ai lui  $G_d(s)$  situați în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$  și respectiv  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ . Aceasta înseamnă că sistemul în circuit deschis, reprezentat de  $G_d(s)$ , poate fi arbitrar BIBO-instabil. Dacă are loc condiția (4.17), atunci prin introducerea *reacției negative*, conform fig.VI.32, sistemul automat astfel obținut este BIBO-stabil. Această calitate deosebit de importantă a reacției negative a fost evidențiată la III.4, unde s-a arătat că *reacția negativă realizează o alocare a polilor sistemului automat*.

Un caz frecvent întâlnit în aplicații este acela în care sistemul în circuit deschis, reprezentat de  $G_d(s)$ , are cel mult doi poli în  $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ , și anume în originea planului  $s$

( $s = 0$ ). Într-o astfel de situație ( $n_+ = 0$  și  $n_0 \leq 2$ ) se utilizează următoarea formă particulară a teoremei 6.

#### Teorema 7 (Nyquist)

Sistemul automat cu structura din fig.VI.32, în care  $G_d(s)$ , definit prin (4.13), are cel mult doi poli în originea planului  $s$  și restul polilor sunt toți situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ , este BIBO-stabil dacă și numai dacă punctul  $-1+j0$  este situat la stânga în afara locului de transfer  $G_d(j\omega)$  atunci când acesta este parcurs pentru  $\omega$  luând valori de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .  $\square$

Atunci când hodograful  $G_d(j\omega)$  are o formă complicată este dificil să se determine la prima vedere dacă punctul  $-1+j0$  este la stânga sau la dreapta locului de transfer  $G_d(j\omega)$ . Având în vedere că hodograful  $G_d(j\omega)$  este parcurs de la  $\omega = -\infty$  la  $\omega = +\infty$ , deci în sens negativ pe conturul Nyquist (fig.VI.2.a), rezultă că punctele situate la dreapta hodografului  $G_d(j\omega)$ , în sensul crescător al lui  $\omega$ , sunt puncte interioare. Un procedeu expeditiv de determinare a poziției punctului  $-1+j0$  față de hodograful  $G_d(j\omega)$  constă în hașurarea părții drepte a curbei  $G_d(j\omega)$ . Dacă punctul  $-1+j0$  nu este într-o zona hașurată, urmează că acesta este în exteriorul hodografului  $G_d(j\omega)$ , respectiv la stânga sa, atunci când  $G_d(j\omega)$  este parcurs pentru  $\omega$  crescător.

#### Exemplul 4.2 (analiza BIBO-stabilității)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VI.32 în care  $G_d(s) = (4s^2 + 10s + 5) / (s^3 + 2s^2 + s + 1)$ . Se cere să se analizeze BIBO-stabilitatea.

Utilizând criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) rezultă că polinomul  $s^3 + 2s^2 + s + 1$  este hurwitzian. În aceste condiții se aplică teorema 7.

Pentru  $s = j\omega$  rezultă

$$G_d(j\omega) = [-(2\omega^4 + 4\omega^2 - 5) - j\omega(4\omega^4 + 11\omega^2 - 5)] / (\omega^6 + 2\omega^4 - 3\omega^2 + 1).$$

Conform tabelului:

| $\omega$                  | 0 | 0,2  | 0,4  | 0,63        | 0,8 | 0,93        | 1   | 10                   | $10^2$             | $+\infty$ |
|---------------------------|---|------|------|-------------|-----|-------------|-----|----------------------|--------------------|-----------|
| $\text{Re } G_d(j\omega)$ | 5 | 5,3  | 7,7  | 20,4        | 10  | $\approx 0$ | -1  | $-2 \cdot 10^{-2}$   | $-2 \cdot 10^{-4}$ | 0         |
| $\text{Im } G_d(j\omega)$ | 0 | 1,08 | 2,25 | $\approx 0$ | -18 | -12,6       | -10 | $-2,2 \cdot 10^{-2}$ | $-4 \cdot 10^{-2}$ | 0         |

locul de transfer  $G_d(j\omega)$  are forma din fig.VI.34. Întrucât punctul  $-1+j0$  este în exteriorul hodografului  $G_d(j\omega)$ , conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO-stabil.  $\square$

#### Exemplul 4.3 (analiza BIBO-stabilității)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VI.32 în care  $G_d(s) = (s+1)/[s^a(s+2)]$ . Se cere să se analizeze BIBO-stabilitatea pentru  $a = 1$  și  $a = 2$ .

Pentru  $s = j\omega$  rezultă:  $G_d(j\omega) = (j\omega+1)/[(j\omega)^a(j\omega+2)]$ , respectiv:

$$M_d(j\omega) = |G_d(j\omega)| = \omega^{-a} \sqrt{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)},$$

$$\angle_d(\omega) = \arg G_d(j\omega) = -\pi a / 2 + \arctg \omega - \arctg(\omega / 2).$$

Conform tabelului:

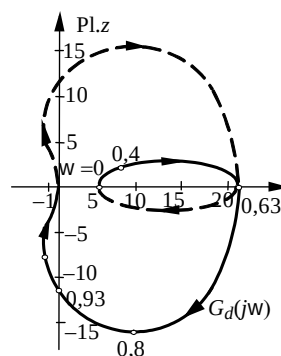


Fig. VI.34. Locul de transfer al sistemului în circuit deschis la exemplul 4.2

| a     | w             | 0            | 0,5          | 1            | 2            | 3            | 5            | 10           | $\infty$     |
|-------|---------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| a = 1 | $M_d(w)$      | $\infty$     | 1,08         | 0,63         | 0,394        | 0,292        | 0,186        | 0,098        | 0            |
|       | $\angle_d(w)$ | $-90^\circ$  | $-77^\circ$  | $-72^\circ$  | $-71^\circ$  | $-74^\circ$  | $-79^\circ$  | $-84^\circ$  | $-90^\circ$  |
| a = 2 | $M_d(w)$      | $\infty$     | 2,71         | 0,63         | 0,197        | 0,098        | 0,037        | 0,009        | 0            |
|       | $\angle_d(w)$ | $-180^\circ$ | $-167^\circ$ | $-162^\circ$ | $-161^\circ$ | $-164^\circ$ | $-169^\circ$ | $-174^\circ$ | $-180^\circ$ |

locurile de transfer corespunzătoare sunt reprezentate în fig. VI.35 a și b. Ambele hodografe trec prin punctul de la  $\infty$  pentru  $w = 0$ . Punctul  $-1+j0$  este în afara hodografului și la stânga. Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO-stabil.  $\square$

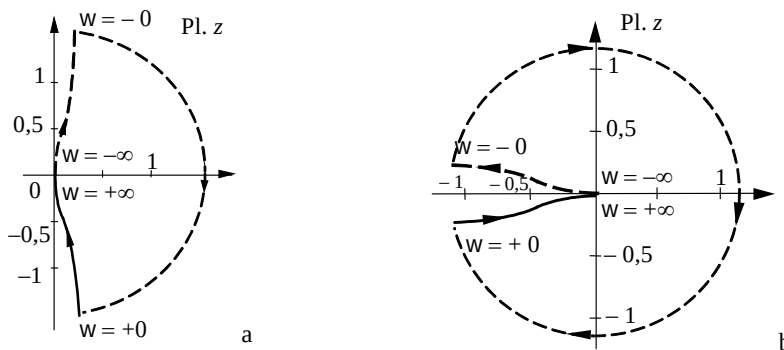


Fig. VI.35. Locul de transfer al sistemului în circuit deschis, pentru: a)  $a = 1$ , b)  $a = 2$ , la exemplul 4.3

Un caz limită interesant este acela în care hodograful  $G_d(jw)$  trece prin punctul  $-1+j0$ . În această situație există valori ale variabilei  $s = jw$  pentru care  $G_d(jw) = -1$ , respectiv  $G_0(s)$  are poli în  $\{\text{Re } s = 0\}$ . Evident sistemul automat este BIBO-instabil.

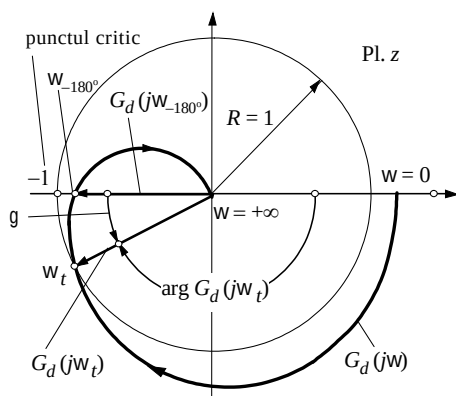


Fig. VI.36 BIBO-stabilitatea relativă

Se constată că punctul  $-1+j0$  are o poziție critică relativ la BIBO-stabilitatea sistemului automat. Din acest motiv punctul  $-1+j0$  se numește **punctul critic**. Intuitiv, este evident că, în cazul sistemelor automate BIBO-stabile, cu cât locul de transfer  $G_d(jw)$  este mai îndepărtat de punctul critic cu atât sistemul are posibilități mai reduse de a deveni BIBO-instabil la variația intempestivă a unor parametri (la modificarea lui  $G_d(jw)$ ).

Pentru aprecierea calității BIBO-stabilității unui sistem automat se definește **BIBO-stabilitatea relativă**, care, conform fig. VI.36, se evaluează prin:

- **marginea de amplificare:**  $m = 1/|G_d(jw_{-180})|$ , în care  $w_{-180}$  este determinat prin  $\arg G_d(jw_{-180}) = -180^\circ$ ;
- **marginea de fază:**  $g = \arg G_d(jw_t) + 180^\circ$ ;  $w_t$  este pulsația de tăiere în sensul sistemelor automate (pentru filtre, a se vedea 2.3.b, c și 3.2) și se determină din  $|G_d(jw_t)| = 1$ , iar  $\arg G_d(jw_t)$  se măsoară ca în fig. VI.34 (și având, evident, o valoare negativă).

Valorile recomandate sunt  $m = 3 \div 10$  și  $g = 30^\circ \div 50^\circ$ . Realizarea acestor valori se asigură, în faza de proiectare a sistemului automat, prin sinteza regulatorului (fig. III.14).

*b. Aplicație: sistem automat de poziționare*

Se consideră sistemul automat de poziționare cu schema funcțional – tehnologică din fig.VI.37. Elementul de execuție este un servomotor electric asincron bifazat SM, comandat reversibil cu un redresor dublă alternanță format din tranzistorii T1 și T2. Aceștia sunt comandați prin tensiunea de ieșire a unui amplificator de curent continuu (Acc), care este elementul de bază al regulatorului. Legea de reglare este determinată de impedențele de intrare și de reacție ale Acc. Utilizarea reacției prin  $R_3$ ,  $C_1$  de la emitorii tranzistorilor T1, T2 (uzual această reacție se realizează de la ieșirea Acc) are calitatea că asigură un cuplu de pornire al SM mai mare și prin aceasta o creștere a rapidității sistemului. Ca element de prescriere și ca traductor de poziție se folosesc potențiometrele identice  $P_1$  și  $P_2$  (acesta este cuplat la axul SM prin reductorul mecanic  $R_m$ ; prin  $R_m$  se realizează și acționarea părții fixate a sistemului automat de poziționare. Partea fixată poate fi un braț de robot, un dispozitiv de poziționare a unei scule, un element de comandă a unei nave (cârmă, profundor), o antenă de radiocomunicații etc.

Conform notațiilor din fig.VI.37, funcțiile de transfer ale componentelor sunt:

- potențiometru de prescriere a poziției axului de intrare:  $G_{P1}(s) = E_u(s)/Y_p(s) = k_1$ ,
- potențiometru de reacție a poziției axului de ieșire:  $G_{P2}(s) = E_u(s)/Y(s) = k_1$ ,
- servomotorul:  $G_{SM}(s) = Q(s)/E_c(s) = -1/[T_1 s(T_2 s + 1)]$ ,
- reductorul mecanic:  $G_{Rm}(s) = Y(s)/Q(s) = k_2$ ,
- regulatorul (de tip PDT1):  $G_R(s) = E_c/E(s) = -Z_2(s)/Z_1(s) = -k_0[1 + k/(Ts + 1)]$ ,

în care: abaterea  $E(s) = E_u(s) - E_y(s)$  este o tensiune proporțională cu eroarea de poziționare  $Y_p(s) - Y(s)$  și  $Z_1(s) = RR_1/(R + R_1 + R_2)$ ,  $Z_2(s) = RR_2/(R + R_1 + R_2) + R_3(R_3 C_1 s + 1)$ ,  $k_0 = R_2/R_1$ ,  $k = (R_3/R_2)[1 + (R_1 + R_2)/R]$ ,  $T = R_3 C_1$ .

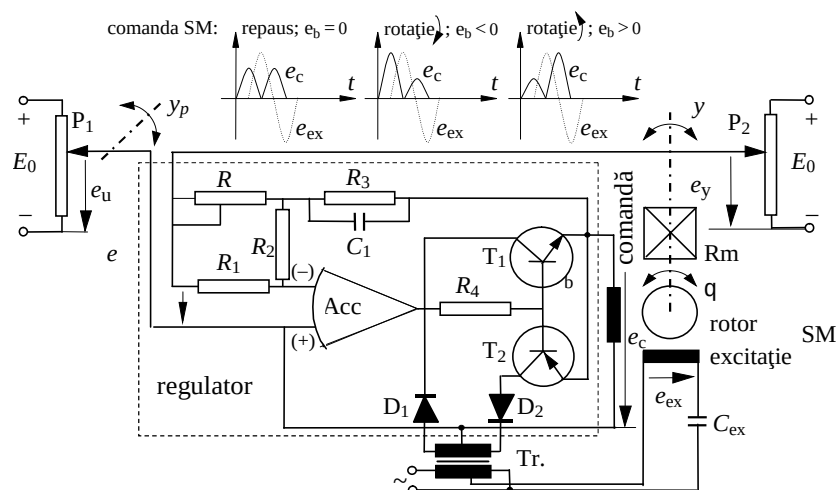


Fig. VI.37. Schema funcțional tehnologică a unui sistem automat de poziționare

Conform acestor relații schema bloc structurală a sistemului automat de poziționare are forma din fig.VI.38. Relația intrare – ieșire are expresia:  $Y(s) = G_0(s)U(s)$ , în care:

$$G_0(s) = \frac{k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s)}{1 + k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s)} = \frac{k_0 k_1 k_2 (Ts + k + 1)}{T_1 s (T_2 s + 1) (Ts + 1) + k_0 k_1 k_2 (Ts + k + 1)}$$

este funcția de transfer a sistemului automat. Semnul  $[-]$  din  $G_R(s)$  se compensează prin conectarea adecvată a înfășurării de comandă a SM.

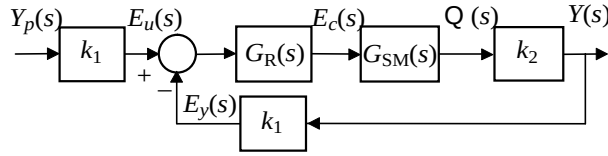


Fig.VI.38. Schema bloc structurală a sistemului automat de poziționare din fig.VI.37

Pentru a examina în detaliu rolul regulatorului în asigurarea BIBO-stabilității relative se consideră următoarele două cazuri.

1°  $k_0 = 1$  și  $k = 0$  ( $R_1 = R$  și  $R_3 = 0$ ), adică  $G_R(s) = -1$ .

Funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

$$G_{d1} = k_1 k_2 G_R(s) G_{SM}(s) = k_1 k_2 / [T_1 s (T_2 s + 1)].$$

Pentru  $k_1 = 0,05 \text{ V / grad}$ ,  $T_1 / k_2 = 0,5 \text{ sec}$ .,  $T_2 = 0,05 \text{ sec}$ ., și  $s = j\omega$  se obține:

$$M_{d1}(j\omega) = |G_{d1}(j\omega)| = 2 / (\omega \sqrt{\omega^2 + 400}), \quad \angle_{d1}(j\omega) = \arg G_{d1}(j\omega) = 270^\circ - \arctg(\omega / 20).$$

Conform tabelului:

| $\omega$      | 0           | 5            | 10           | 15           | 20           | 30           | 50           | 100          | $+\infty$    |
|---------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $50M_{d1}$    | $+\infty$   | 0,97         | 0,45         | 0,267        | 0,177        | 0,093        | 0,037        | 0,0098       | 0            |
| $\angle_{d1}$ | $-90^\circ$ | $-104^\circ$ | $-117^\circ$ | $-127^\circ$ | $-135^\circ$ | $-146^\circ$ | $-158^\circ$ | $-169^\circ$ | $-180^\circ$ |

locul de transfer  $G_{d1}(j\omega)$  este reprezentat în fig.VI.39. Punctul  $-1+j0$  este în exteriorul hodografului  $G_{d1}(j\omega)$ . Conform teoremei 7 sistemul automat este BIBO-stabil.

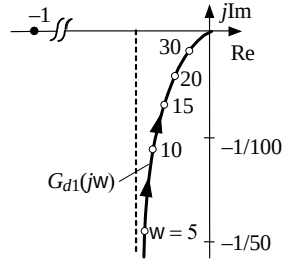


Fig.VI.39. Locul de transfer  $G_{d1}(j\omega)$   
(cazul 1°,  $k_0 = 1$ , respectiv  $G_R(s) = -1$ )

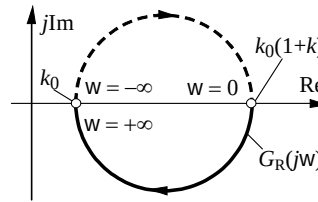


Fig.VI.40. Locul de transfer  $G_R(j\omega)$   
(cazul 2°, regulator PDT1)

Privitor la BIBO-stabilitatea relativă se constată că  $m = +\infty$  oricare ar fi  $k_0$ . Pentru  $k_0 > 1$  se poate obține  $g = 30^\circ \div 50^\circ$ . Pentru a-l afla pe  $k_0$  se rezolvă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} k_0 M_{d1}(w_1) \equiv 2k_0 / (w_1 \sqrt{w_1^2 + 400}) = 1 \\ \angle_{d1}(w_1) - 180^\circ \equiv 90^\circ - \arctg(w_1 / 20) = 30^\circ \end{cases}$$

și se obține:  $w_1 = 20\sqrt{3}$  și  $k_0 = 400\sqrt{3}$ . Ecuația polilor sistemului automat are forma:  $T_1 T_2 s^2 + T_1 s + k_0 k_1 k_2 = 0$  și pentru valorile numerice date se obțin: pulsația naturală  $w_n = \sqrt{k_0 k_1 k_2 / T_1 T_2} = 37 \text{ rad/sec}$  și factorul de amortizare:  $z = 1/(2T_2 w_n) = 0,27$ . Conform fig.II.47 rezultă o suprareglare  $s\% = 40\%$  și o durată a regimului tranzitoriu  $t_s = 0,3 \text{ sec.}$ , ceea ce este inacceptabil.

2° Pentru  $k > 0$  ( $R_3 > 0$ ) regulatorul este de tip PDT1 și funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are expresia:

$$G_{d2}(s) = k_1 k_2 G_{SM}(s) G_R(s) = G_{d1}(s) G_R(s).$$

Locul de transfer corespunzător se obține cu

$$M_{d2}(w) = |G_{d2}(jw)| = M_{d1}(w) M_R(w)$$

$$\angle_{d2}(w) = \arg G_{d2}(jw) = \angle_{d1}(w) + \angle_R(w)$$

în care:

$$M_R(w) = |G_R(jw)| = k_0 / \sqrt{k^2 T^2 w^2 + (k+1)^2}$$

$$\angle_R(w) = \arg G_R(jw) = -\arctg[(k+1)/kTw]$$

definesc locul de transfer al regulatorului (fig.VI.40).

Locul de transfer  $G_{d2}(jw)$  se obține prin compunerea locurilor de transfer  $G_{d1}(jw)$  și  $G_R(jw)$ . Este ușor de observat că efectul regulatorului constă într-o rotire, în domeniul frecvențelor medii, în sens negativ, a locului  $G_{d1}(jw)$  – fig.VI.39, ceea ce este favorabil realizării valorilor recomandate ale indicilor stabilității relative. Într-adevăr, pentru  $k_0 = 40$ ,  $k = 3$  și  $T = 0,05 \text{ sec.}$  (la care se ajunge prin câteva încercări) și conform tabelului:

| w             | 0           | 5            | 10           | 15           | 20           | 30           | 50           | 100          | $+\infty$    |
|---------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $M_R$         | 160         | 155          | 144          | 130          | 117          | 94           | 63           | 50           | 40           |
| $\angle_R$    | $0^\circ$   | $-10^\circ$  | $-19^\circ$  | $-27^\circ$  | $-31^\circ$  | $-35^\circ$  | $-35^\circ$  | $-27^\circ$  | $0^\circ$    |
| $M_{d2}$      | $+\infty$   | 3            | 1,3          | 0,69         | 0,42         | 0,175        | 0,0465       | 0,0098       | 0            |
| $\angle_{d2}$ | $-90^\circ$ | $-114^\circ$ | $-136^\circ$ | $-154^\circ$ | $-166^\circ$ | $-181^\circ$ | $-193^\circ$ | $-196^\circ$ | $-180^\circ$ |

locul de transfer al sistemului în circuit deschis are forma din fig.VI.41. În acest caz se obțin:  $m = 5,7$  și  $g = 36^\circ$ , ceea ce reprezintă o stabilitate relativă satisfăcătoare.

Ca observație finală trebuie reținut faptul că rezultatul s-a obținut prin tatonări bazate pe modificările posibile ale locului de transfer al sistemului în circuit deschis, dar fără un suport director – cantitativ pentru realizarea respectivelor modificări. Se va vedea la punctul e că utilizarea diagramei Bode permite o rezolvare expeditivă atât a alegerii tipului de regulator cât și a determinării parametrilor ajustabili ai regulatorului.

### c. Sisteme cu timp mort

Există situații, cum ar fi reglarea automată a temperaturii cuptoarelor industriale sau reglarea presiunii pe conducte de transport de fluide, în care partea fixată respectiv instalația automatizată (8 respectiv 1 în fig.III.14) conține un element cu timp mort, caracterizat prin factorul  $e^{-Ts}$ ,  $T > 0$  (a se vedea II.7.2.f și 2.3.f, 3.1.a). În astfel de cazuri funcția de transfer a sistemului în circuit deschis are forma:

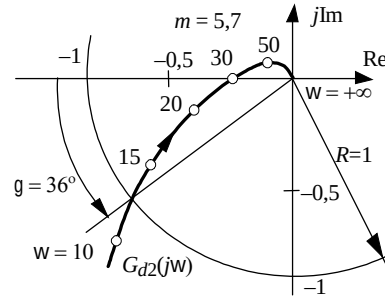


Fig.VI.41. Locul de transfer  $G_{d2}(jw)$   
(cazul regulatorului PDT1)

$$G_d(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} e^{-Ts}, \quad (4.18)$$

în care  $Q(s)$  și  $P(s)$  au semnificația de la (4.13). Aceasta înseamnă că  $F(s)$  funcția de transfer diferență a reacției (definită prin (4.15)) – numitorul funcției de transfer a sistemului în circuit închis (relația (4.14)) are acum expresia:

$$F(s) = 1 + G_d(s) = \frac{P(s) + Q(s)e^{-Ts}}{P(s)}. \quad (4.19)$$

Spre deosebire de cazul sistemelor fără timp mort, numărătorul din (4.19) nu mai este un polinom, ci o funcție transcendentă. Această funcție are o infinitate de zerouri. Dintre acestea numai un număr finit sunt situate în  $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ . Aceasta deoarece, pentru  $\operatorname{Re} s \geq 0$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} G_d(s) = 0$ , adică zerourile lui  $F(s)$  din  $\operatorname{Re} s \geq 0$  se află într-o anumită vecinătate a originii. Conform unui rezultat din teoria funcțiilor,  $F(s)$  poate avea într-un domeniu finit cel mult un număr finit de zerouri.

De asemenea  $F(s)$  are în  $\operatorname{Re} s \geq 0$  cel mult un număr finit de poli (zerourile lui  $P(s)$ ).

În aceste circumstanțe este evident că funcției  $F(s)$  i se poate aplica *principiul argumentului* în scopul obținerii unor rezultate de BIBO-stabilitate. Procedând ca la punctul a se poate formula următorul rezultat.

#### Teorema 8

Teoremele 5,6 și 7 se aplică și în cazul în care  $G_d(s)$  este de forma (4.18).  $\square$

#### Exemplul 4.4 (domeniul parametric de BIBO-stabilitate)

Se consideră un sistem automat cu  $G_d(s) = ke^{-Ts}/s$ ,  $k > 0$ ,  $T > 0$ . Se cere să se determine în planul parametrilor  $(k, T)$  domeniul de BIBO-stabilitate.

Locul de transfer este descris de  $G_d(j\omega) = ke^{-Tj\omega}/j\omega = -k(\sin T\omega + j \cos T\omega)/\omega$ . Pentru valori  $k$  și  $T$  adecvate, din punctul de vedere al BIBO-stabilității, se disting două tipuri de locuri de transfer – fig.VI.42: corespunzătoare stabilității (a) și instabilității (b). Conform teoremei 8, respectiv teoremei 7 (*mutatis mutandis*) condiția de BIBO-stabilitate este:

$$\min_{\omega} \operatorname{Re} G_d(j\omega) = \min_{\omega} [-k(\sin T\omega)/\omega] > -1$$

pentru  $\omega$  determinat de  $\operatorname{Im} G_d(j\omega) = -(k \cos T\omega)/\omega = 0$ ,  $\omega > 0$ . Din această ecuație rezultă  $T\omega_i = (2i+1)\pi/2$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ , ceea ce conduce la condiția:  $\min[-2kT/((2i+1)\pi)] > -1$ .

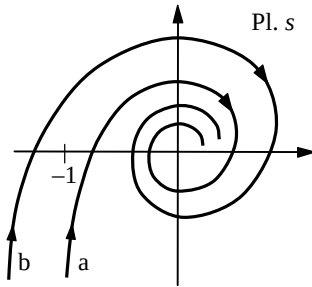


Fig.VI.42. Locul de transfer la exemplul 4.4;  
a – BIBO-stabilitate, b – BIBO-instabilitate

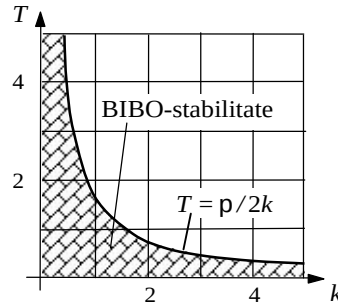


Fig.VI.43. Domeniul de BIBO-stabilitate  
la exemplul 4.4



Soluția acestei inecuații este  $kT < p/2$  și domeniul corespunzător de BIBO-stabilitate este reprezentat în fig.VI.43.  $\square$

*d. Factorul de amplificare ca parametru*

Pentru a pune în evidență factorul de amplificare  $k$  al sistemului în circuit deschis, se înlocuiește  $G_d(s)$  (definit prin (4.13) sau (4.18)) cu  $kG_d(s)$ , în care  $k$  este un parametru. În această situație *funcția de transfer diferență a reacției* – relația (4.15) devine:

$$F(s) = 1 + kG_d(s) = k(k^{-1} + G_d(s)).$$

Este evident că teorema 5 rămâne valabilă și în acest caz. În schimb teoremele 6,7 și 8 trebuie reformulate deoarece acum **punctul critic** este  $-k^{-1} + j0$ .

**Teorema 9**

Sistemul automat cu structura din fig.VI.32 în care  $G_d(s)$  s-a înlocuit cu  $kG_d(s)$ , este BIBO-stabil dacă și numai dacă locul de transfer  $G_d(j\omega)$  înconjoară punctul  $-k^{-1} + j0$ , în sens pozitiv, de un număr de  $n_+ + n_0/2$  ori atunci când  $\omega$  variază de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .  $\square$

**Teorema 10**

Sistemul automat cu structura din fig.VI.32 în care  $G_d(s)$  s-a înlocuit cu  $kG_d(s)$  și  $G_d(s)$  are cel mult doi poli în originea planului  $s$  și restul de poli sunt toți situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ , este BIBO-stabil dacă și numai dacă punctul  $-k^{-1} + j0$  este situat la stânga și în afara locului de transfer  $G_d(j\omega)$  atunci când acesta este parcurs de la  $\omega = -\infty$  la  $\omega = +\infty$ .  $\square$

**Teorema 11**

Teoremele 9 și 10 se aplică și în cazul în care  $G_d(s)$  este de forma (4.18).  $\square$

*e. Utilizarea diagramei Bode*

După cum s-a arătat la 2.2, diagrama Bode poate fi aproximată, de regulă, prin segmente de dreaptă. Se va arăta în continuare că utilizarea diagramei Bode este foarte avantajoasă atât în analiza BIBO-stabilității cât și, mai ales, în proiectarea sistemelor automate BIBO-stabile.

În cele ce urmează se au în vedere sistemele automate a căror funcție de transfer în circuit deschis este de forma:

$$G_d(s) = \frac{k}{s^a} \frac{b_m s^m + \dots + 1}{a_n s^n + \dots + 1} e^{-Ts}, \quad (4.20)$$

în care  $k > 0$ ,  $a = 0,1,2$ ,  $m < n+a$ ,  $a_i > 0$ ,  $i = \overline{1,n}$ ,  $b_j > 0$ ,  $j = \overline{1,m}$ ,  $T \geq 0$  și polinoamele  $a_n s^n + \dots + 1$  și  $b_m s^m + \dots + 1$  sunt relativ prime între ele.

Întrucât în majoritatea situațiilor care intervin în aplicații teorema 7, cu extinderea corespunzătoare de la teorema 8, este îndeplinită, se va formula un rezultat de BIBO-stabilitate în cazul în care polinomul  $a_n s^n + \dots + 1$  este hurwitzian.

Cele două situații posibile, – BIBO-stabilitate și BIBO-instabilitate –, sunt ilustrate în fig.VI.44. Pulsația  $\omega_t$ , la care locul de transfer  $G_d(j\omega)$  taie cercul de rază unitate, respectiv  $Ad(\omega_t) = 0\text{dB}$  ( $|G_d(j\omega_t)| = 1$ , a se vedea și fig.VI.36), este *pulsația de tăiere* a sistemului în circuit deschis (noțiunea omonimă din subcap.3 este definită pentru filtre, pe baza unei

convenții diferite de cea de aici, pentru sistemele automate). În conformitate cu teorema 7, cu extinderea corespunzătoare de la teorema 8, se poate enunța următorul rezultat.

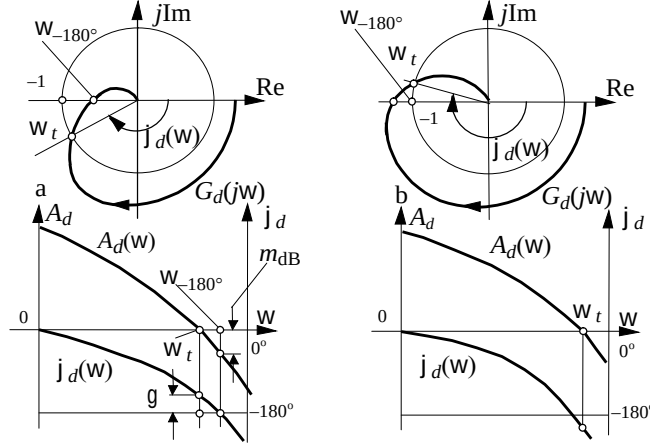


Fig. VI.44. Legătura dintre locul de transfer și diagrama Bode; a– BIBO-stabilitate, b– BIBO-instabilitate

### Teorema 12

Sistemul automat cu structura din fig. VI.32, în care  $G_d(s)$  este de forma (4.13) și definit prin (4.20) și cu polinomul  $a_n s^n + \dots + 1$  hurwitzian, este BIBO-stabil dacă și numai dacă la pulsația de tăiere,  $w_t$ , caracteristica fază – pulsație se află deasupra liniei corespunzătoare lui  $-180^\circ$ .  $\square$

Determinarea *BIBO-stabilității relative* cu ajutorul diagramei Bode este foarte simplă. Ea constă în a măsura  $A_d(w_{-180^\circ})$ , în care  $w_{-180^\circ}$  este definită prin  $\varphi_d(w_{-180^\circ}) = -180^\circ$ , și apoi  $\varphi_d(w_t)$ . Marginea de amplificarea (în dB) este  $m_{dB} = -A_d(w_{-180^\circ})$ , iar marginea de fază este  $g = \varphi_d(w_t) - (-180^\circ)$ . Valorile recomandate sunt:  $m_{dB} = 10 \div 20$  dB,  $g = 30^\circ \div 50^\circ$ .

### Exemplul 4.5 (alegerea factorului de amplificarea)

Se consideră sistemul automat cu  $G_d(s) = k/[s(0,05s+1)(0,2s+1)]$ ,  $k > 0$ . Să se determine valorile lui  $k$  pentru care sistemul automat este BIBO-stabil.

Întrucât  $k$  este necunoscut se trasează caracteristica atenuare – frecvență pentru  $k = 1$ . Conform definiției (2.4) se scrie:

$$A_d(w) = -20 \lg w - 20 \lg \sqrt{(0,05w)^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(0,2w)^2 + 1}, \quad w > 0.$$

Se observă că  $A_d(w)$  poate fi aproximată după cum urmează:

$$A_d(w) = \begin{cases} -20 \lg w, & 0 < w < 5, \\ -20 \lg w - 20 \lg(0,2w), & 5 \leq w < 20, \\ -20 \lg w - 20 \lg(0,2w) - 20 \lg(0,05w), & 20 \leq w < +\infty. \end{cases}$$

Aceasta, pentru o scară logaritmică a pulsației, reprezintă o linie poligonală formată din trei segmente de dreaptă. Punctele de frângere sunt situate la  $w_1 = 1/0,05 = 5$  și  $w_2 = 1/0,05 = 20$ , care se numesc pulsații de frângere. Caracteristica  $A_d(w)$  aproximativă are forma din fig. VI.45 (linia poligonală). Caracteristica  $A_d(w)$  exactă (curba trasată cu linie întreruptă) diferă de cea aproximativă pentru  $w \in [3, 30]$ , dar diferențele nu depășesc 3 dB.

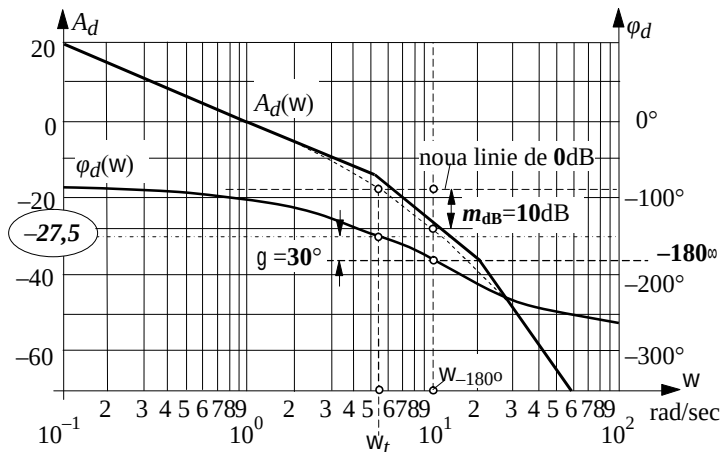


Fig.VI.45. Diagrama Bode la exemplul 4.5

Caracteristica  $\varphi_d(w)$ , fig.VI.45, conform definiției (2.5), are expresia:  $\varphi_d(w) = -90^\circ - \arctg(0,2w) - \arctg(0,05w)$ .

Pentru a-l determina pe  $k$  se pornește de la observația că pentru  $k \neq 1$  linia de 0dB va avea în fig.VI.45 o altă poziție și anume  $-20\lg k$ . Pentru a asigura BIBO-stabilitatea, conform teoremei 12, noua linie de 0dB nu poate coborî mai jos de nivelul limită  $L_{dB} = -27,5$ dB. Așadar,  $k_{dB} = 20\lg k < 27,5$ dB, adică  $0 < k < 12,37$ . Pentru a obține o margine de amplificare de 10dB, noua linie de 0dB se coboară numai până la  $-17,5$ dB, ceea ce înseamnă  $k_{dB} = 17,5$ dB, respectiv  $k = 7,5$ . În acest caz  $w_t = 5,25$  rad/sec și  $g = 30^\circ$ . □

### 4.3. Corecția sistemelor automate

#### a. Condiții impuse sistemului automat

Termenul *corecție* este tradițional în cadrul metodei frecvențiale și se referă la **stabilizarea** unui sistem automat în sensul arătat la 4.2.b.

Pentru realizarea efectivă a corecției unui sistem automat este necesară formularea următoarelor patru condiții de bază pe care acesta trebuie să le satisfacă:

1° Sistemul automat trebuie să fie **BIBO-stabil** în raport cu mărimea prescrisă și cu perturbația.

2° Sistemul automat trebuie să asigure o anumită **precizie în regim staționar**.

Aceasta înseamnă că în regim staționar eroarea  $e = y_p - y$  (a se vedea subcap.III.5) trebuie să fie nulă sau satisfăcător de mică. S-a arătat la III.5.2 că eroarea staționară este nulă dacă funcția de transfer a căii directe are poli în origine (elemente integratoare pe calea directă a sistemului automat, adică în regulator sau în partea fixată) și respectiv satisfăcător de mică dacă, în lipsa polilor în origine, factorul de amplificare al sistemului în circuit deschis este suficient de mare.

Problema care apare acum este că, într-o anumită măsură, condițiile 1° și 2° sunt contradictorii deoarece introducerea unui integrator sau creșterea factorului de amplificare al sistemului în circuit deschis imprimă sistemului automat o tendință spre BIBO-instabilitate. Explicația acestui fapt constă în aceea că prin creșterea factorului de

amplificare locul de transfer  $G_d(j\omega)$  ajunge să înconjoare *punctul critic*  $(-1 + j0)$ , fig.VI.46), iar prin introducerea unui pol în origine, datorită efectului de rotație cu  $-90^\circ$  al acestuia, este posibil ca noul loc de transfer al sistemului în circuit deschis să înconjoare punctul critic  $(-1 + j0)$ , fig.VI.47). Oricum, soluția adoptată pentru satisfacerea condiției 2° nu trebuie să negligeze condiția 1°. Cu alte cuvinte *BIBO-stabilitatea* este esențială și, mai mult, este necesară asigurarea unei anumite *BIBO-stabilități relative* (definită prin marginea de amplificare și marginea de fază). Se poate formula astfel următoarea condiție.

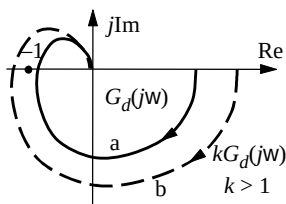


Fig.VI.46. Efectul creșterii factorului de amplificare  $k$  asupra BIB-stabilității;  
a – BIBO-stabilitate, b – BIBO-instabilitate

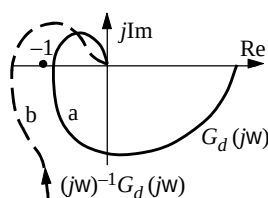


Fig. VI.47. Efectul introducerii unui integrator pe calea directă asupra BIBO-stabilității;  
a – BIBO-stabilitate, b – BIBO-instabilitate

3° Răspunsul indicial în raport cu mărimea prescrisă trebuie să fie **suficient de amortizat**.

Pentru satisfacerea acestei condiții se ține seama de valorile recomandate ale marginii de amplificare și marginii de fază definite la sfârșitul paragrafului 4.2. În ipotezele admise pentru  $G_d(s)$  (relația (4.20)) se poate arăta că dacă la pulsația de tăiere  $\omega_t$  panta caracteristicii  $A_d(\omega)$ , pe un interval suficient de larg de pulsații, este mai mică sau egală cu  $-20\text{dB/decadă}$ , atunci, pentru o valoare admisibilă a marginii de fază, rezultă o valoare admisibilă și pentru marginea de amplificare (exemplul 4.5, fig.VI.45). În atare situație se poate folosi ca măsură a BIBO-stabilității relative (respectiv a unei amortizări satisfăcătoare a răspunsului indicial) numai marginea de fază. Experiența acumulată până în prezent arată că un bun răspuns indicial în raport cu mărimea prescrisă (cu suprareglare acceptabilă și suficient de bine amortizat) se obține pentru  $g = 50^\circ \div 70^\circ$ . Pentru ca răspunsul indicial în raport cu perturbația să fie acceptabil trebuie ca  $g > 30^\circ$ .

Satisfacerea condițiilor 1° – 3° nu este suficientă pentru realizarea calităților impuse sistemului automat. La fel de importantă ca și precedentele este și următoarea condiție.

4° Sistemul automat trebuie să răspundă **suficient de rapid** atât la variația mărimii prescrise cât și la variația perturbației.

Un sistem automat are un răspuns rapid numai dacă sistemul în circuit deschis are și el această proprietate.

În ipotezele admise pentru  $G_d(s)$  (relația (4.20)), sistemul în circuit deschis se comportă ca un filtru «trece-jos». S-a arătat la 3.1.b1 (relația (3.26) și în continuare) că *rapiditatea* răspunsului indicial al filtrului ideal «trece-jos» este cu atât mai mare cu cât *pulsația de tăiere* (pentru filtre; este puțin diferită de cea în sensul sistemelor automate) este mai mare. Această relație rapiditate – pulsație de tăiere este valabilă și pentru filtrele reale «trece-jos».

Pulsația de tăiere a sistemului automat este de regulă mai mare decât a sistemului în circuit deschis și poate fi crescută prin creșterea factorului de amplificare al acestuia. Faptul acesta este ușor explicabil cu ajutorul următorului exemplu. Se consideră:

$$G_d(s) = k/(Ts + 1), \quad k > 0, T > 0,$$

pentru care  $w_t = 1/T$  (pulsăția de tăiere coincide cu pulsăția de frângere, fig. VI.9). Funcția de transfer a sistemului automat este:

$$G_0(s) = k_0/(T_0s + 1), \quad k_0 = k/(k + 1), \quad T_0 = T/(k + 1),$$

ceea ce înseamnă că pulsăția de tăiere a sistemului automat este

$$w_{t0} = (k + 1)/T = (k + 1)w_t > w_t.$$

Este acum evident că, într-o anumită măsură, condițiile 3° și 4° sunt contradictorii. S-a văzut că  $w_{t0}$  poate fi crescut prin creșterea factorului de amplificarea al sistemului în circuit deschis. Aceasta însă atrage după sine reducerea marginii de fază, respectiv reducerea amortizării răspunsului indical al sistemului automat.

#### b. Corecția în domeniul frecvențelor

Conform celor prezentate la punctul a, corecția (stabilizarea) sistemelor automate constă în parcurgerea următorilor patru pași:

- 1° Determinarea schemei bloc structurale cu toți parametrii părții fixate.
- 2° Trasarea diagramei Bode a părții fixate.
- 3° Determinarea regulatorului adecvat care satisface condițiile 1°–4° de la punctul a.
- 4° Simularea (numerică sau hibridă) a sistemului automat în scopul verificării și îmbunătățirii soluției adoptate. Acest pas este necesar îndeosebi atunci când sistemul automat trebuie să satisfacă condiții cantitative privitoare la *suprareglare*, *durata regimului tranzitoriu*, *durata de creștere* și *precizia în regim staționar*.

În continuare se vor prezenta detalii privitoare la pasul 3° în care se realizează corecția (stabilizarea) sistemului automat.

Utilizarea *diagramei Bode* în scopul corecției unui sistem automat constă în aplicarea următoarelor procedee.

- 1° Coborârea caracteristicii  $A_d(w)$  – fig. VI.48.

Prin aceasta pulsăția de tăiere se deplasează spre stânga, ceea ce asigură o creștere a marginii de fază. Totodată este posibil ca sistemul să devină prea lent.

- 2° Ridicarea caracteristicii  $\varphi_d(w)$  – fig. VI.49.

Prin aceasta este posibilă creșterea marginii de fază cu menținerea aproximativ constantă a pulsăției de tăiere (în sensul sistemelor automate; a se vedea 4.2.e și fig. VI.44).

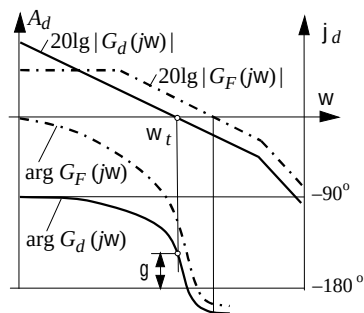


Fig. VI.48. Corecția prin coborârea caracteristicii  $A_d$ ;

$G_F$  – funcția de transfer a părții fixate,  $G_d$  – funcția de transfer a sistemului în circuit deschis

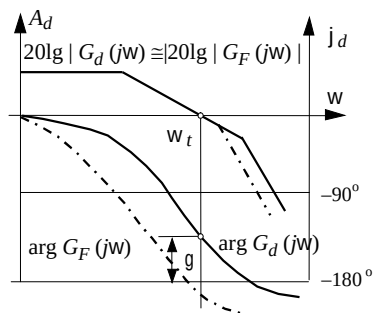


Fig. VI.49. Corecția prin ridicarea caracteristicii  $\varphi_d$ ;

$G_F$  – funcția de transfer a părții fixate,  $G_d$  – funcția de transfer a sistemului în circuit deschis

3° Combinarea procedeelor 1° și 2°.

Se va arăta în continuare că utilizând:

- un regulator PI, cu funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_r (1 + t_1 s) / s, \quad k_r > 0, \quad t_1 > 0, \quad (4.21)$$

se aplică procedeul 1°;

- un regulator PD real, cu funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_r (1 + t_2 s) / (1 + t_0 s), \quad k_r > 0, \quad t_2 \gg t_0 > 0, \quad (4.22)$$

se aplică procedeul 2°;

- un regulator PID real, cu funcția de transfer:

$$G_R(s) = k_r (1 + t_1 s)(1 + t_2 s) / [s(1 + t_0 s)], \quad k_r > 0, \quad t_1 \geq t_2 \gg t_0 > 0, \quad (4.23)$$

se aplică procedeul 3°.

Diagrama Bode a **regulatorului PI** (relația (4.21)) este reprezentată în fig.VI.50. În mod obișnuit  $t_1$  se ia egal cu cea mai mare constantă de timp  $T_1$  a părții fixate. Se elimină astfel prin compensare (matematic – simplificare) efectul factorului  $T_1 s + 1$  de la numitorul funcției de transfer a părții fixate  $G_F(s) = G_R(s)G_{IA}(s)G_t(s)$  (a se vedea fig.III.14, III.16 și relația (III.2.4.)). Acest fapt este avantajos deoarece factorul  $T_1 s + 1$  produce o scădere a fazei cu până la 90°. Compensarea efectului factorului  $T_1 s + 1$  este echivalentă cu o ridicare a caracteristicii fază – pulsație. Ea este cu atât mai eficientă cu cât  $T_1$  este mai mare și are o influență favorabilă în zona pulsației de tăiere. În cazul în care  $G_F(s)$  are mai multe constante de timp mari, de valori apropiate, se adoptă  $t_1 > T_1$ . Astfel scăderea rapidă a fazei datorită factorilor  $(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)...$  de la numitorul lui  $G_F(s)$  este mai bine compensată prin factorul  $t_1 s + 1$  de la numărătorul lui  $G_R(s)$ .

După ce s-a ales  $t_1$ , se trasează caracteristica  $A_d(w)$  (a sistemului în circuit deschis), pentru  $k_r k_f = 1$ , în care  $k_r$  este factorul de amplificare (necunoscut) al regulatorului și  $k_f$  este factorul de amplificare (cunoscut) al părții fixate, și caracteristica  $\varphi_d(w)$ , fig.VI.51. Se trasează o dreaptă paralelă cu axa pulsațiilor la valoarea  $g - 180^\circ$ , unde  $g$  este marginea de fază impusă, și se determină pulsația de tăiere  $w_t$ , la care s-a produs intersecția dintre respectiva dreaptă orizontală și caracteristica  $\varphi_d(w)$ .  $w_t$  este pulsația de tăiere a sistemului în circuit deschis, iar pentru determinarea lui  $k_r k_f$  nu rămâne decât să se coboare linia de 0dB astfel încât aceasta să intersecteze caracteristica  $A_d(w)$  exact la pulsația de tăiere  $w_t$  – fig.VI.51. Caracteristica  $A_d(w)$  are o porțiune, la frecvențe joase, cu panta  $-20\text{dB/decadă}$ , determinată de factorul  $k_r k_f / s$  din funcția de transfer  $G_d(s)$  a sistemului în circuit deschis. Pentru  $w = 1$  se determină  $K_{\text{dB}}$  pe caracteristica  $A_d(w)$ , fig.VI.51, și apoi se calculează  $\lg k_r k_f = K_{\text{dB}}/20$ , respectiv  $k_r k_f$  și în final  $k_r$ .

Diagrama Bode a **regulatorului PID ideal** (relația (4.23), cu  $t_0 = 0$ ) este reprezentată în fig.VI.52 (trasată cu linie întreruptă). Acest tip de regulator se deosebește de regulatorul PI prin prezența a încă unui factor (și anume  $1 + t_2 s$ ) în funcția sa de transfer. Prin aceasta este posibilă o ridicare suplimentară a caracteristicii  $\varphi_d(w)$ . Aceasta înseamnă că pentru o aceeași margine de fază, respectiv aceeași amortizare, este posibilă o plasare mult mai la dreapta a pulsației de tăiere, comparativ cu ceea ce este posibil cu un regulator PI. De

asemenea este posibil ca, la o menținere neschimbată a pulsației de tăiere, să se crească marginea de fază, ceea ce înseamnă că la o aceeași rapiditate se poate obține o amortizare mai bună decât în cazul regulatorului PI.

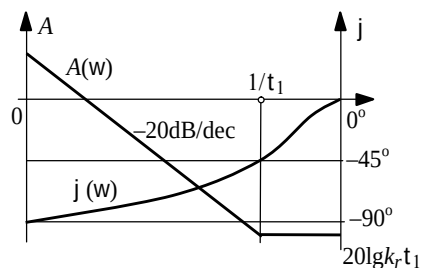


Fig.VI.50. Diagrama Bode a regulatorului PI

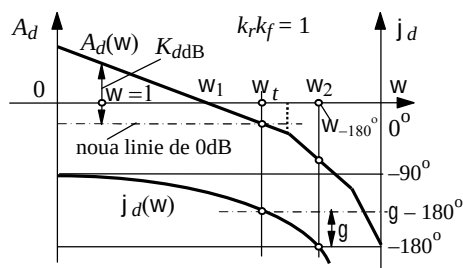


Fig.VI.51. Realizarea corecției cu ajutorul regulatorului PI

Diagrama Bode a **regulatorului PID real** (relația (4.23)) este reprezentată cu linie continuă în fig.VI.52. În mod obișnuit se adoptă  $t_1 = T_1$  și  $t_2 = T_2$ , unde  $T_1$  și  $T_2$  sunt constantele de timp cele mai mari ale părții fixate. În continuare se procedează ca și în cazul regulatorului PI, adică se trasează caracteristicile  $A_d(w)$  și  $\varphi_d(w)$  ale sistemului în circuit deschis, pentru  $k_r k_f = 1$ . În funcție de marginea de fază  $g$  impusă, se determină pulsația de tăiere  $w_t$  și apoi  $k_r$ . Constanta de timp  $t_0$ , introdusă în mod sistematic de regulatorul PID real, are un efect nefavorabil asupra calităților sistemului automat. Pentru ca acest efect să fie cât mai redus, valoarea lui  $t_0$  trebuie să fie cât mai mică posibil (evident există o limită inferioară determinată de principiul de funcționare / tehnologia de realizare a regulatorului).

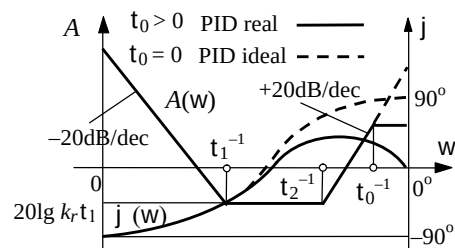


Fig.VI.52. Diagrama Bode a regulatorului PID

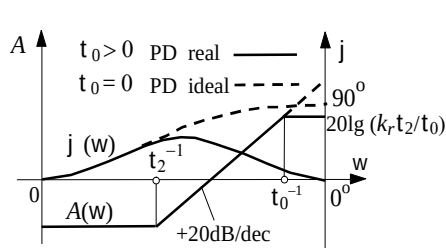


Fig.VI.53. Diagrama Bode a regulatorului PD

Diagrama Bode a **regulatorului PD real / ideal** (relația (4.22)) este reprezentată în fig.VI.53. Se adoptă  $t_1 = T_1$ , unde  $T_1$  este cea mai mare constantă de timp a părții fixate și  $k_r$  se alege astfel încât să se realizeze marginea de fază impusă.

#### Exemplul 4.6 (sinteza regulatorului)

Se consideră sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.III.16 (a se vedea și fig.III.14) în care:

$$G_F(s) = G_R(s)G_{IA}(s)G_t(s) = \frac{0,1}{(25s+1)(6s+1)(1,2s+1)}$$

Se cere să se determine parametrii unui regulator PI și apoi ai unui regulator PID astfel încât  $g = 40^\circ$  și  $m_{dB} \geq 10dB$ .

Funcția de transfer a regulatorului PI are expresia (4.21). Se adoptă  $t_1 = 25$  sec. În acest fel funcția de transfer a sistemului în circuit deschis este:

$$G_d(s) = G_R(s)G_F(s) = k/[s(6s + 1)(1,2s + 1)], \quad k = 0,1k_r$$

Pentru  $k = 1$  diagrama Bode are forma din fig.VI.54 ( $w_{1,2}$  sunt pulsațiile de frângere). Se observă că sistemul automat este instabil. Pentru a se obține un sistem automat BIBO-stabil este necesară ridicarea liniei de 0dB. Pentru  $g = 40^\circ$  rezultă  $w_t = 0,12$  rad/sec. Noua linie de 0dB este mai sus cu  $K_{dB} = 17$ dB față de cea veche. Conform relației  $lg k_r k_f = K_{dB}/20 = -17/20$  rezultă  $lg k_r = 0,15$ , respectiv  $k_r = 1,4$ , și  $m_{dB} = 15$ dB.

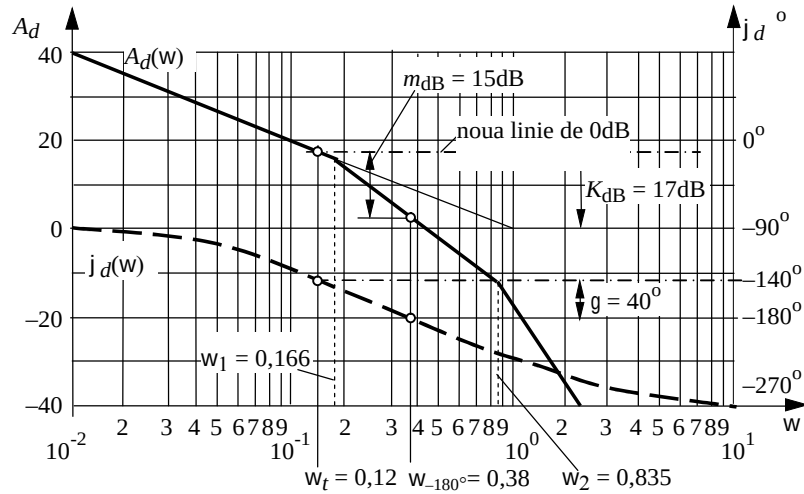


Fig.VI.54. Diagrama Bode la exemplul 4.6; corecția cu regulator PI

Funcția de transfer a regulatorului PID are expresia (4.23). Se adoptă  $t_1 = 25$ sec și  $t_2 = 6$ sec. În aceste condiții funcția de transfer a sistemului în circuit deschis este  $G_d(s) = k/[s(1,2s+1)]$ ,  $k = 0,1k_r$ . Diagrama Bode, pentru  $k = 1$ , este reprezentată în fig.VI.55.

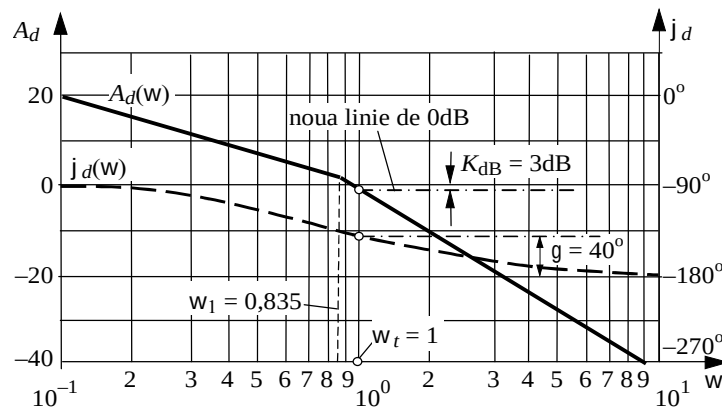


Fig.VI.55. Diagrama Bode la exemplul 4.6; corecția cu regulatorul PID



Pentru  $g = 40^\circ$  rezultă  $w_t = 1$  rad/sec. Noua linie de 0dB este mai jos cu  $K_{dB} = 3$ dB față de cea veche. Conform relației  $\lg k_f k_r = K_{dB}/20 = +3/20$  rezultă  $\lg k_r = 1,15$ , respectiv  $k_r = 14$ , și  $m_{dB} = +\infty$ .

Este evident că pentru o aceeași margine de fază ( $g = 40^\circ$ ) regulatorul PID realizează o rapiditate mai mare ( $w_t = 1$  rad/sec) a sistemului automat comparativ cu utilizarea regulatorului PI ( $w_t = 0,12$  rad/sec).  $\square$

### c. Reglarea în cascadă

Introducerea unei reacții negative suplimentare este unul din cele mai utilizate mijloace pentru realizarea stabilizării unui sistem automat, în special în cazul în care partea fixată a sistemului are o funcție de transfer de ordin ridicat. Reacția negativă suplimentară se realizează după o mărime intermediară (direct măsurabilă) a părții fixate. În acest fel partea fixată apare divizată în două subsisteme (conectate în serie) descrise de funcții de transfer mai simple.

Structura de bază a unui astfel de sistem automat, numit și **sistem automat cu reglare în cascadă**, este reprezentată în fig.VI.56. Instalația automatizată este divizată în două subsisteme descrise de funcțiile de transfer  $G_{IA1}(s)$  și  $G_{IA2}(s)$ . Se realizează *reacția negativă primară* după mărimea reglată  $y_1$  și se introduce *reacția negativă secundară* după mărimea intermediară  $y_2$ .

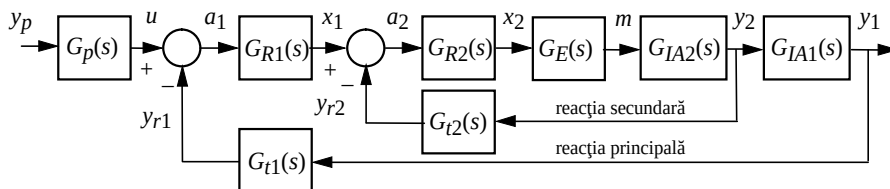


Fig.VI.56. Sistem automat de reglare în cascadă

Corecția sistemului automat se realizează în felul următor. *Regulatorul secundar*  $G_{R2}(s)$  se alege astfel încât circuitul închis secundar să fie aproximat printr-o funcție de transfer PT1. Acest lucru este posibil utilizând un regulator PID. Pentru circuitul închis principal alegerea *regulatorului principal*  $G_{R1}(s)$  se face între tipurile P, PI sau PID. Componenta D în regulatorul secundar este mai puțin uzuală deoarece este posibil ca aceasta, prin amplificarea frecvențelor înalte, să facă sistemul sensibil la perturbații aleatoare (zgomote).

Pentru ambele regulatoare alegerea parametrilor se poate face prin procedeele de corecție în domeniul frecvențelor sau cu ajutorul metodei locului rădăcinilor. Prin faptul că partea fixată a sistemului a fost împărțită în două și că folosind două regulatoare adecvate de tipul PID este posibilă compensarea a mai mult de două constante de timp din partea fixată, reglarea în cascadă poate asigura o stabilizare mult mai bună în comparație cu utilizarea unei singure reacții negative.

#### Exemplul 4.7 (sistem de reglare automată a turației; continuare)

Un exemplu tipic de utilizare a reglării în cascadă îl constituie reglarea automată a turației unui motor electric de c.c. comandat pe indus. Cele două reacții sunt: *reacția principală* – după turație și *reacția secundară* – după curentul prin indus. Schema bloc

funcțională, corespunzătoare aceleia din fig.III.15, este prezentată în fig.VI.57. Reacția după curentul prin indus se realizează cu ajutorul șuntului SH, a adaptorului A (care asigură și o separare galvanică între circuitul indusului și dispozitivul de automatizare) și a regulatorului de curent RC.

În conformitate cu schema bloc structurală a motorului electric de c.c. (fig.II.12), funcția de transfer între tensiunea  $U(s)$  și curentul  $I(s)$  are expresia:

$$G_{UI}(s) = \frac{Js + k_3}{(Ls + R)(Js + k_3) + k_1 k_2}.$$

Întrucât momentul de inerție  $J$  are de regulă valori mari, rezultă că pentru valori mari ale lui  $|s|$  (respectiv pentru valori mici ale timpului, conform teoremei valorii inițiale, Anexa A.1.2.b.2) expresia  $|Js + k_3|$  are de asemenea valori mari. Scoțând forțat în factor  $(Js + k_3)$  la numitorul lui  $G_{UI}(s)$  și considerând  $k_1 k_2 / (Js + k_3) \approx 0$  se ajunge la aproximația

$$G_{UI} \cong \frac{1}{Ls + R}.$$

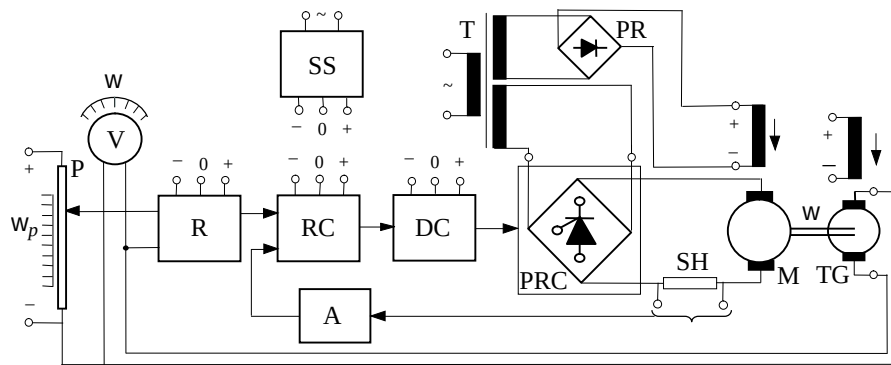


Fig.VI.57. Schema funcțional-tehnologică a unui sistem automat de reglare în cascadă a turației și curentului motorului electric de c.c. (a se vedea și fig.III.15); SH – șunt, A – adaptor, RC – regulator de curent

Semnificația fizică a acestui rezultat este că pentru valori mici ale timpului, comparabile cu constanta de timp electromagnetică ( $L/R$ , de regulă de valoare mică), constanta de timp electromecanică ( $J/k_3$ , de regulă de valoare mare) are un efect de întârziere a reacției prin t.c.e.m. (elementul 8 în fig.II.12), fapt care permite neglijarea acestei reacții. În aceste condiții regulatorul secundar (de curent), RC, se alege de tipul PI (relația (4.21)), cu

$$t_1 = L/R.$$

Pe baza acestei proceduri rezultă că funcția de transfer echivalentă a sistemului de reglare automată a curentului (circuitul închis secundar) este, într-o primă aproximație, de tipul P. Ca urmare, partea de motor rămasă în circuitul închis principal (al turației) este descrisă, într-o primă aproximație, de o funcție de transfer de tipul PT1. În aceste condiții regulatorul principal (de turație), R, se alege de tipul PI sau PID (relațiile (4.21) sau (4.23)), cu

$$t_1 = J/k_3. \square$$

Observațiile și investigațiile experimentale evidențiază faptul că, de regulă, sistemele automate reale sunt neliniare, în sensul că unul sau mai multe componente ale sistemului automat real sunt neliniare (nu satisfac definiția 1 de la II.1.3). Sistemele automate liniare reprezintă cazuri particulare la care se ajunge prin idealizări, simplificări și aproximații ale fenomenelor reale. În majoritatea situațiilor rezultatele care se obțin în astfel de condiții sunt satisfăcătoare, în sensul unei concordanțe acceptabile între modelele matematice și respectiv observațiile experimentale.

Există însă numeroase situații în care obținerea unui model matematic liniar presupune aproximații inacceptabile, atât principial cât și ca urmare a unor neconcordanțe flagrante între teorie și experiment. Pentru astfel de sisteme a fost necesară elaborarea unor metode adecvate în care s-a ținut seama în primul rând de caracterul neliniar al modelelor matematice.

Elementele neliniare care pot fi puse în evidență în cadrul sistemelor automate se împart în două categorii:

- *esențiale* sau deliberat introduse
- *neesențiale* sau accidentale.

O neliniaritate esențială este un element indispensabil pentru realizarea unei anumite relații intrare – ieșire. Ca exemple de neliniarități esențiale se pot cita elementele de tip releu – fig.VII.1, frecvent utilizate ca regulatoare în cadrul sistemelor automate.

Neliniaritățile neesențiale nu sunt introduse în mod intenționat, au un caracter natural și în general sunt nedorite. Într-o primă aproximație liniarizarea lor nu trebuie să conducă la neconcordanțe prea mari între modelul matematic și observațiile experimentale. Ca exemple de neliniarități neesențiale se pot aminti: *saturația* (limitarea, fig.IV.2), *zona de insensibilitate*, *jocul în angrenaje* și *frecarea uscată* – fig.VII.2, precum și *histerezisul* (mecanic, termic, electric sau magnetic) – fig.VII.3.

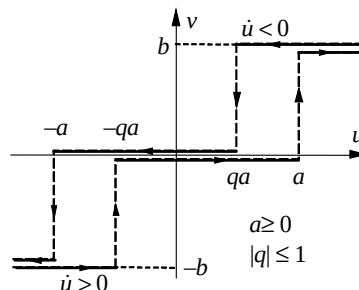


Fig.VII.1. Neliniaritatea de tip releu; a – valoarea de acționare; qa – valoarea de revenire

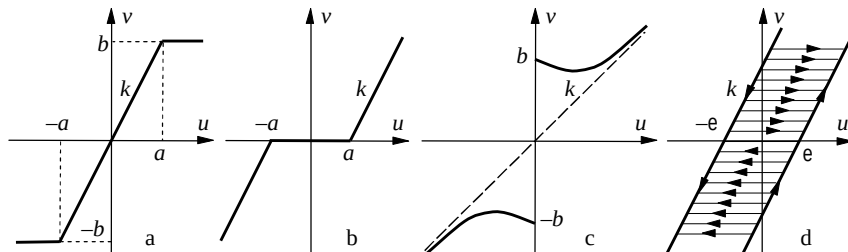


Fig.VII.2. Neliniarități neesențiale (accidentale): a – saturația (limitarea), b – zona de insensibilitate, c – frecarea uscată, d – jocul în angrenaje

În mod obișnuit se admite că sistemele neliniare satisfac *ipoteza de separabilitate*. Aceasta afirmă că sistemul poate fi divizat în subsisteme liniare și neliniare conectate adecvat între ele. Pentru subsistemele liniare se poate adopta descrierea cu ajutorul funcției de transfer. Pentru ilustrarea unei proceduri de obținere a modelului matematic pe baza ipotezei de separabilitate se prezintă cazul motorului electric de c.c. cu dublă comandă: prin tensiunea aplicată indusului (exemplul 2.1, II.2.1) și prin tensiunea aplicată inductorului (de excitație). În aceste circumstanțe, conform fig.II.10, la ecuațiile obținute la exemplul II.2.1 (din paragraful II.2.1), nuanțate corespunzător noii situații și anume:

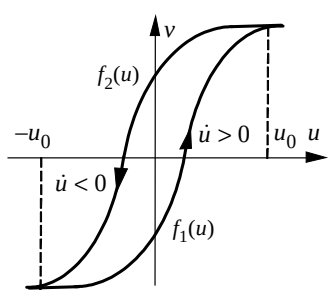


Fig.VII.3. Neliniaritatea de tip histerezis

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + e, \quad e = c_1 j w,$$

$$J \frac{dw}{dt} = m_m - m_f - m,$$

$$m_m = c_2 j i, \quad m_f = c_3 w,$$

se adaugă ecuațiile inductorului:

$$u_{ex} = R_{ex} i_{ex} + L_{ex} \frac{di_{ex}}{dt},$$

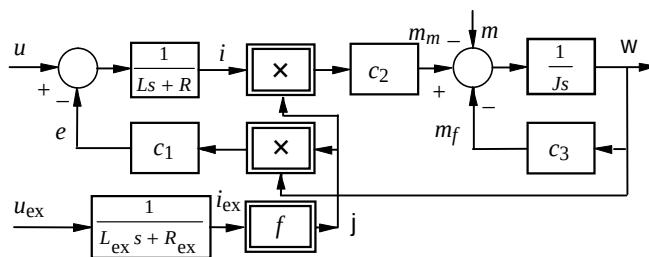
$$j = f(i_{ex}),$$

în care  $u_{ex}$  și  $i_{ex}$  sunt tensiunea și curentul de excitație,  $R_{ex}$  și  $L_{ex}$  sunt rezistența și inductanța circuitului de excitație,  $j$  este fluxul de excitație și  $f$  este o funcție neliniară – caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic.

Examinând cele șapte ecuații se constată că a doua, a patra și a șaptea reprezintă elemente neliniare. Aplicând transformarea Laplace ecuațiilor liniare rezultă:

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R} [U(s) - E(s)], \quad W(s) = \frac{1}{Js} [M_m(s) - M_f(s) - M(s)],$$

$$M_f(s) = c_3 W(s), \quad I_{ex}(s) = \frac{1}{L_{ex}s + R_{ex}} U_{ex}(s).$$

Fig.VII.4. Schema bloc structurală a motorului electric de c.c. cu dublă comandă ( $u$  – pe indus,  $u_{ex}$  – pe inductor)

Cu acestea și cu cele trei ecuații neliniare se obține schema bloc structurală din fig.VII.4, în care dreptunghiurile duble simbolizează elementele neliniare ale sistemului.

Analiza și sinteza sistemelor automate neliniare se realizează prin numeroase metode aplicabile unor clase diferite de sisteme. Majoritatea lor se sprijină pe idei și concepte din teoria sistemelor automate liniare. Toate metodele au însă ca scop comun analiza stabilității și sinteza unor sisteme automate stabile. În cele ce urmează se vor prezenta două metode frecvențiale și anume: metoda funcției de descriere și metoda bazată pe criteriul Popov.

## 1. Metoda funcției de descriere

Aceasta este o metodă de liniarizare în domeniul frecvențelor. Ea este aplicabilă unei clase largi de neliniarități, dar este foarte eficientă în special în cazul neliniarităților descrise de funcții discontinue, pentru care liniarizarea bazată pe formula lui Taylor (a se vedea II.1.3) este inoperantă.

### 1.1. Procedeele celor două locuri

#### a. Definiția funcției de descriere

Ipotezele pe baza cărora se va defini *funcția de descriere* a unui element neliniar cu o mărime de intrare și o mărime de ieșire (ambele funcții scalare de timp) sunt următoarele:

1° Relația intrare – ieșire este descrisă de:

$$v = f(u), \quad (1.1)$$

unde  $f$  este o funcție continuă și monotonă pe porțiuni, univalentă sau multivalentă, având cel mult discontinuități de prima speță (condițiile lui Dirichlet).

2° Neliniaritatea (1.1) este simetrică față de originea planului  $(u, v)$ .

3° Dacă  $u(t)$  este o funcție periodică de perioadă  $T$ , atunci  $v(t)$  este de asemenea o funcție periodică de aceeași perioadă  $T$ .

4° În structura sistemului automat elementul neliniar precede un element liniar cu o caracteristică atenuare – frecvență de tipul filtru «trece-jos» cu o pantă cel mult egală cu  $-40$  dB/decadă în zona pulsației de tăiere.

Aceste ipoteze sunt satisfăcute în majoritatea cazurilor care intervin în aplicații. Dacă se face abstracție de ipotezele 2° și 3°, atunci se iau în considerare și neliniaritățile care pentru  $u(t)$  periodică produc la ieșire și o componentă continuă și subarmonici.

Fie

$$u(t) = A \sin \omega t, \quad t \in \mathbf{R}; \quad A \geq 0, \quad \omega \geq 0. \quad (1.2)$$

În ipotezele 1° – 3°,  $y(t)$  poate fi exprimat prin următoarea *serie Fourier*:

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t), \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.3)$$

în care

$$A_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(A \sin \omega t) \sin n\omega t d(\omega t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

$$B_n = \frac{2}{p} \int_0^p f(A \sin \omega t) \cos n\omega t d(\omega t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

sunt *coeficienții Fourier* ai ieșirii  $v(t)$ .

În ipoteza 4° și pentru  $\omega$  situat în zona *pulsației de tăiere* a elementului liniar, armonicele superioare (1.3) au un efect neglijabil în cadrul sistemului automat. Se poate scrie:

$$v(t) \cong v_1(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.6)$$

unde  $v_1(t)$  este fundamentală lui  $v(t)$ .

Pentru stabilirea unui formalism asemănător cu cel utilizat la metoda frecvențială (în cazul sistemelor liniare, cap. VI) se transpun relațiile (1.2) și (1.6) în domeniul complex. Se pot scrie relațiile:

$$u(t) = \operatorname{Im} U(A, j\omega) = \operatorname{Im} A e^{j\omega t}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad (1.7)$$

$$v_1(t) = \operatorname{Im} V_1(A, j\omega) = \operatorname{Im} \sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)} e^{j \arctg \frac{B_1(A)}{A_1(A)}} e^{j\omega t}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1.8)$$

### Definiția 1

Sub ipotezele 1<sup>o</sup> – 4<sup>o</sup>, raportul:

$$N(A) = \frac{V_1(A, j\omega)}{U(A, j\omega)}, \quad A \in \mathbf{R}_+, \quad (1.9)$$

se numește *funcția de descriere* a elementului neliniar (1.1). □

Ținând seama de (1.7), (1.8), din (1.9) rezultă că funcția de descriere are expresia:

$$N(A) = \frac{1}{A} [A_1(A) + jB_1(A)] = \frac{1}{A} \sqrt{A_1^2(A) + B_1^2(A)} e^{j \arctg \frac{B_1(A)}{A_1(A)}}, \quad A \in \mathbf{R}_+. \quad (1.10)$$

În aplicații se utilizează și *funcția de descriere invers negativă*:

$$N_i(A) = -1/N(A), \quad A \in \mathbf{R}_+. \quad (1.11)$$

Hodograful  $N_i(A)$ ,  $A \in \mathbf{R}_+$ , se numește *locul de descriere invers negativ* al elementului neliniar (1.1).

Notând cu

$$N_R(A) = \operatorname{Re} N(A), \quad N_I(A) = \operatorname{Im} N(A), \quad (1.12)$$

din (1.6), ținând seama de (1.2) și (1.10), rezultă:

$$v(t) \equiv v_1(t) = N_R(A)u(t) - \omega N_I(A) \int_0^t u(t) dt + AN_I(A). \quad (1.13)$$

Prezența integralei în relația intrare – ieșire (1.13) pune în evidență faptul că elementul neliniar are o „*memorie*”, determinată de partea imaginară  $N_I(A)$  a funcției de descriere. Acest fenomen apare numai în cazul neliniarităților multivalente, după cum se va arăta în cadrul rezultatului următor.

### Teorema 1

Fie o neliniaritate bivalentă definită prin (fig.VII.3):

$$f(u) = \begin{cases} f_1(u), & \text{pentru } u > 0, \\ f_2(u), & \text{pentru } u < 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

astfel încât:

$$f_1(u) \leq f_2(u), \quad \text{pentru } |u| < u_0, \quad (1.15)$$

$$f_1(u) \equiv f_2(u), \quad \text{pentru } |u| \geq u_0. \quad (1.16)$$

Atunci

$$N_I(A) = -S/(pA^2), \quad A \geq u_0, \quad (1.17)$$

unde  $S$  este aria cuprinsă între graficele funcțiilor  $f_1(u)$  și  $f_2(u)$ .

☛ Conform cu relațiile (1.5), (1.10) și (1.12) se poate calcula  $N_I(A)$  după cum urmează:

$$N_I(A) = \frac{1}{pA} \int_0^{2p} f(A \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t) = \frac{1}{pA^2} \left[ \int_0^{p/2} f(A \sin \omega t) A \cos \omega t d(\omega t) + \right.$$

$$= \frac{1}{\rho A^2} \left[ \int_0^A f_1(u) du + \int_A^A f_2(u) du + \int_{-A}^0 f_1(u) du \right] = \frac{1}{\rho A^2} \int_{-A}^A [f_2(u) - f_1(u)] du = -\frac{S}{\rho A^2}. \square$$

### Exemplul 1.1 (neliniaritatea de tip releu)

Graficul neliniarității de tip releu, în care s-au introdus notații care permit și studiul unor cazuri particulare, este reprezentat în fig.VII.1. Cazurile care se au în vedere sunt următoarele:

- 1° releu bipozițional (ideal):  $q = 1, a = 0$ ;  
 2° releu bipozițional cu histerezis:  $q = -1, a > 0$ ;  
 3° releu tripozițional (ideal):  $q = 1, a > 0$ ;  
 4° releu tripozițional cu histerezis:  $|q| < 1, a > 0$ .

Se cere să se determine funcția de descriere și locul de descriere invers negativ al acestei neliniarități.

În conformitate cu (1.4), (1.10), (1.12) și fig.VII.5 (cazul 4°) se poate scrie:

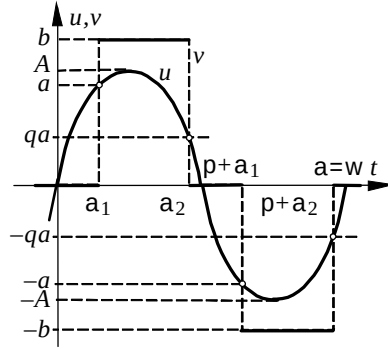


Fig.VII.5 Graficele funcțiilor  $u$  și  $y$  la exemplul 1.1 (neliniaritate de tip releu – fig.VII.1)

$$N_R(s) = \frac{2}{pA} \int_0^p v(t) \sin wt d(wt) = \frac{2b}{pA} \int_{a_1}^{a_2} \sin a da = \frac{2b}{pA} (\cos a_1 - \cos a_2).$$

Din fig. VII.5 rezultă:  $\sin \alpha_1 = a/A$ ,  $\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - (a/A)^2}$ ,  $\sin \alpha_2 = qa/A$ ,  $\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - (qa/A)^2}$ , astfel că partea reală a funcției de descriere (4<sup>o</sup>) are expresia:

$$N_R(A) = \frac{2b}{\rho A} \left( \sqrt{1 - a^2/A^2} + \sqrt{1 - q^2 a^2/A^2} \right), \quad A \geq a.$$

Pentru partea imaginară a funcției de descriere ( $4^0$ ), conform relației (1.17), rezultă:

$$N_I(A) = -\frac{2ab}{pA^2}(1-q), \quad A \geq a.$$

Funcția de descriere invers negativă (4<sup>o</sup>) are expresia:

$$N_i(A) = -\frac{\rho A^2}{4ab} \left[ \sqrt{A^2/a^2 - q^2} + j(1-q) \right] / \left[ A^2/a^2 - q^2 + \sqrt{(A^2/a^2 - 1)(A^2/a^2 - q^2)} \right], \quad A \geq a.$$

În primele trei cazuri particulare deja evidențiate se obțin următoarele expresii:

$$1^\circ \quad N(A) = 4b/pA, \quad N_i(A) = -pA/4b, \quad A > 0;$$

$$2^\circ \quad N(A) = \frac{4ab}{\rho A^2} \left( \sqrt{A^2/a^2 - 1} - j \right), \quad N_i(A) = -\frac{\rho a}{4b} \left( \sqrt{A^2/a^2 - 1} + j \right), \quad A \geq a;$$

$$3^\circ \quad N(A) = \frac{4ab}{\rho A^2} \sqrt{A^2/a^2 - 1}, \quad N_i(A) = -\frac{\rho A^2}{4ba} \bigg/ \sqrt{A^2/a^2 - 1}, \quad A > a.$$

Locurile de descriere invers negative sunt reprezentate în fig.VII.6. □

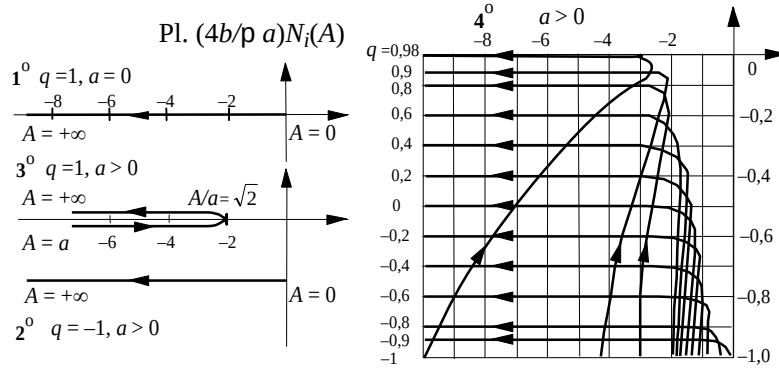


Fig.VII.6. Locul de descriere invers negativ al neliniarităților de tip releu (exemplul 1.1); 1° – releu bipozițional (ideal), 2° – releu bipozițional cu histerzis, 3° – releu tripozitional (ideal), 4° – releu tripozitional cu histerzis

b. *Calculul aproximativ al funcției de descriere; o formulă de inversiune*

Dacă neliniaritatea (1.1) este univalentă, atunci, conform ipotezei 2°, funcția  $f$  este impară. Ca urmare coeficientul  $A_1$  din (1.10) se poate calcula și cu formula:

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(A \sin wt) \sin wt d(wt). \quad (1.18)$$

Utilizând substituțiile  $x = \sin wt$  și  $g(x) = x f(Ax)$  din (1.18) se obține:

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \cong \frac{1}{3} [g(1) + 2g(1/2) + 2g(-1/2) + g(-1)],$$

din care rezultă:

$$A_1 \cong \frac{2}{3} [f(A) + f(A/2)]. \quad (1.19)$$

Întrucât în cazul neliniarităților univalente  $N_I(A) = 0$  (conform teoremei 1), din (1.10) și (1.19) se obține:

$$N(A) = N_R(A) \cong \frac{2}{3A} [f(A) + f(A/2)]. \quad (1.20)$$

**Exemplul 1.2**

Se consideră neliniaritatea de tip releu bipozițional (ideal) și se cere să se calculeze funcția de descriere cu formula (1.20).

Expresia analitică a acestei neliniarități este  $v = b \operatorname{sgn} u$ . Utilizând formula (1.20) rezultă:  $N(A) \cong 4b/(3A)$ . Aceasta poate fi considerată o aproximație satisfăcătoare având în vedere că  $N(A) = 4b/(pA)$  (exemplul 1.1, 1°). □

**Exemplul 1.3**

Se consideră  $f(u) = ku^m$ ,  $m = 1, 3, \dots$ . Să se calculeze funcțiile de descriere exactă și aproximativă.



Pentru  $m$  impar se obține  $\int_0^p \sin^{m+1} w t d(wt) = p[m(m-2)\dots 3.1]/[(m+1)(m-1)\dots 4.2]$ ;

din (1.10) și (1.17) rezultă:  $N(A) = 2kA^{m-1}[m(m-2)\dots 3.1]/[(m+1)(m-1)\dots 4.2]$ . Pe de altă parte din (1.20) se obține:  $N(A) \cong (2^{m+1})kA^{m-1}/(3 \cdot 2^{m-1})$ . Este ușor de observat că pentru  $m = 1$  (cazul liniar) și  $m = 3$  cu ambele formule se obțin aceleași rezultate, respectiv  $N(A) = k$  și  $N(A) = 3kA^2/4$ .  $\square$

Formula (1.20), pe lângă simplitate, oferă posibilitatea determinării unei neliniarități  $f(u)$ , continuă în  $u = 0$ , atunci când se cunoaște funcția de descriere  $N(A)$ . Pentru a obține o astfel de **formulă de inversiune**, se consideră că amplitudinea intrării  $u$  ia succesiv valorile  $A, A/2, A/2^2, \dots, A/2^n, \dots$ . Din (1.20) se obține următorul șir de egalități:

$$\begin{aligned} 3AN(A)/2 &\cong f(A) + f(A/2) \\ -3AN(A/2)/2^2 &\cong -f(A/2) - f(A/2^2) \\ 3AN(A/2^2)/2^3 &\cong f(A/2^2) + f(A/2^3) \\ &\dots \\ (-1)^n 3AN(A/2^n)/2^{n+1} &\cong (-1)^n f(A/2^n) + (-1)^n f(A/2^{n+1}) \end{aligned}$$

Sumând aceste egalități membru cu membru se obține formula de inversiune:

$$f(A) \cong \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3A}{2^{n+1}} N\left(\frac{A}{2^n}\right), \quad (1.21)$$

deoarece, pe lângă reducerile de termeni asemenea, are loc și  $f(A/2^{n+1}) \rightarrow 0$  pentru  $n \rightarrow \infty$  ( $f$  este funcție impară și continuă în  $u = 0$ ).

#### Exemplul 1.4

Pentru  $N(A) = 3kA^2/4$  se cere să se obțină  $f(u)$  cu ajutorul formulei de inversiune (1.21).

Utilizând numai primii patru termeni din (1.21) se obține:  $f(A) \cong 4095kA^3/4094$ , ceea ce înseamnă  $f(u) \cong ku^3$ . Pentru aprecierea acestui rezultat se are în vedere și ceea ce s-a obținut la exemplul 1.3 pentru  $m = 3$ .  $\square$

Formula de inversiune (1.21), deși aproximativă, este deosebit de utilă în sinteza sistemelor automate neliniare, după cum se va vedea la exemplul 1.7.

#### c. Schema bloc structurală

Analogiile dintre noțiunile de *răspuns la frecvență* și de *funcție de descriere* permit tratarea sistemelor automate neliniare în maniera cunoscută de la sistemele automate liniare. În plus se admite *ipoteza de separabilitate*, astfel că se pot alcătui scheme bloc structurale în care apar elemente liniare și neliniare. Pentru elementele liniare ale sistemului se pot aplica regulile și identitățile de transfigurare a schemelor bloc structurale cunoscute de la sistemele liniare (subcap. II.2), cu condiția ca mărimile de intrare ale elementelor neliniare să rămână neschimbate. Această condiție are în vedere faptul că funcția de descriere depinde de amplitudinea mărimii de intrare a elementului neliniar. În acest context trebuie remarcat că în cazul unui sistem automat cu o singură neliniaritate forma cea mai simplă la care se poate ajunge este *schema bloc structurală tipică* din fig.VII.7. Spre deosebire de cazul liniar, structura cu reacție negativă din fig.VII.7 nu are un echivalent mai simplu. În plus se preferă ca reacția să fie unitară, ceea ce conduce în mod

implicit la constituirea în cadrul buclei închise a elementului liniar, descris de  $G(s)$ , imediat după elementul neliniar. În acest fel este posibilă verificarea de fiecare dată a îndeplinirii ipotezei 4° de la punctul  $a$ .

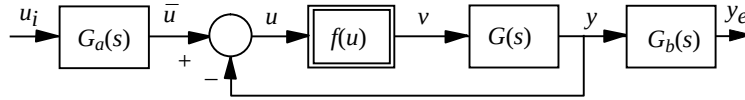


Fig. VII.7 Schema bloc structurală tipică a unui sistem automat cu o singură neliniaritate

#### Exemplul 1.5 (operații de transfigurare)

Se consideră schema bloc structurală reprezentată în fig. VII.8. Se cere ca prin transfigurări succesive să se ajungă la schema bloc structurală tipică.

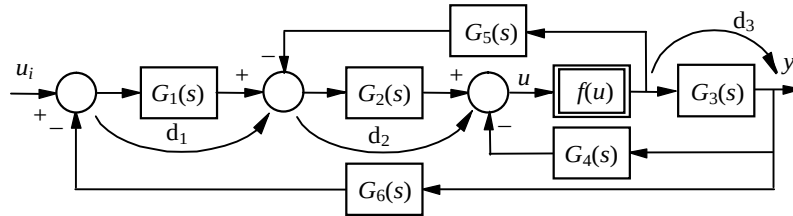


Fig. VII.8. Schema bloc structurală la exemplul 1.5

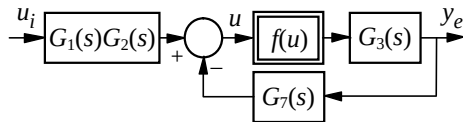


Fig. VII.9. Schema bloc structurală (la exemplul 1.5) obținută după realizarea deplasărilor  $d_1 - d_3$  (fig. VII.8)

Se realizează în mod succesiv deplasările  $d_1$ ,  $d_2$  și  $d_3$  și se ajunge la schema din fig. VII.9, în care:

$$G_7 = G_4 + G_2 G_5 / G_3 + G_1 G_2 G_6.$$

Deplasând acum elementul  $G_7$  de pe calea de reacție pe calea directă se ajunge la schema din fig. VII.7, în care:

$$G = G_2 G_5 + G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_6, \quad G_a = G_1 G_2, \quad G_b = G_7^{-1}. \quad \square$$

În cazul sistemelor automate cu două sau mai multe neliniarități, reducerea la forma tipică din fig. VII.7 nu este de regulă posibilă datorită condiției menținerii neschimbate a mărimilor de intrare ale neliniarităților.

#### d. Punct de echilibru

Pentru cele ce urmează se admite că partea liniară a sistemului automat neliniar (în forma tipică – fig. VII.7), pe lângă ipoteza 4° de la punctul  $a$ , mai satisface următoarele ipoteze:

- 1° Are cel mult un pol în  $s = 0$ , iar restul polilor sunt toți în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .
- 2° Cele două polinoame al căror raport este  $G(s)$  (fig. VII.7) sunt relativ prime între ele.
- 3°  $G(s)$  conține, eventual, și un element cu timp mort.

Ca și în cazul sistemelor automate liniare, regimul de funcționare uzual al unui sistem automat neliniar, motivat de utilitatea sa practică, este *regimul staționar*. Cu referire la schema tipică din fig. VII.7 (exclusiv  $G_a(s)$  și  $G_b(s)$ , din afara circuitului închis) un astfel de regim este posibil pentru  $\bar{u} = \bar{u}_0 = \text{constant}$ , care determină  $u = u_0 = \text{constant}$ ,  $v = v_0 =$

constant și  $y = y_0 = \text{constant}$ . Cvadruplul  $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$  definește un **punct de funcționare** al sistemului automat neliniar, caracterizat prin următoarele ecuații:

$$\begin{cases} y_0 = G(p)v_0 \\ v_0 = f(u_0) \\ u_0 = \bar{u}_0 - y_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

în care  $p = d/dt$  este operatorul de derivare introdus formal prin înlocuirea variabilei  $s$  în  $G(s)$ . Întrucât

$$G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (1.23)$$

rezultă că în punctul de funcționare au loc și egalitățile:

$$\begin{cases} p^n y_0 = p^{n-1} y_0 = \dots = p y_0 = 0 \\ p^n v_0 = p^{n-1} v_0 = \dots = p v_0 = 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

ceea ce permite să se afirme că cvadruplul  $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$  definește un **punct de echilibru** al sistemului automat neliniar în forma schemei bloc tipice. Noțiunea de punct de echilibru are semnificația cunoscută din fizică: toate derivatele variabilelor, în punctul respectiv, sunt nule (relația (1.24)). O definiție formal riguroasă a punctului de echilibru se va da la 1.3.a.

Din (1.22) – (1.24) rezultă:

$$\begin{cases} y_0 = b_0 f(u_0) / a_0 \\ y_0 = \bar{u}_0 - u_0 \end{cases} \quad (1.25)$$

pentru care se dau reprezentările grafice din fig.VII.10. Punctul de echilibru este punctul de intersecție al celor două grafice.

Pentru micile abateri  $Du$ ,  $Dv$  și  $Dy$  ale mărimilor  $u$ ,  $v$  și  $y$  în jurul valorilor  $u_0$ ,  $v_0$  și  $y_0$ , corespunzător ecuațiilor (1.22), se pot scrie următoarele ecuații:

$$\begin{cases} y_0 + Dy = G(p)(v_0 + Dv) \\ v_0 + Dv = f(u_0 + Du) \\ u_0 + Du = \bar{u}_0 - (y_0 + Dy). \end{cases} \quad (1.26)$$

Ținând seama de (1.22), din (1.26) rezultă:

$$\begin{cases} Dy = G(p)Dv \\ Dv = Df(Du) \\ Du = -Dy, \end{cases} \quad (1.27)$$

în care s-a notat:

$$Df(Du) = f(u_0 + Du) - f(u_0). \quad (1.28)$$

Pe baza ecuațiilor (1.27) schema bloc din fig.VII.7 (exclusiv elementele liniare  $G_a(s)$  și  $G_b(s)$ )

poate fi adusă la forma din fig.VII.11, numită **schema bloc structurală standard** asociată punctului de echilibru  $(\bar{u}_0, u_0, v_0, y_0)$ . Se remarcă imediat că sistemul automat din fig.VII.11, descris de ecuațiile (1.27), se caracterizează prin punctul de echilibru  $Dy = 0$ ,  $Dv = 0$ ,  $Du = 0$ .

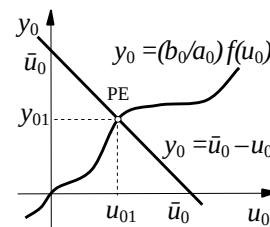


Fig.VII.10. Graficele funcțiilor (1.25);  
PE – punctul de echilibru

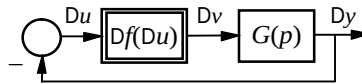


Fig.VII.11. Schema bloc structurală standard  
a unui sistem automat neliniar cu o singură  
neliniaritate

e. *Ecuatia balanței armonice; procedeul celor două locuri*

În cadrul acestei secțiuni se admite ipoteza că sistemul (1.27), pentru  $\bar{u}_0$  fixat, are ca unică stare de echilibru  $Dy = 0, Dv = 0, Du = 0$ .

În afara acestei soluții este posibil ca ecuațiile (1.27) să admită și *soluții periodice*, respectiv *oscilații întreținute* în jurul punctului de echilibru  $Dy = 0, Dv = 0, Du = 0$ .

Dacă în sistemul în forma standard (fig.VII.11) există oscilații întreținute, atunci, datorită efectului de filtru «trece-jos» al părții liniare, la intrarea elementului neliniar preponderentă este fundamentală:

$$Du_1(t) = A \sin wt, \quad t \in \mathbf{R}; \quad A > 0, \quad w > 0. \quad (1.29)$$

În aceste condiții, trecând la mărimi complexe, din ecuațiile (1.27), cu (1.29), la nivelul fundamentalelor, rezultă:

$$\begin{cases} DY_1(A, jw) = G(jw)DV_1(A, jw) \\ DV_1(A, jw) = N(A)DU_1(A, jw) \\ DU_1(A, jw) = -DY_1(A, jw), \end{cases} \quad (1.30)$$

în care  $N(A)$  este funcția de descriere a neliniarității (1.28).

Eliminând  $DV_1(A, jw)$  și  $DY_1(A, jw)$  între ecuațiile (1.30) se obține:

$$[N(A)G(jw) + 1]U_1(A, jw) = 0. \quad (1.31)$$

Întrucât  $U_1(A, jw) = Ae^{jw t} \neq 0$ , din (1.31) rezultă:

$$N(A)G(jw) + 1 = 0, \quad A > 0, \quad w > 0. \quad (1.32)$$

Ecuatia (1.32), care, prin analogie cu cazul liniar, este *ecuația caracteristică* a sistemului automat neliniar în forma standard, se numește **ecuația balanței armonice**. Calea prin care s-a ajuns la această ecuație prilejuiește formularea următorului rezultat.

### Regula 1

Dacă în sistemul automat neliniar în forma standard există oscilații întreținute și dacă acestea se aproximează la nivelul fundamentalei, atunci amplitudinea  $A$  și pulsația  $w$  din relația (1.29) satisfac ecuația balanței armonice (ecuația (1.32)).  $\square$

Ecuatia (1.32), în general complexă, este echivalentă cu ecuațiile reale:

$$\begin{cases} N_R(A) = -\operatorname{Re} G^{-1}(jw) \\ N_I(A) = -\operatorname{Im} G^{-1}(jw). \end{cases} \quad (1.33)$$

În cazul neliniarităților univalente funcția de descriere este reală ( $N_I(A) \equiv 0$ ), astfel că ecuațiile (1.33) au forma particulară:

$$\begin{cases} N(A) = -\operatorname{Re} G^{-1}(jw) \\ \operatorname{Im} G^{-1}(jw) = 0 \end{cases} \quad (\text{sau } \operatorname{Im} G(jw) = 0), \quad (1.34)$$

situație în care din a doua ecuație se calculează *pulsațiile* oscilațiilor întreținute (pulsații determinate numai de partea imaginară a răspunsului la frecvență al părții liniare), iar din prima ecuație se calculează *amplitudinile* corespunzătoare ale fundamentalelor.

Dacă  $N(A)$  și  $G(jw)$  au expresii complicate este dificil de găsit pe cale analitică soluțiile ecuațiilor (1.33). În astfel de cazuri se utilizează procedee grafice.

Pentru rezolvarea pe cale grafică a ecuației (1.32) aceasta se scrie sub forma:

$$G(j\omega) = N_i(A), \quad (1.35)$$

în care  $N_i(A)$  este funcția de descriere invers negativă a neliniarității (1.28). Se reprezintă în același plan (fig.VII.12) hodografele  $G(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$ , și  $N_i(A)$ ,  $A \geq 0$ . Punctele de intersecție corespund oscilațiilor întreținute existente în sistemul automat neliniar. Această cale de rezolvare a ecuației (1.32) (prin (1.35)), foarte utilă și pentru obținerea unei imagini globale asupra existenței oscilațiilor întreținute, este cunoscută sub numele de **procedeul (metoda) celor două locuri**.

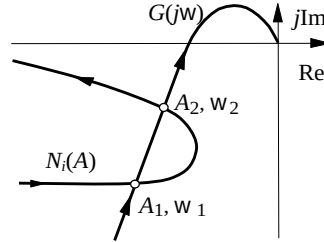


Fig. VII.12. Procedeul celor două locuri

#### Exemplul 1.6 (aplicarea procedeului celor două locuri)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care  $Df(Du) = b \operatorname{sgn} Du$  (releu bipozițional (ideal)), cu  $\operatorname{sgn} 0 = 0$  (pentru existența formală a punctului de echilibru  $Dy = 0$ ,  $Dv = 0$ ,  $Du = 0$ ), și  $G(s) = (s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3)^{-1}$ , cu  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  și  $a_3 \geq 0$ . Se cere să se studieze oscilațiile întreținute (presupunând că ele există), la nivelul fundamentalei.

Funcția de descriere a neliniarității de tip releu bipozițional (ideal) a fost determinată la exemplul 1.1 (1°) și locul de descriere invers negativ a fost reprezentat în fig.VII.6 (1°). Utilizând procedeul celor două locuri – fig.VII.13, rezultă că există o singură oscilație întreținută. Pe baza ecuațiilor (1.34) se poate scrie:

$$\begin{cases} 4b/(pA) = -\operatorname{Re}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) \\ \operatorname{Im}(-j\omega^3 - a_1\omega^2 + ja_2\omega + a_3) = 0, \end{cases}$$

din care rezultă  $\omega_1 = \sqrt{a_2}$  și  $A_1 = 4b/[p(a_1 a_2 - a_3)]$ . Din condiția  $A_1 > 0$  rezultă  $a_1 a_2 - a_3 > 0$ ; aceasta înseamnă că dacă  $a_3 > 0$ , atunci partea liniară trebuie să fie BIBO-stabilă (conform criteriului Hurwitz – teorema 7 de la II.6.4). Fundamentală oscilației întreținute are expresia:

$$Du_1(t) = [4b/p(a_1 a_2 - a_3)] \sin \sqrt{a_2} t, \quad t \in \mathbf{R}. \quad \square$$

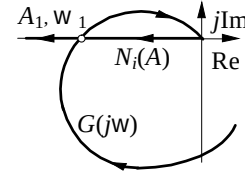


Fig. VII.13. Procedeul celor două locuri la exemplul 1.6

#### Exemplul 1.7 (sinteza unui generator de oscilații întreținute)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care  $G(s) = 0,4(s^3 + s^2 + s)^{-1}$ . Se cere să se determine neliniaritatea univalentă  $Df(Du)$  astfel încât sistemul să fie sediul a trei oscilații întreținute.

Întrucât neliniaritatea este univalentă, locul de descriere invers negativ se va situa pe semiaxa reală negativă (în planul celor două locuri). Locul de transfer  $G(j\omega) = 0,4(-j\omega^3 - \omega^2 + j\omega)^{-1}$ , fig.VII.14, intersectează semiaxa reală negativă în punctul  $-0,4 + j0$  corespunzător pulsației  $\omega_1 = 1$ . În aceste condiții o formă posibilă a locului de descriere invers negativ  $N_i(A)$  este reprezentată în fig.VII.14, corespunzător tabelului:

|          |           |       |       |      |      |      |       |      |      |           |
|----------|-----------|-------|-------|------|------|------|-------|------|------|-----------|
| A        | 0         | 0,5   | 1     | 1,5  | 2    | 2,5  | 4     | 5    | 10   | $\infty$  |
| $N_i(A)$ | $-\infty$ | -0,66 | -0,33 | -0,4 | -0,5 | -0,4 | -0,25 | -0,2 | -0,1 | 0         |
| N(A)     | 0         | 1,5   | 3     | 2,5  | 2    | 3    | 4     | 5    | 10   | $+\infty$ |

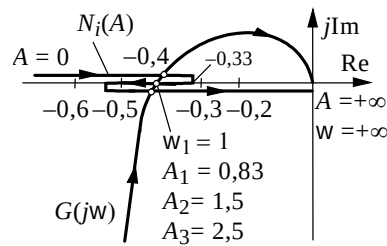


Fig.VII.14. Procedura celor două locuri la exemplul 1.7

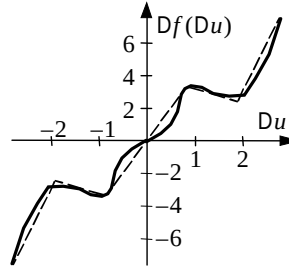


Fig.VII.15. Graficul neliniarității exemplul 1.7

Se asigură astfel trei puncte de intersecție între cele două locuri, respectiv trei oscilații întreținute, toate de aceeași pulsație  $w_1 = 1$  și de amplitudini  $A_1 = 0,83$ ,  $A_2 = 1,5$  și  $A_3 = 2,5$ .

Utilizând formula de inversiune (1.21), cu numai primii patru termeni, se obține pentru neliniaritatea căutată următorul tabel de corespondență:

|       |   |       |     |     |      |      |     |      |      |     |           |
|-------|---|-------|-----|-----|------|------|-----|------|------|-----|-----------|
| A     | 0 | 0,5   | 1   | 1,5 | 2    | 2,5  | 3   | 4    | 5    | 10  | $+\infty$ |
| Df(A) | 0 | 0,825 | 3,6 | 3,3 | 2,34 | 5,58 | 9,8 | 21,4 | 31,6 | 117 | $+\infty$ |

căruia îi corespunde graficul din fig.VII.15 (trasat cu linie continuă). Pentru realizarea practică a acestei neliniarități se poate recurge la aproximarea printr-o linie poligonală (trasată cu linie întreruptă), posibil de materializat cu ajutorul unui amplificator operațional (subcapitolul IV.1) prevăzut cu un circuit de reacție cu rezistențe și diode. □

## 1.2. Stabilitatea oscilațiilor întreținute

Observațiile experimentale care se pot face în cazul exemplului 1.7 (de pildă prin simulare analogică) evidențiază următorul fapt remarcabil: oscilația întreținută

$$Du_{1(2)}(t) = 1,5 \sin t$$

este *stabilă* în sensul că după orice perturbare, de scurtă durată, fie prin scăderea fie prin creșterea amplitudinii în intervalul (0,825, 2,5) urmează, în timp, revenirea naturală la oscilația întreținută menționată. Nu același lucru se constată în cazul celorlalte două oscilații întreținute (de amplitudine 0,83 și 2,5), deoarece chiar dacă, în mod adecvat și pentru o durată oarecare, există în sistem oricare din cele două oscilații, după o perturbare oricât de mică și de durată scurtă (intempestivă dar și inevitabilă în orice experiment) nu mai urmează revenirea la oscilația întreținută anterioară perturbării, ci îndepărtarea de aceasta. Se poate afirma că oscilațiile întreținute

$$Du_{1(1)}(t) = 0,83 \sin t, \quad Du_{1(3)}(t) = 2,5 \sin t$$

sunt *instabile*.

Consistent cu aceste constatări, experimentele mai relevă și corelația logică între natura oscilațiilor întreținute și natura punctului de echilibru  $Dy=0$ ,  $Dv=0$ ,  $Du=0$ . Concret, punctul de echilibru are caracter stabil deoarece oscilația întreținută de amplitudinea cea mai mică este instabilă. Cu alte cuvinte, după perturbarea stării de echilibru, de scurtă durată, prin creșterea amplitudinii în intervalul (0, 0,83), urmează, în timp, revenirea naturală la punctul de echilibru, tocmai din cauza instabilității oscilației  $Du_{1(1)}(t)$ .

Aceste constatări de ordin experimental precum și *corelația dintre natura punctului de echilibru și natura oscilațiilor întreținute* justifică un studiu mai amănunțit al oscilațiilor întreținute din punctul de vedere al stabilității.

a. *Oscilații limită*

Se presupune că în sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.11 s-a instalat un regim de oscilații întreținute și că, într-un mod oarecare, este posibilă perturbarea de scurtă durată în sensul scăderii sau creșterii, între anumite limite, a amplitudinii. În funcție de evoluția în timp a sistemului, ulterioară perturbării, se disting următoarele trei cazuri.

**Definiția 2**

Oscilația întreținută se numește *limită stabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atât în sensul scăderii cât și al creșterii amplitudinii, ambele suficient de mici, urmează revenirea, în timp, la oscilația întreținută precedentă perturbării.  $\square$

**Definiția 3**

Oscilația întreținută se numește *limită instabilă* dacă după perturbarea de scurtă durată, atât în sensul scăderii cât și al creșterii amplitudinii, ambele oricât de mici, urmează îndepărtarea, în timp, de oscilația întreținută precedentă perturbării.  $\square$

**Definiția 4**

Oscilația întreținută se numește *limită semistabilă*, adică *stabilă (instabilă) la stânga și instabilă (stabilă) la dreapta*, dacă după perturbarea de scurtă durată, în sensul scăderii suficient (oricât) de mici și al creșterii oricât (suficient) de mici a amplitudinii, urmează revenirea (îndepărtarea) și respectiv îndepărtarea (revenirea), în timp, la (de) și de (la) oscilația întreținută precedentă perturbării.  $\square$

Atributul *limită* utilizat în aceste trei definiții se justifică prin aceea că oscilațiile întreținute constituie o limită pentru  $t \rightarrow +\infty$  a procesului evolutiv declanșat de perturbarea de scurtă durată a respectivelor oscilații.

b. *Regula lui Loeb*

Pentru a formula o condiție privitoare la stabilitatea oscilațiilor întreținute se poate utiliza procedeul celor două locuri.

O oscilație întreținută (1.29), oricare ar fi natura ei, se caracterizează prin perechea  $A_0 > 0$ ,  $w_0 > 0$ , soluție a ecuației balanței armonice (1.32). O perturbare a ei, la  $t = 0$ , are ca efect variația amplitudinii de la  $A_0$  la  $A_0 + DA$  și a pulsației de la  $w_0$  la  $w_0 + DW$ . Apare astfel o nouă oscilație care nu mai este riguros periodică deoarece este afectată de o amortizare  $Z$ , pozitivă sau negativă. Expresia acestei oscilații, la nivelul fundamentalei, este:

$$Du_1(t) = (A_0 + DA)e^{-Zt} \sin(w_0 + DW)t = \text{Im}(A_0 + DA)e^{-Zt} e^{j(w_0 + DW)t}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (1.36)$$

Conform definițiilor 2 și 3 și relației (1.36), oscilația întreținută este:

$$\bullet \text{ limită stabilă } \text{dacă} \quad DAZ > 0 \quad (1.37)$$

și

$$\bullet \text{ limită instabilă } \text{dacă} \quad DAZ < 0. \quad (1.38)$$

Pentru a converti condițiile (1.37) și (1.38) în niște condiții utilizabile practic se pornește de la faptul că înainte de perturbare era satisfăcută ecuația (1.32), adică:

$$N(A_0)G(jw_0) + 1 = 0, \quad (1.39)$$

și că după perturbare, pentru  $|DA|$ ,  $|DW|$  și  $|Z|$  suficient de mici și corespunzător relației (1.36), are loc:

$$N(A_0 + DA)G[j(w_0 + Dw + jz)] + 1 = 0. \quad (1.40)$$

Împărțind în (1.40) prin  $N(A)$  și separând apoi părțile reală și imaginară se obține:

$$X(A_0 + DA, w_0 + Dw + jz) + jY(A_0 + DA, w_0 + Dw + jz) = 0, \quad (1.41)$$

în care:

$$X(A, w) = -N_{iR}(A) + G_R(w), \quad Y(A, w) = -N_{iI}(A) + G_I(w), \quad (1.42)$$

$$N_{iR}(A) = \operatorname{Re} N_i(A), \quad N_{iI}(A) = \operatorname{Im} N_i(A), \quad (1.43)$$

$$G_R(w) = \operatorname{Re} G(jw), \quad G_I(w) = \operatorname{Im} G(jw). \quad (1.44)$$

În ipoteza că funcțiile  $X(A, w)$  și  $Y(A, w)$  sunt derivabile în  $(A_0, w_0)$  se poate aplica în (1.41) formula lui Taylor, ceea ce conduce la:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_0} DA + \left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)_{w_0} (Dw + jz) + j \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_0} DA + \left(\frac{\partial Y}{\partial w}\right)_{w_0} (Dw + jz) = 0, \quad (1.45)$$

în care s-a ținut seama că ecuației (1.39), cu (1.42) – (1.44) îi corespunde ecuația:

$$X(A_0, w_0) + jY(A_0, w_0) = 0.$$

Efectuând calculele în (1.45), anulând părțile reală și imaginară și apoi eliminând  $Dw$  între ecuațiile obținute se ajunge la:

$$S_0 DA = \left[ \left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)_{w_0}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial w}\right)_{w_0}^2 \right] z, \quad (1.46)$$

în care:

$$S_0 = \left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_{A_0} \left(\frac{\partial Y}{\partial w}\right)_{w_0} - \left(\frac{\partial X}{\partial w}\right)_{w_0} \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_{A_0}. \quad (1.47)$$

Conform condițiilor (1.37), (1.38) și relației (1.46) oscilația întreținută este limită stabilă dacă  $S_0 > 0$  și limită instabilă dacă  $S_0 < 0$ . Aceste afirmații rămân valabile și pentru  $DA \rightarrow 0, Dw \rightarrow 0, z \rightarrow 0$ .  $S_0$ , cu (1.42) – (1.44), are expresia:

$$S_0 = \left(\frac{dG_R}{dw}\right)_{w_0} \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} - \left(\frac{dG_I}{dw}\right)_{w_0} \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0}, \quad (1.48)$$

ceea ce permite să se formuleze următorul enunț.

### Regula 2 (Loeb)

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea  $(A_0, w_0)$ , soluție a ecuației (1.32), este:

- limită stabilă dacă  $S_0 > 0$ ;
- limită instabilă dacă  $S_0 < 0$ ;
- limită semistabilă dacă  $S_0 = 0$ . □

Aplicarea acestei reguli presupune calculul expresiei (1.48). O posibilitate de evitare a calculului celor patru derivate din (1.48) se bazează pe observația că produsul vectorial al vectorilor:

$$\bar{v}_G = \left(\frac{dG_R}{dw}\right)_{w_0} \bar{i} + \left(\frac{dG_I}{dw}\right)_{w_0} \bar{j}, \quad \bar{v}_N = \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0} \bar{i} + \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} \bar{j},$$

ținând seama de (1.48), este:



$$\bar{v}_G \times \bar{v}_N = |\bar{v}_G| \cdot |\bar{v}_N| \sin(\bar{v}_G, \bar{v}_N) \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \left(\frac{dG_R}{dW}\right)_{w_0} & \left(\frac{dG_I}{dW}\right)_{w_0} & 0 \\ \left(\frac{dN_{iR}}{dA}\right)_{A_0} & \left(\frac{dN_{iI}}{dA}\right)_{A_0} & 0 \end{vmatrix} = S_0 \bar{k},$$

unde  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$  și  $\bar{k}$  sunt versorii spațiului euclidian tridimensional.

Având în vedere că  $\bar{v}_G$  și  $\bar{v}_N$  sunt vectorii tangenți respectiv la hodografele  $G(j\omega)$  și  $N_i(A)$  în punctul lor de intersecție, caracterizat de perechea  $(A_0, w_0)$ , și că sensul pozitiv al vectorului produs vectorial se obține atunci când unghiul dintre  $\bar{v}_G$  și  $\bar{v}_N$ , măsurat în sens pozitiv (antiorar), este cuprins între 0 și  $\pi$ , regula 2 poate fi reformulată în felul următor.

### Regula 3 (Loeb)

Oscilația întreținută caracterizată prin perechea  $(A_0, w_0)$ , soluție a ecuației (1.32) și corespunzătoare unui punct de intersecție a hodografelor  $G(j\omega)$  și  $N_i(A)$ , este:

- limită stabilă dacă pornind din punctul de intersecție de-a lungul lui  $G(j\omega)$  pentru  $w$  crescător, locul  $N_i(A)$  pentru  $A$  crescător rămâne la stânga și pentru  $w$  descrescător locul  $N(A)$  pentru  $A$  descrescător rămâne la dreapta – fig.VII.16.a;
- limită instabilă dacă pornind din punctul de intersecție de-a lungul lui  $G(j\omega)$  pentru  $w$  crescător, locul  $N_i(A)$  pentru  $A$  crescător rămâne la dreapta și pentru  $w$  descrescător locul  $N(A)$  pentru  $A$  descrescător rămâne la stânga – fig.VII.16.b;
- limită semistabilă dacă în punctul de intersecție cele două locuri sunt tangente – fig.VII.16.c.  $\square$

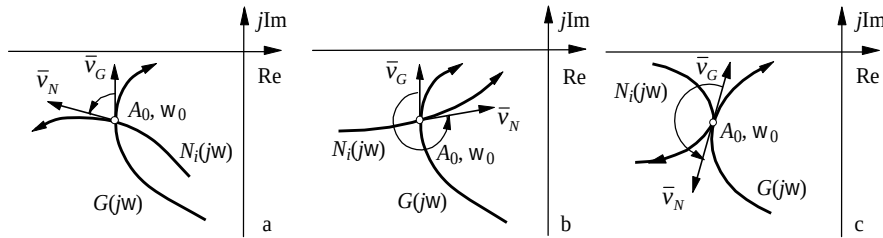


Fig. VII.16. Pentru ilustrarea regulii 3; oscilația întreținută este:  
a – limită stabilă, b – limită instabilă, c – limită semistabilă

Evident, regula 3 poate fi folosită fără nici un fel de calcule, cu condiția trasării prealabile a hodografelor  $G(j\omega)$  și  $N_i(A)$ , și constă numai în evaluarea poziției relative a celor două locuri în vecinătatea punctelor de intersecție.

### Exemplul 1.8

Se consideră sistemul automat de la exemplul 1.7. Se cere să se determine natura celor trei oscilații întreținute.

Conform fig.VII.14 și conform regulii 3 numai oscilația întreținută caracterizată de  $w_1 = 1$  și  $A_3 = 1,5$  este limită stabilă în timp ce celelalte două sunt limită instabile. Aceste constatări confirmă cele expuse în partea introductivă a acestei secțiuni și permit o

caracterizare mai detaliată a proprietăților sistemului. De exemplu dacă funcționarea sistemului are loc la oscilația limită stabilă, orice perturbare a acesteia cu  $0,83 < A < 1,5$ , este urmată de revenirea la oscilația limită stabilă. Dacă  $A < 0,83$ , atunci pentru  $t \rightarrow +\infty$ , urmează  $A \rightarrow 0$  și sistemul ajunge în punctul de echilibru  $Dy = 0$ ,  $Dv = 0$ ,  $Du = 0$ , care este stabil (în mic; a se vedea 1.3.g). Dacă  $A > 2,5$ , atunci pentru  $t \rightarrow +\infty$ , urmează  $A \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Din cele prezentate la exemplul 1.8 se trage concluzia că dacă cele două locuri au mai multe puncte de intersecție, nici unul de tangență, atunci în mod logic, natura oscilațiilor întreținute, de exemplu în ordinea crescătoare a amplitudinilor lor, este cea prezentată în fig.VII.17.a, b. Dacă există și puncte de tangență ale celor două locuri, atunci oscilațiile semistabile sunt stabile la dreapta, dacă se situează la stânga unei oscilații instabile – fig.VII.17.c, și instabile la dreapta, dacă se situează la stânga unei oscilații stabile – fig.VII.17.d.

Oscilațiile limită stabile, numite și **autooscilații**, sunt fenomene neliniare tipice. Ele nu au corespondent în cazul sistemelor automate liniare și, principial, nu pot fi produse decât în cadrul sistemelor automate neliniare.

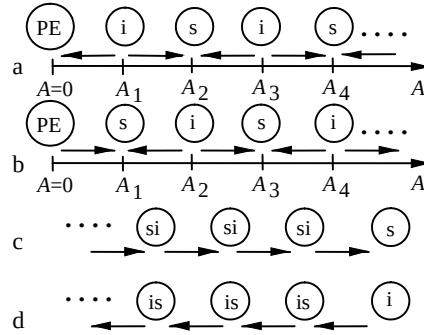


Fig.VII.17. Natura oscilațiilor întreținute: s – stabile, i – instabile, si – stabile la stânga și instabile la dreapta, is – instabile la stânga și stabile la dreapta, PE – punct de echilibru; săgețile indică sensul de evoluție a oscilațiilor

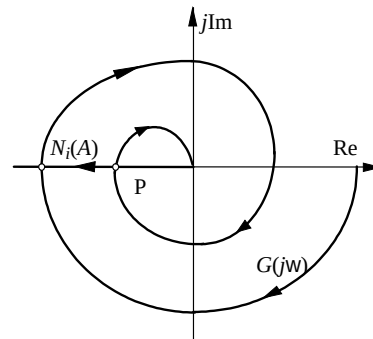


Fig.VII.18. „Defecțiunea” regulii lui Loeb în cazul punctului P

Aplicarea regulilor 2 și 3 pentru determinarea naturii oscilațiilor întreținute trebuie să se facă cu circumspecție deoarece se pot obține rezultate eronate în cazul punctelor de intersecție ale celor două locuri situate în interiorul spiralei locului de transfer  $G(jw)$ . Un exemplu concludent în acest sens este acela pentru care neliniaritatea este un releu bipozițional (ideal) și partea liniară, BIBO-stabilă, este de forma  $G(s) = (s^7 + a_1 s^6 + a_2 s^5 + \dots + a_7)^{-1}$ . Folosind procedeul celor două locuri, fig.VII.18, și aplicând regula 3, rezultă că cele două oscilații întreținute sunt ambele limită stabile, ceea ce nu este plauzibil. În realitate, așa cum arată rezultatele obținute prin simulare, oscilația întreținută corespunzătoare punctului P din fig.VII.18 este limită semistabilă (stabilă la stânga și instabilă la dreapta).

Explicația „defecțiunii” regulii lui Loeb în cazul punctului P (fig.VII.18) este că la formularea acestei reguli nu s-au avut în vedere și punctele de intersecție situate în interiorul spiralei locului de transfer  $G(jw)$ . Cu acest prilej mai trebuie remarcat că dacă ipoteza 4<sup>o</sup> de la 1.1.a nu este satisfăcută sau dacă în sistem apar oscilații întreținute de pulsații mult mai mici ca pulsația de tăiere a părții liniare, atunci rezultatele care se obțin cu ajutorul ecuației balanței armonice (1.32) pot fi afectate de erori importante.

### 1.3. Stabilitatea punctului de echilibru

#### a. Preliminarii

La exemplul 1.8, în corelație cu natura oscilațiilor întreținute și prin extensie contextuală, s-a afirmat că punctul de echilibru este stabil.

Comparativ cu BIBO-stabilitatea (definită la II.6.1) utilizarea termenului de stabilitate în conexiune cu punctul de echilibru are o semnificație fenomenologică diferită.

Pentru stabilirea unui cadru riguros în scopul examinării **stabilității punctului de echilibru** este necesară o abordare adecvată în domeniul timpului.

Fie un sistem dinamic neliniar descris de următoarea ecuație diferențială:

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1.49)$$

în care  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  și vectorul  $x$  definește starea sistemului. Sistemului (1.49) i se asociază starea inițială:

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbf{R}_+. \quad (1.50)$$

Se admite că  $f$  este continuă și lipschitziană (adică  $\|f(y_1) - f(y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$ ,  $L > 0$ ,  $y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n$ ), respectiv că problema Cauchy (1.49), (1.50) admite soluția unică:

$$x(t) = j(t; t_0, x_0), \quad t \geq t_0, \quad (1.51)$$

care definește traiectoria sistemului în  $\mathbf{R}^n$  corespunzătoare stării inițiale (1.50).

#### Definiția 5

Starea  $x = a = \text{constant}$  se numește *punct de echilibru* al sistemului (1.49) dacă:

$$f(a) = 0. \quad \square \quad (1.52)$$

Noțiunea de punct de echilibru are semnificație fizică evidentă deoarece într-un astfel de punct viteza stării este nulă (pentru  $x = a$  din (1.52) și (1.49) rezultă  $\dot{x} = 0$ ), traiectoria corespunzătoare reducându-se la un punct.

#### Exemplul 1.9

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.11, cu  $G(p)$  de forma (1.23),  $a_n \neq 0$  și  $m < n$  (în concordanță cu ipoteza 4° de la 1.1.a). Se cere să se determine ecuația de forma (1.49) care descrie acest sistem.

Ecuațiile (1.27) pot fi scrise și sub forma:

$$Dy = G(p)Df(-Dy).$$

În ipoteza  $m < n$  (fără a reduce generalitatea se consideră  $m = n - 1$ , urmând ca valoarea efectivă a lui  $m$  să fie dată de indicele primului coeficient nenul din șirul  $b_{n-1}, \dots, b_0$ ), cu notațiile:  $a_k = a_{n-k}/a_n$ ,  $b_k = b_{n-k}/a_n$ ,  $k = \overline{1, n}$ , și ținând seama de (1.23) se pot defini următoarele variabile de stare:

$$x_1 = Dy$$

$$x_2 = px_1 + a_1x_1 - b_1Df(-x_1)$$

$$\text{-----}$$

$$x_n = px_{n-1} + a_{n-1}x_1 - b_{n-1}Df(-x_1).$$

Înlocuind  $x_1, \dots, x_n$  în ecuația sistemului rezultă:

$$p x_n = -a_n x_1 + b_n Df(-x_1).$$

Explicitând acum  $\dot{x}_i = p x_i, i = \overline{1, n}$ , din relațiile de mai sus se obține ecuația diferențială:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 x_1 + b_1 Df(-x_1) + x_2 \\ -a_2 x_1 + b_2 Df(-x_1) + x_3 \\ \vdots \\ -a_n x_1 + b_n Df(-x_1) \end{bmatrix}.$$

Întrucât  $Df(0) = 0$  rezultă că punctul de echilibru al acestui sistem este  $x = 0$  (respectiv  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ ) și, cu referire la ecuațiile (1.27),  $Dy = 0, Dv = 0, Du = 0$ .  $\square$

### Definiția 6

Punctul de echilibru  $x = a$  al sistemului (1.49) se numește *stabil* dacă pentru orice  $\epsilon > 0$  există  $\delta > 0$  astfel încât  $\|x_0 - a\| < \delta$  implică  $\|x(t) - a\| < \epsilon, t \geq t_0$ . Punctul de echilibru  $x = a$  se numește *global stabil* dacă el este stabil pentru orice  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

### Definiția 7

Punctul de echilibru  $x = a$  al sistemului (1.49) se numește *asimptotic stabil* dacă el este stabil și  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - a\| = 0$ . Punctul de echilibru  $x = a$  se numește *global asimptotic stabil* dacă el este asimptotic stabil pentru orice  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

### Definiția 8

Punctul de echilibru  $x = a$  al sistemului (1.49) se numește *instabil* dacă el nu este stabil. Punctul de echilibru  $x = a$  se numește *global instabil* dacă el este instabil pentru orice  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

Din definițiile 6 și 7 rezultă că stabilitatea asimptotică implică stabilitatea. Distincția necesară în acest context este următoarea: punctul de echilibru se numește *simpu stabil* (sau *neutral stabil*) dacă el este stabil dar nu este asimptotic stabil.

Trebuie de asemenea remarcat că în cazul utilizării atributului *global*, în mod necesar punctul de echilibru  $x = a$  este *unic*.

S-a arătat că soluția (1.51) definește traiectoria sistemului (1.49) în  $\mathbf{R}^n$  corespunzătoare stării inițiale (1.50). În cazul  $n = 2$  reprezentarea traiectoriei se face în planul stărilor, fiind posibilă o interpretare geometrică simplă a definițiilor 6 – 8. Pentru  $a = 0$  inegalitățile  $\|x\| < \epsilon$  și  $\|x\| < \delta$ , în care  $\|\cdot\|$  este de exemplu norma euclidiană, au ca imagini discuri mărginite de cercurile  $C_\epsilon, C_\delta$ , cu centrul în origine și de raze  $\epsilon, \delta$ , fig.VII.19.

Evoluția are loc datorită perturbării (P, fig.VII.19) sistemului din punctul de echilibru  $x = 0$  prin alocarea, într-un mod oarecare, la  $t = t_0$ , a stării inițiale  $x_0$ .

Dacă originea planului stărilor este un *punct de echilibru stabil* al sistemului (1.49), atunci *oricare* ar fi cercul  $C_\epsilon$ , există în interiorul său un cerc  $C_\delta$ , astfel încât *orice* traiectorie care pornește din interiorul lui  $C_\delta$  rămâne în interiorul lui  $C_\epsilon$  – fig.VII.19.a.

Dacă originea planului stărilor este un *punct de echilibru asimptotic stabil* al sistemului (1.49), atunci orice traiectorie care pornește din interiorul lui  $C_\delta$  rămâne în  $C_\epsilon$  și în plus ea converge, în timp, către origine – fig.VII.19.b.

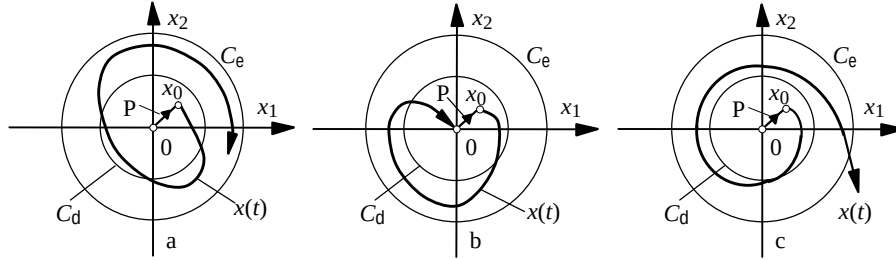


Fig. VII.19. Interpretarea geometrică a definițiilor 6 – 8; P – perturbarea stării de echilibru  $x = 0$ , la  $t = t_0$ , prin alocarea stării inițiale  $x_0$ ; punctul de echilibru este: a – stabil (neutral), b – asimptotic stabil, c – instabil

O comportare contrară a ceea ce din fig. VII.19.a, respectiv există un  $C_e$  astfel încât pentru orice  $C_d$  există o traiectorie care pornește din interiorul lui  $C_d$  și nu rămâne în interiorul lui  $C_e$ , arată că originea este un *punct de echilibru instabil* al sistemului (1.49) – fig. VII.19.c.

O examinarea comparativă a noțiunilor introduse prin definițiile 6 – 8 conduce la constatarea că, din punct de vedere calitativ – practic, situația cea mai avantajoasă (dezirabilă) este ca *punctul de echilibru să fie global asimptotic stabil*.

#### b. Cazul sistemelor liniare

Pentru a investiga natura structural – parametrică a noțiunii de stabilitate asimptotică și pentru determinarea unei conexiuni cu BIBO-stabilitatea se analizează în continuare cazul sistemelor liniare.

Se consideră sistemul (1.49) particularizat sub forma:

$$\dot{x} = Ax, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1.53)$$

în care  $A$  este o matrice pătratică de ordinul  $n$ , cu elemente reale constante.

Sistemul (1.53) are ca punct de echilibru  $x = 0$ .

Fie  $D(s) = \det(I_n s - A)$  polinomul caracteristic al matricei  $A$  ( $I_n$  este matricea unitate de ordinul  $n$ ) și fie  $l_i, i = \overline{1, r}$ , valorile proprii distincte ale matricei  $A$ , fiecare de multiplicitate  $q_i$ , cu  $\sum_{i=1}^r q_i = n$ . Se știe că valorile proprii sunt zerourile polinomului caracteristic.

#### **Teorema 2**

Punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (1.53) este global asimptotic stabil dacă și numai dacă toate valorile proprii ale matricei  $A$  sunt situate în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

☞ Pentru a obține soluția problemei (1.53), (1.50), cu  $t_0 = 0$ , se aplică ecuației (1.53) transformarea Laplace cu condiția inițială (1.50). Se obține:

$$X(s) = -(I_n - A)^{-1} x_0 = -\frac{1}{D(s)} \text{adj}(I_n s - A) x_0.$$

Revenind la domeniul timpului (conform teoremei dezvoltării, Anexa A.1.2.b) rezultă:

$$x(t) = -\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{1}{(q_i - j)!} A_{ij} t^{q_i-j} e^{l_i t} x_0, \quad t \geq 0, \quad (1.54)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left[ (s - l_i)^{q_i} (I_n s - A)^{-1} \right] \right\}_{s=l_i}, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, q_i}.$$

În conformitate cu definiția 7 punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (1.53) este global asimptotic stabil dacă și numai dacă  $\operatorname{Re} l_i < 0$ ,  $i = \overline{1, r}$ .  $\square$

**Exemplul 1.10** (legătura dintre stabilitatea asimptotică și BIBO-stabilitate)

Pentru a examina posibila legătură între stabilitatea asimptotică și BIBO-stabilitatea unui sistem liniar și pentru simplificarea expunerii se consideră sistemul de la exemplul 1.9 în care  $Df(-Dy) \equiv 0$ . În această situație este activă numai partea liniară reprezentată de  $G(p)$  (relația (1.23) – raportul a două polinoame relativ prime între ele) care este la originea ecuației diferențiale (1.53) în care:

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

este o matrice de tip Frobenius.

Potrivit teoremei 2 stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru  $x = 0$  este echivalentă cu  $\{vp\} \subset \{\operatorname{Re} s < 0\}$ , unde  $\{vp\}$  este mulțimea valorilor proprii ale matricei  $A$ , care sunt de fapt zerourile polinomului caracteristic  $D(s) = \det(I_n s - A)$ . Se demonstrează relativ ușor că pentru  $A$  de tip Frobenius se obține  $D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ .

Pe de altă parte se știe (teorema 2 de la II.6.2) că BIBO-stabilitatea sistemului descris de  $G(s)$  (din care provine  $G(p)$ ) este echivalentă cu  $\{p\} \subset \{\operatorname{Re} s < 0\}$ , unde  $\{p\}$  este mulțimea polilor lui  $G(s)$ . Din (1.23) rezultă că polinomul (monic al) polilor este  $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$ ,  $a_i = a_{n-i} / a_n$ ,  $i = \overline{1, n}$  (notații introduse la exemplul 1.9).

Întrucât în acest caz  $D(s) \equiv p(s)$  se trage concluzia că *stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru este echivalentă cu BIBO-stabilitatea sistemului*.

În cazul general se demonstrează că  $\{p\} \subseteq \{vp\}$  ceea ce permite să se afirme că stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru implică BIBO-stabilitatea sistemului. Evident implicația inversă este adevărată numai dacă  $\{p\} = \{vp\}$ .  $\square$

*c. Stabilitatea asimptotică în primă aproximație*

Fie un sistem dinamic neliniar descris de ecuația (1.49) în care se pot separa un termen liniar și un termen neliniar, de forma:

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (1.55)$$

unde  $g(x)$  este o funcție neliniară, continuă, cu  $g(0) = 0$ .

Sistemul (1.55) are punctul de echilibru  $x = 0$ . Pentru orice alt punct de echilibru  $x = a \neq 0$  cu  $Aa + g(a) = 0$ , se face translația  $\tilde{x} = x - a$ . Ecuația (1.55) devine:  $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{g}(\tilde{x})$  cu  $\tilde{g}(\tilde{x}) = Aa + g(\tilde{x} + a)$ , care are punctul de echilibru  $\tilde{x} = 0$ .

Ecuația (1.53), cu același punct de echilibru ( $x = 0$ ), este *aproximanta liniară* a ecuației (1.55). Soluția sistemului (1.53), cu condiția inițială (1.50) și  $t_0 = 0$ , are forma:

$$x(t) = X(t)x_0, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad (1.56)$$

în care  $X(t)$  este matricea fundamentală a sistemului (1.53), cu  $\det X(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ , a cărei expresie analitică poate fi lesne identificată în (1.54).

În ipoteza că aproximanta liniară (1.53) are punctul de echilibru asimptotic stabil, există constantele  $N > 0$  și  $a > 0$  astfel încât:

$$\|X(t)\| \leq N e^{-at}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (1.57)$$

De exemplu, cu notațiile  $A_0 = \max_{i,j} \|A_{ij}\|$ ,  $a = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i$  și  $q = \max_i q_i$ , cele două constante se pot alege după cum urmează: pentru  $q = 1$ ,  $N = A_0 n$  și  $a = -a$ ; pentru  $q > 1$ ,  $N = [-(q-1)e^{-1}(a+a)^{-1}]^{q-1} A_0 q r$ ,  $0 < a < -a$ .

Din (1.56) și (1.57) urmează că pentru soluția aproximantei liniare (1.53) se poate scrie:

$$\|x(t)\| \leq N \|x_0\| e^{-at}, \quad t \in \mathbf{R}_+. \quad (1.58)$$

Acest rezultat prilejuiește particularizarea definiției 7 sub forma următoare.

### Definiția 9

Punctul de echilibru  $x = a$  al sistemului (1.49) se numește *exponențial asimptotic stabil* dacă el este stabil și există  $N > 0$  și  $a > 0$  astfel încât soluția (1.51) satisface inegalitatea  $\|x(t) - a\| \leq N e^{-a(t-t_0)}$ ,  $t \geq t_0$ . Punctul de echilibru se numește *global exponențial asimptotic stabil* dacă el este exponențial asimptotic stabil pentru orice  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ .  $\square$

În mod evident stabilitatea exponențial asimptotică implică stabilitatea asimptotică. Implicația inversă nu are loc în general. În cazul sistemului liniar (1.53), pe baza inegalității (1.58), rezultă că stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru  $x = 0$  este echivalentă cu stabilitatea exponențial asimptotică globală a respectivului punct.

Cu aceste elemente pregătitoare se poate formula următorul rezultat privitor la sistemul (1.55) și la aproximantul liniar (1.53)

### Teorema 3 (Poincaré - Liapunov)

Sistemul (1.55) satisface următoarele ipoteze:

1° Punctul de echilibru  $x = 0$  al aproximantului liniar (1.53) este exponențial asimptotic stabil.

2°  $g(x)$  satisface inegalitatea  $\|g(x)\| \leq L \|x\|$  cu  $L > 0$ , suficient de mic.

Atunci punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (1.55) este exponențial asimptotic stabil.

☞ Pentru  $t_0 = 0$  aplicând metoda variației constantelor în (1.55) cu (1.56) se obține:

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(q)g(x(q))dq, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Trecând la norme în această ecuație și ținând seama de (1.58) și ipotezele 1° și 2° rezultă:

$$\|x(t)\| \leq N \|x_0\| e^{-at} + LN \int_0^t e^{-a(t-q)} \|x(q)\| dq, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Se înmulțește această inegalitate cu  $e^{at}$  și se introduc notațiile:  $y(t) = \|x(t)\| e^{at}$ ,  $M = N \|x_0\|$  și  $a = LN$ . Se obține:  $y(t) \leq M + a \int_0^t y(q) dq$  Înmulțind cu  $a$  și făcând notația

$z(t) = \int_0^t y(q) dq$  se ajunge la inegalitatea diferențială:  $\dot{z}(t) \leq az + Ma$ . Integrând de la 0 la  $t$  cu  $z(0) = 0$  rezultă  $z(t) \leq Me^{at} - M$ . Revenind la funcția  $y(t)$  (prin înlocuirea lui  $z(t)$ ) și ținând seama de inegalitatea pe care acesta o satisface, după calcule elementare se obține:  $y(t) \leq Me^{at}$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ . Înlocuind acum  $y(t)$ ,  $M$  și  $a$  se constată că soluția sistemului (1.55) satisface inegalitatea:  $\|x(t)\| \leq N\|x_0\|e^{-(a-L/N)t}$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$ . Pentru  $L < a/N$  rezultă că punctul de echilibru  $x = 0$  al sistemului (1.55) este exponențial asimptotic stabil.  $\square$

#### d. Regula lui Kochenburger

În cazul sistemelor automate cu neliniarități care realizează  $Dv = 0$  pentru  $Du \in (-a, a)$  sau  $Du \in [-a, a]$ ,  $a > 0$ , cum sunt releul, zona de insensibilitate și jocul în angrenaje ( $a$  se concretizează respectiv conform fig.VII.1, fig.VII.2.b și d), toate punctele intervalului  $(-a, a)$  (sau  $[-a, a]$ ) pot fi puncte de echilibru. Ele constituie o *zonă de echilibru* și prin convenție se tratează de regulă ca un punct de echilibru unic.

Existența unor oscilații întreținute într-un sistem automat neliniar arată că punctul de echilibru (dacă există) nu este global asimptotic stabil. În acest context procedeul celor două locuri, prin analogie cu cazul sistemelor automate liniare, permite o extensie naturală a criteriului de stabilitate Nyquist pentru cazul sistemelor automate neliniare. Comparativ cu acesta (teorema 7 de la VI.4.2.a), aici rolul *punctului critic*  $(-1, j0)$  este jucat de locul de descriere invers negativ  $N_i(A)$ . Din acest motiv  $N_i(A)$  se mai numește **locul critic**.

#### Regula 5 (Kochenburger)

Punctul de echilibru (unic)  $Dy=0$ ,  $Dv=0$ ,  $Du=0$  al sistemului automat în forma standard (fig.VII.11) este global asimptotic stabil dacă la parcurgerea locului de transfer  $G(jw)$ , în sensul crescător al lui  $w$ , locul critic  $N_i(A)$  rămâne la stânga și complet în afara locului  $G(jw)$ .  $\square$

#### e. Aplicație: sistem automat de poziționare

Pentru sistemul automat de poziționare de la VI.4.2.b, în ipoteza liniarității, s-a adoptat un regulator PDT1 care asigură o BIBO-stabilitate relativă satisfăcătoare. În sistemul real se pot identifica ușor unele neliniarități accidentale. Dintre acestea jocul în angrenaje (care este prezent în reductorul  $R_m$ , fig.VI.35) poate influența negativ stabilitatea. Se cere să se evalueze efectul acestei neliniarități asupra stabilității punctului de echilibru.

Sistemul automat are o zonă de echilibru pentru  $|Dq| \leq 2q_e$  ( $q$  este unghiul axului servomotorului – fig.VI.35;  $q_e$  este semi-jocul în angrenaje și are semnificația lui  $e$  din fig.VII.2.d). Datorită componentei  $I$  existente în  $G(s)$  (polul  $s = 0$ ) este posibilă realizarea condițiilor  $\dot{q} = 0$  (axul servomotorului în repaus),  $e = 0$ ,  $e_u = e_y$  și  $u = y$  care definesc situația de echilibru. Din acest motiv zona de echilibru poate fi tratată ca un punct de echilibru unic.

Funcția de descriere a neliniarității de tip joc în angrenaje, cu notațiile din fig.VII.2.d (adică pentru  $q_e = e$ ), are expresia:

$$N(A) = \frac{k}{p} \left[ \frac{p}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2e}{A} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2e}{A} \right) \sqrt{\frac{e}{A} - \frac{e^2}{A^2}} + j4 \left( \frac{e^2}{A^2} - \frac{e}{A} \right) \right], \quad A \geq e.$$



Conform tabelului:

|               |             |              |              |              |              |              |
|---------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $A/e$         | 1           | 1,25         | 1,66         | 2,5          | 5            | $+\infty$    |
| $ N(A) /k$    | 0           | 0,322        | 0,576        | 0,695        | 0,775        | 1            |
| $\arg N(A)$   | $-90^\circ$ | $-38^\circ$  | $-32^\circ$  | $-26^\circ$  | $-15^\circ$  | $0^\circ$    |
| $k N_i(A) $   | $+\infty$   | 3,1          | 1,74         | 1,44         | 1,29         | 1            |
| $\arg N_i(A)$ | $-90^\circ$ | $-142^\circ$ | $-148^\circ$ | $-154^\circ$ | $-165^\circ$ | $-180^\circ$ |

și conform fig.VI.41 hodografele  $N_i(A)$  și  $G(j\omega)$  ( $\equiv G_{d2}(j\omega)$ ) au formele din fig.VII.20. Întrucât raportul de transmisie  $k_2$  al reductorului  $R_m$  a fost inclus în  $G(s)$ , se consideră  $k = 1$ , ceea ce corespunde situației în care locul critic  $N_i(A)$  trece prin punctul  $-1+j0$ . Conform regulei 4 punctul de echilibru este global asimptotic stabil. Dacă raportul de transmisie crește, și anume de  $k$  ori, atunci locul critic  $N_i(A)$  se deplasează omotetic spre dreapta, ajungându-se, pentru  $k = 2$ , la un punct de tangență între hodografele  $N_i(A)$  și  $G(j\omega)$ . Se trage concluzia că punctul de echilibru este global asimptotic stabil pentru  $0 < k < 2$ . Pentru  $k \geq 2$  în sistemul automat apar oscilații întreținute; de exemplu pentru  $k = 3$  oscilațiile întreținute sunt  $Du_{1(1)}(t) = 1,3e \sin 12t$  și  $Du_{1(2)}(t) = 4e \sin 19t$ , prima fiind limită instabilă și a doua – limită stabilă.

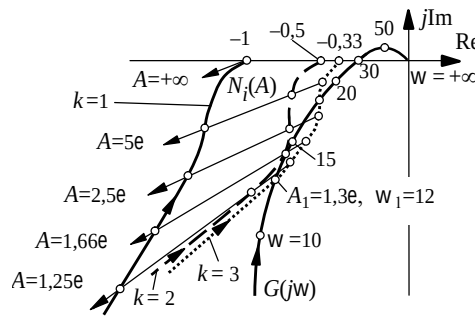


Fig.VII.20. Procedul celor două locuri în cazul sistemului automat cu neliniaritate de tip joc în angrenaje

#### f. Criteriul Bilharz

Ecuția balanței armonice (1.32) mai poate fi utilizată pentru studiul stabilității asimptotice pe baza localizării rădăcinilor în planul complex.

Ținând seama că  $G(s) = kz(s)/p(s)$ , în care  $p(s)$  și  $z(s)$  sunt respectiv polinomul polilor și polinomul zerourilor (ambele monice și relativ prime între ele), ecuația (1.32), în care se înlocuiește polinomul polilor (analogul cazului liniar):

$$p_0(s, A) = p(s) + kN(A)z(s). \quad (1.59)$$

#### Regula 6

Punctul de echilibru unic  $Dy=0$ ,  $Dv=0$ ,  $Du=0$  al sistemului automat în forma standard (fig.VII.11) este global asimptotic stabil dacă  $p_0(s, A)$  este hurwitzian pentru toți  $A \geq 0$ . □

În cazul neliniarităților multivalente  $N(A)$  este o funcție complexă, ceea ce înseamnă că polinomul (1.59) are coeficienți numere complexe. Pentru aplicarea criteriilor Hurwitz, Routh etc. au fost necesare extinderi adecvate. Se prezintă în continuare o generalizare la cazul complex a criteriului Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4).

Fie:

$$D(s) = s^n + (a_{R1} + ja_{I1})s^{n-1} + (a_{R2} + ja_{I2})s^{n-2} + \dots + (a_{Rn} + ja_{In}), \quad (1.60)$$

în care  $a_{Ri}$ ,  $a_{Ii} \in \mathbf{R}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , pentru care se definește matricea Bilharz de ordinul  $2n$ :

$$B_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & -a_{R6} & -a_{I7} & \dots \\ 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & a_{I6} & -a_{R7} & \dots \\ 0 & 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & -a_{R6} & \dots \\ 0 & 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & a_{I6} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & a_{I1} & -a_{R2} & -a_{I3} & a_{R4} & a_{I5} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{R1} & a_{I2} & -a_{R3} & -a_{I4} & a_{R5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

în care  $a_{Ri} = a_{Ii} = 0$  pentru  $i > n$ .

**Teorema 4** (Bilharz)

Polinomul (1.60) este hurwitzian dacă și numai dacă:

$$\det B_{2k} > 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.62)$$

O extindere similară s-a dat și metodei locului rădăcinilor (cap. V). Utilizarea ei este limitată datorită complicațiilor pe care le introduce dependența zerourilor polinomului (1.59) de amplitudinea  $A$ .

**Exemplul 1.11** (sistem automat de poziționare; continuare)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.11 în care neliniaritatea este un releu tripozițional cu histerezis (fig.VII.1) și  $G(s) = 1/[s(s+1)]$ . Acesta este un; o simplă comparație cu sistemul de la VI.4.2.b, în care regulatorul este releul (realizabil cu amplificator operațional) și parametrii părții liniare au valori adecvate, confirmă acest fapt. Se cere să se determine parametrii releului pentru care punctul de echilibru este global asimptotic stabil.

Conform fig.VII.1 sistemul are zona de echilibru  $|Du| < a$ . Datorită polului  $s = 0$ , existent în  $G(s)$ , este posibilă realizarea condițiilor  $Dv = 0$ ,  $D\dot{u} = 0$  (axul servomotorului în repaus) ceea ce permite tratarea zonei de echilibru ca punct de echilibru unic.

Funcția de descriere a fost determinată la exemplul 1.1. Cu (1.59),  $p_0(s, A) = s^2 + s + a - jb$ ,

în care  $a = 2ab(\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2})/(pA^2)$ , cu  $A \geq a$ , și  $b = 2ab(1 - q)/(pA)^2$ . Matricea Bilharz (1.61) asociată polinomului  $p_0(s, A)$  are forma:

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$$

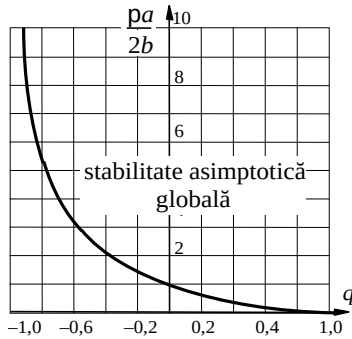


Fig.VII.21. Domeniul de stabilitate asimptotică globală la exemplul 1.11

și conform condiției (1.62) rezultă  $\det B_2 = 1$  și  $\det B_4 = a - b^2 > 0$ . Înlocuind  $a$  și  $b$ , din ultima inegalitate rezultă în mod evident:

$$\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2} > 2ab(1-q)^2/(pA^2)$$

care trebuie să aibă loc pentru orice  $A \geq a$ . Întrucât expresia  $A^2(\sqrt{A^2/a^2 - 1} + \sqrt{A^2/a^2 - q^2})$  este monoton crescătoare pentru  $A \geq a$ , rezultă că ultima inegalitate are loc pentru orice  $A \geq a$  dacă și numai dacă ea are loc pentru  $A = a$ . Aceasta conduce la rezultatul:

$$pa/2b > (1-q)\sqrt{(1-q)/(1+q)}, \quad |q| \neq 1.$$

Domeniul de stabilitate asimptotică corespunzător este reprezentat în fig.VII.21. □

#### g. Stabilitatea asimptotică în mic

În situația în care într-un sistem automat neliniar există oscilații întreținute, în funcție de natura celei mai apropiate de punctul de echilibru  $Dy=0$ ,  $Dv=0$ ,  $Du=0$  (adică  $A = 0$ ), respectiv a celei de amplitudinea  $A_1 > 0$  cea mai mică, se pot face următoarele afirmații:

- 1<sup>o</sup> Punctul de echilibru este **instabil** dacă oscilația de amplitudinea  $A_1$  este limită stabilă sau limită stabilă la stânga – fig.VII.17.b,c.
- 2<sup>o</sup> Punctul de echilibru este **asimptotic stabil** (se spune și *în mic*, adică pentru  $0 < A < A_1$ ) dacă oscilația de amplitudinea  $A_1$  este limită instabilă sau limită instabilă la stânga – fig.VII.17.a,d.

În ambele cazuri amplitudinea  $A_1$  se determină prin procedeul celor două locuri (regula 1 de la 1.1.e) și natura oscilației întreținute se evaluează cu regula lui Loeb (regula 3 de la 1.2.b). În cazul 2<sup>o</sup> determinarea lui  $A_1$  corespunde domeniului  $|Du| < A_1$  pentru care punctul de echilibru este asimptotic stabil. Astfel, pentru sistemul de la exemplul 1.6 (în care, pentru existența punctului de echilibru  $Du=0$ , este formal necesar ca  $Dv = b \operatorname{sgn} 0 = 0$ ) punctul de echilibru este instabil deoarece singura oscilație întreținută este limită stabilă. În schimb, sistemul de la exemplul 1.7 are punctul de echilibru asimptotic stabil în mic și anume pentru  $|Du| < 0,83$ , deoarece oscilația întreținută de amplitudinea cea mai mică ( $A_1 = 0,83$ ) este limită instabilă. Și în cazul sistemului automat de poziționare de la punctul e, pentru  $k = 3$ , punctul de echilibru este asimptotic stabil pentru  $|Du| < 1,3e$  deoarece oscilația întreținută de amplitudinea cea mai mică ( $A_1 = 1,3e$ ) este limită instabilă (fig.VII.20).

### 1.4. Problema stabilizării

#### a. Posibilități de stabilizare

Stabilizarea sistemelor automate neliniare constă în satisfacerea regulii 4 și anume: prin deplasarea spre dreapta a hodografului  $G(j\omega)$  și / sau prin deplasarea spre stânga a hodografului  $N_i(A)$  astfel încât distanța minimă dintre acestea să asigure calități de stabilitate satisfăcătoare. Realizarea stabilizării, corespunzător afirmației precedente, constă în introducerea unor elemente de corecție liniare și / sau neliniare, plasate adecvat în schema bloc structurală, astfel încât să se producă deplasările necesare ale celor două locuri.

Soluția cea mai simplă constă în utilizarea unor elemente de corecție de tip serie. De pildă în cazul sistemului automat de poziționare de la 1.3.e, fig.VII.20, pentru cazul  $k = 3$  se poate introduce o neliniaritate, înainte de neliniaritatea de tip joc în angrenaje – fig.VII.2.d

prin care se produce o deplasare spre stânga a *locului de descriere invers negativ rezultat* astfel încât cele două locuri (locul de transfer și locul de descriere invers negativ rezultat) să nu se mai intersecteze și, mai mult, să existe între ele o distanță suficient de mare astfel încât calitatea stabilității asimptotice a punctului de echilibru să fie satisfăcătoare.

O altă soluție este prezentată în fig.VII.22, în care  $N_c(A)$  este funcția de descriere a elementului corector neliniar și  $G_{c1}(p)$ ,  $G_{c2}(p)$  corespund funcțiilor de transfer  $G_{c1}(s)$ ,  $G_{c2}(s)$  ale elementelor corectoare liniare. Conform acestei scheme (în care cele două neliniarități au aceeași mărime de intrare) ecuația balanței armonice are forma:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega)N_c(A) + G_{c1}(j\omega)G(j\omega)N(A) + 1 = 0. \quad (1.63)$$

- Dacă se adoptă  $N_c(A) = N(A)$ , atunci din (1.63) rezultă:

$$G_{c1}(j\omega)[G_{c2}(j\omega) + G(j\omega)]N(A) + 1 = 0.$$

ceea ce permite alegerea adecvată a elementelor de corecție liniare.

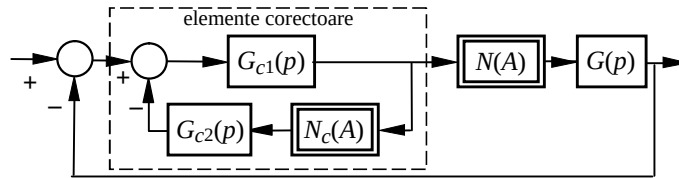


Fig.VII.22. O posibilitate de stabilizare a unui sistem automat neliniar

- Dacă se adoptă  $G_{c2}(j\omega) = G(j\omega)$ , atunci din (1.63) se obține:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega)[N_c(A) + N(A)] + 1 = 0,$$

ceea ce permite alegerea unei neliniarități adecvate.

- Dacă se adoptă  $N_c(A) = 1 - N(A)$ ,  $G_{c2}(j\omega) = G(j\omega)$ , atunci din (1.63) rezultă:

$$G_{c1}(j\omega)G_{c2}(j\omega) + 1 = 0,$$

ceea ce este echivalent cu o *compensare* a neliniarității  $N(A)$  și transformarea sistemului automat neliniar într-un sistem automat liniar. Determinarea efectivă a neliniarității de corecție se poate face cu ajutorul formulei de inversiune (1.21) de la 1.1.b.

#### b. Utilizarea diagramei Bode

Utilizarea în proiectare a *ecuației balanței armonice* și a *procedurii celor două locuri* este însoțită în primul rând de dificultăți de calcul. Având în vedere că metoda funcției de descriere este esențialmente frecvențială, orientarea spre utilizarea *diagramei Bode* atât pentru analiza stabilității cât și pentru rezolvarea problemei stabilizării este pe deplin naturală.

Pentru mai multă flexibilitate în manipularea diagramei Bode funcția de descriere se pune sub forma:

$$N(A) = k_n N_n(a), \quad a = A/a, \quad (1.64)$$

unde  $k_n$  este un coeficient de normare,  $a$  este un parametru al neliniarității,  $a$  este amplitudinea normată și  $N_n(a)$  este *funcția de descriere normată*.

Înlocuind (1.64) în (1.32) se obține:

$$N_n(A)G_n(j\omega) + 1 = 0, \quad (1.65)$$

unde:

$$G_n(j\omega) = k_n G(j\omega) \quad (1.66)$$

este răspunsul la frecvență normal al părții liniare.

Ecuția (1.65) este echivalentă cu:

$$20 \lg |G_n(j\omega)| = -20 \lg |N_n(A)| \quad (1.67)$$

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)p - \arg N_n(A), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.68)$$

Dacă neliniaritatea este univalentă, atunci  $\arg N_n(a) = 0$  și ecuația (1.68) devine:

$$\arg G_n(j\omega) = (2k+1)p, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Determinarea oscilațiilor întreținute constă în următoarele. Din diagrama Bode a părții liniare se obțin pulsațiile  $\omega_k$  pentru care  $\arg G_n(j\omega)$  ia valorile:  $-p, -3p, \dots$ , și apoi se măsoară atenuările corespunzătoare  $20 \lg |G_n(j\omega_k)|$ . În continuare se verifică dacă există valori  $a_k$  pentru care are loc (1.67), pentru  $\omega = \omega_k$ . În acest scop se reprezintă grafic funcția  $f(a) = -20 \lg |N_n(a)|$  și se determină valorile  $a_k$  pentru care  $f(a_k) = 20 \lg |G_n(j\omega_k)|$ .

Pentru realizarea corecției (stabilizării) în domeniul frecvențelor se procedează ca și în cazul sistemelor automate liniare (după cum se exemplifică la punctul c).

În cazul neliniarităților multivalente (uzual bivalente) utilizarea diagramei Bode nu facilitează rezolvarea sistemului de ecuații (1.67), (1.68). O alternativă constă în trasarea în același sistem de axe rectangulare a graficelor funcțiilor  $20 \lg |G_n(j\omega)|$  în funcție de  $\arg G_n(j\omega)$  (diagrama Nichols, utilizabilă și în cazul liniar) și  $-20 \lg |N_n(A)|$  în funcție de  $\arg N_n(A)$  și determinarea oscilațiilor întreținute pe baza punctelor de intersecție ale celor două grafice.

#### c. Aplicație: sistem de reglare automată a temperaturii

Se consideră un sistem automat de reglare a temperaturii unui cuptor, cu schema bloc structurală standard din fig.VII.11, în care  $G(s) = 0,128e^{-5s}/[s(10s+1)(5s+1)]$  și  $N(A)$  reprezintă un regulator de tip P cu limitare (a se vedea IV.1.1 și fig.IV.2, 3, VII.2.a). Conform notațiilor din fig.VII.2.a, funcția de descriere a neliniarității cu limitare este:

$$N(A) = \frac{2k}{p} [\arcsin(a/A) + (a/A)\sqrt{1-(a/A)^2}], \quad A \geq a.$$

Se cere să se stabilizeze acest sistem.

Introducând notația  $a = A/a$  și coeficientul de normare  $k_n = k = 2,5$ , se definește:

$$f(a) = -20 \log \frac{2}{p} [\arcsin(1/a) + \sqrt{1-1/a^2} / a], \quad a \geq 1,$$

al cărei grafic este reprezentat în fig.VII.23.

Răspunsul la frecvență normal are expresia:

$$G_n(j\omega) = 0,32e^{-5j\omega} / [j\omega(10j\omega+1)(5j\omega+1)]$$

și diagrama Bode este reprezentată în fig.VII.24.

Se face mai întâi o analiză a stabilității și dacă este necesar se realizează o corecție cu un element liniar conectat în serie cu  $G(s)$ .

Din fig.VII.24 rezultă  $w_1 = 0,085$  rad/sec. și  $20\lg|G_n(jw)| = 8$ . Din fig.VII.23  $f(a_1) = 8$ ; rezultă  $a_1 = 3,2$ , ceea ce înseamnă  $A_1 = 3,2a$ . Sistemul este sediul oscilației limită stabile  $Du(t) = 3,2a \sin 0,085 t$ . Ca urmare punctul de echilibru  $Dy = 0$ ,  $Dv = 0$ ,  $Du = 0$  este instabil.

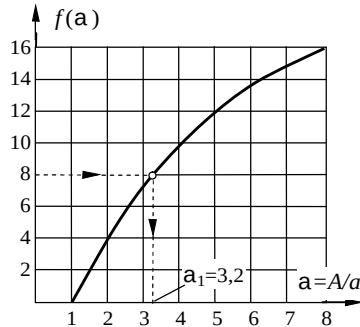
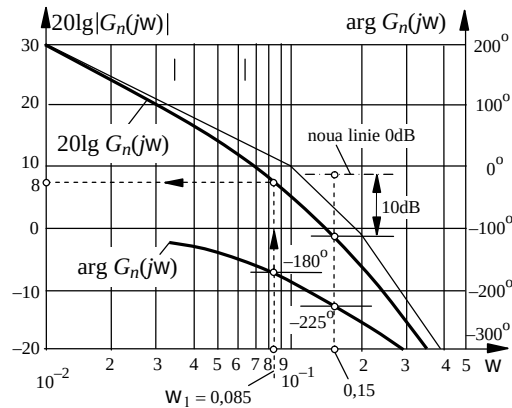
Fig.VII.23. Graficul funcției  $f(a)$ 

Fig.VII.24. Diagrama Bode la aplicația: sistem automat de reglare a temperaturii

Pentru stabilizarea sistemului automat există două posibilități:

1° Coborârea caracteristicii  $20\lg|G_n(jw)|$  sau, echivalent, ridicarea liniei de 0dB. De exemplu prin ridicarea liniei de 0dB deasupra nivelului de 8dB rezultă  $20\lg|G_n(jw_1)| < 0$ . Cum  $f(a) > 0$ , pentru  $a \geq 1$ , urmează că apariția oscilațiilor întreținute este imposibilă. Aceasta înseamnă însă reducerea amplificării  $k$ , ceea ce micșorează rapiditatea răspunsului indicial al sistemului automat.

2° Ridicarea caracteristicii  $\arg G_n(jw)$  în domeniul frecvențelor medii (zona pulsației de tăiere) astfel încât  $w_1$  să se deplaseze spre dreapta și anume într-un domeniu în care  $20\lg|G_n(jw)| < 0$ .

În cazul de față acest lucru poate fi realizat cu ajutorul unui regulator PD care la frecvențe medii asigură o ridicare a caracteristicii  $\arg G_n(jw)$  cu aproximativ  $45^\circ$  (fig.VI.53). De exemplu pentru un element de corecție (regulator) cu  $G_c(s) = k_r(7s+1)$  se obține  $w_1 = 0,15$  (la intersecția cu orizontala de  $-225^\circ$ , fig.VII.24), căreia, pentru  $k_r \leq 0,7$ , îi corespunde  $20\lg|G_n(jw)| < 0$ . O valoare  $k_r \leq 0,7$  este echivalentă cu o ridicare a liniei de 0dB. Pentru ridicarea acesteia cu 10dB trebuie să aibă loc:  $20\lg k_r \sqrt{(7w_1)^2 + 1} = 10$ , de unde rezultă  $k_r = 0,224$ .

## 2. Stabilitatea absolută

Pentru rezolvarea unor probleme de proiectare este necesară determinarea unor condiții de stabilitate asimptotică globală pentru o clasă largă de neliniarități. O astfel de clasă de neliniarități, semnificativă pentru aplicații în contextul schemei bloc structurale standard modificate din fig.VII.25 (echivalentă cu schema din fig.VII.11, *mutatis mutandis*), naturală din punct de vedere conceptual și deosebit de productivă sub aspectul rezultatelor de stabilitate, este:

$$C_{[0,K]} = \{ f \in \overline{C}^0; 0 \leq \frac{f(y)}{y} \leq K, y \in \mathbf{R}, y \neq 0 \}, \quad (2.1)$$

în care  $\overline{C}^0$  este mulțimea funcțiilor scalare reale, continue pe porțiuni. Se spune că funcțiile din  $C_{[0,K]}$  satisfac *condiția de sector*  $[0, K]$ , fig.VII.26. Din motive care vor fi clarificate în cele ce urmează se mai definesc în mod asemănător și clasele  $C_{[e,K]}$ , unde  $e > 0$  este un număr arbitrar de mic,  $C_{(0,K)}$  și  $C_{(0,+\infty)}$ .

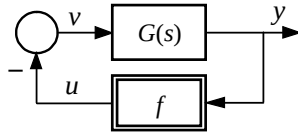


Fig.VII.25 Schema bloc structurală standard modificată (a se vedea și fig.VII.11)

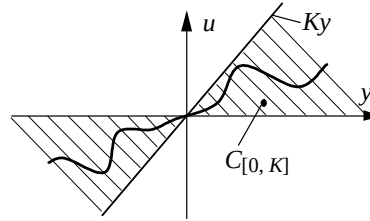


Fig.VII.26 Clasa funcțiilor de tip sector  $[0,K]$

Clasele de neliniarități introduse mai sus și necesitatea ca sistemul automat cu schema bloc structurală din fig.VII.25, în care  $G(s)$  este funcția de transfer a părții liniare, să se caracterizeze prin stabilitatea asimptotică globală a punctului de echilibru  $y = 0$  au condus la formularea conceptului de stabilitate din definiția următoare.

### Definiția 1

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25 se numește *absolut stabil* dacă punctul de echilibru  $y = 0$  este global asimptotic stabil pentru orice  $f \in C_{[0,K]}$  (sau după caz  $f \in C_{[e,K]}$ ,  $C_{(0,K)}$ ,  $C_{(0,+\infty)}$ ).  $\square$

### 2.1. Problema lui Lurie

Prima abordare conform definiției 1 a fost *problema lui Lurie*. Aceasta se bazează pe faptul că partea liniară a sistemului cu structura din fig.VII.25 este descrisă de ecuațiile:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - bu, & t \in \mathbf{R}, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R} \\ y = cx, & y \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (2.2)$$

în care  $A, b, c$  sunt matrice de dimensiuni adecvate, cu elemente constante, astfel încât:

$$G(s) = c(I_n s - A)^{-1} b = \frac{1}{\det(I_n s - A)} c \operatorname{adj}(I_n s - A) b \quad (2.3)$$

este o fracție rațională de ordinul  $n$ , ireductibilă (cele două polinoame sunt relativ prime

între ele), cu gradul  $m$  al numărătorului satisfăcând condiția  $m \leq n - 1$ . Funcția de transfer (2.3) a sistemului (2.2) se obține prin aplicarea transformării Laplace ecuațiilor (2.2) și eliminarea între ecuațiile obținute a vectorului de stare  $X(s)$ .

Elementul neliniar al sistemului cu structura din fig.VII.25 este descris de:

$$u = f(y), \quad (2.4)$$

în care  $f$  este o funcție din una din clasele definite în introducerea acestui subcapitol.

În aceste circumstanțe se poate demonstra următorul rezultat:

### Teorema 1

Dacă au loc următoarele trei condiții:

1° Toate valorile proprii ale matricei  $A$  sunt situate în  $\{\text{Re } s < 0\}$ ,

2°  $\int_0^{\pm\infty} f(y)dy$  este divergentă,

3°  $cb > -(Pb - \frac{1}{2}A^T c^T)^T (PA + A^T P)(Pb - \frac{1}{2}A^T c^T)$ ,

în care  $P$  este o matrice reală, simetrică și pozitiv definită ( $T$  simbolizează transpunerea matricelor), atunci sistemul cu structura din fig.VII.25, cu  $f \in C_{(0,+\infty)}$ , este absolut stabil.  $\square$

Din punctul de vedere al aplicațiilor, condițiile 1° și 2° fiind îndeplinite, rămâne de realizat condiția 3°. Aceasta oferă de fapt posibilitatea alegerii matricei  $c$  prin care se realizează reacția după starea părții liniare. O soluție relativ simplă în acest sens este:

$$c = 2(b^T P + \sqrt{r}v^T R)A^{-1},$$

în care  $r = cb > 0$  este o valoare prestabilită (a produsului  $cb$ ),  $v$  este un vector arbitrar cu proprietatea  $v^T v < 1$  și  $R$  este o matrice care se obține din  $R^T R = -(PA + A^T P)$ .

### 2.2. Criteriul Popov

În prima sa formă criteriul Popov a dat o rezolvare diferită a problemei lui Lurie și anume în *domeniul frecvențelor* și în ipoteze mai largi în sensul că  $G(s)$  poate avea un pol în origine, restul polilor fiind situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ . Ulterior criteriul a fost extins și pentru clasele  $C_{[0,K]}$ ,  $C_{[e,K]}$  etc. și număr arbitrar de poli în origine (ai părții liniare).

Se consideră sistemul din fig.VII.25, în care funcția de transfer a părții liniare are forma:

$$G(s) = \frac{1}{s^a} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_1 s + 1}. \quad (2.5)$$

Coeficienții  $a_i$ ,  $b_j$  sunt numere reale,  $a = 1, 2, \dots$ , și  $n + a > m$ . Coeficientul de amplificare al părții liniare s-a considerat 1 urmând ca factorul de amplificare al buclei să fie luat în considerare în neliniaritatea (2.4). Ca și în cazul (2.3)  $G(s)$  este ireductibilă.

Din punctul de vedere al distribuției polilor lui  $G(s)$  în planul complex se disting următoarele două cazuri.

a) *Cazul principal*: toți polii lui  $G(s)$  sunt situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ ; acesta implică  $a = 0$  și faptul că polinomul  $a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$  este hurwitzian.

b) *Cazul critic*: cel puțin un pol al lui  $G(s)$  se află pe axa imaginară  $\{\text{Re } s = 0\}$ , iar restul polilor sunt situați în  $\{\text{Re } s < 0\}$ .

Rațiunea acestei distincții își are originea în modul în care a fost definită clasa de neliniarități  $C_{[0,K]}$ . Este evident că dacă sectorul adoptat este  $[0, K]$ , atunci este posibil să se



aleagă  $f(y) \equiv 0$ , ceea ce înseamnă că sistemul cu structura din fig.VII.25 este fără reacție, funcționalitatea fiindu-i asigurată numai de partea liniară. În cazul critic partea liniară nu poate avea punctul de echilibru  $y = 0$  asimptotic stabil deoarece, în conformitate cu (2.3),  $G(s)$  având poli în  $\{\text{Re } s = 0\}$ , matricea  $A$  (din (2.2)) are, în mod corespunzător, valori proprii în  $\{\text{Re } s = 0\}$  (a se vedea și teorema 2 de la 1.3.b). Ca urmare, în cazul critic și  $C_{[0,K]}$  nu se poate pune problema stabilității absolute. Pentru eliminarea acestui inconvenient, în cazul critic se va avea în vedere clasa de neliniarități  $C_{[e,K]}$ , unde  $e > 0$  este arbitrar de mic. Această abordare implică în mod necesar asigurarea stabilității asimptotice globale pentru:

$$f(y) = e y \quad (2.6)$$

(cazul reacției liniare), cu  $e > 0$  oricât de mic. Pentru această situație se introduce noțiunea de  $e$ -stabilitate conform definiției următoare.

### Definiția 2

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25, cu  $G(s)$  în cazul critic și (2.6), se numește  $e$ -stabil dacă punctul de echilibru  $y = 0$  este global asimptotic stabil pentru  $e > 0$  arbitrar de mic.  $\square$

Întrucât definiția 2 se referă la un sistem automat liniar (conform schemei bloc structurale din fig.VII.27), este posibilă formularea următorului rezultat, util pentru aplicarea definiției 2. Acest rezultat este sugerat și de exemplul 1.10 și de afirmația cu caracter general din finalul acestuia.

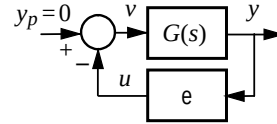


Fig.VII.27 Pentru definirea  $e$ -stabilității

### Teorema 2

Sistemul automat cu structura din fig.VII.25, în care  $G(s)$  este ireductibilă (adică raportul a două polinoame relativ prime), este  $e$ -stabil dacă și numai dacă sistemul automat cu structura din fig.VII.27 este BIBO-stabil pentru  $e > 0$  arbitrar de mic.

☞ Din (2.2), (2.4) și (2.6), după eliminarea mărimilor  $u$  și  $y$ , se obține:

$$\dot{x} = (A - ebc)x,$$

ceea ce înseamnă că sistemul cu structura din fig.VII.25 este  $e$ -stabil dacă și numai dacă matricea  $A - ebc$  are toate valorile proprii situate în  $\{\text{Re } s < 0\}$  pentru  $e > 0$  arbitrar de mic.

Pe de altă parte, pe baza relației (2.3) și utilizând o formulă a lui Schur, se poate scrie:

$$\begin{aligned} F(s) = 1 + eG(s) &= 1 + ec(I_n s - A)^{-1}b = \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n s - A & b \\ -ec & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_n s - A & b \\ -ec & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det(I_n s - A)} \det \begin{bmatrix} I_n s - A + ebc & 0 \\ -ec & 1 \end{bmatrix} = \frac{\det(I_n s - A + ebc)}{\det(I_n s - A)}. \end{aligned}$$

Întrucât  $G(s)$  este ireductibilă urmează că  $F(s)$  este de asemenea ireductibilă.

Rezultă că polinomul polilor sistemului cu structura din fig.VII.27 este  $\det(I_n s - A + ebc)$  (a se vedea VI.4.2.a) care este chiar polinomul caracteristic al matricei

$A - ebc$ . Evident,  $e$ -stabilitatea este echivalentă cu BIBO-stabilitatea sistemului cu structura din fig.VII.27 pentru  $e > 0$  arbitrar de mic.  $\square$

Pentru situațiile uzuale ( $a = 1, 2$  și  $a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$  hurwitzian) condițiile ca sistemul automat neliniar să fie  $e$ -stabil sunt ușor de determinat și respectiv de realizat.

Dacă  $a = 1$  locul de transfer  $eG(j\omega)$  începe, pentru  $\omega = +0$ , la  $-j\infty$  (fig.VI.3) și pentru  $e > 0$ , arbitrar de mic, punctul  $-1+j0$  rămâne în afara și la stânga locului de transfer. Conform teoremei 7 de la VI.4.2.a și teoremei 2 sistemul automat neliniar este  $e$ -stabil.

Dacă  $a = 2$ , pentru  $s = j\omega$  din (2.5) rezultă:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{(1 - b_2 \omega^2 + b_4 \omega^4 - \dots) + j(b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \dots)}{(1 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - \dots) + j(a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - \dots)},$$

care pentru  $\omega > 0$  foarte mic poate fi aproximată prin:

$$G(j\omega) \cong -\frac{1}{\omega^2} \frac{1 + jb_1 \omega}{1 + ja_1 \omega} = -\frac{1}{\omega^2} \frac{1 + a_1 b_1 \omega^2 + j\omega(b_1 - a_1)}{1 + a_1^2 \omega^2}.$$

În această situație se poate scrie:

$$\operatorname{Re} eG(j\omega) \cong -\frac{e}{\omega^2}, \quad \operatorname{Im} eG(j\omega) \cong -e \frac{b_1 - a_1}{\omega}.$$

Este acum evident că sistemul cu structura din fig.VII.27 este BIBO-stabil pentru  $e > 0$  arbitrar de mic, respectiv sistemul cu structura din fig.VII.25 este  $e$ -stabil (conform teoremei 2) dacă și numai dacă  $a_1 < b_1$ .

Înainte de a enunța criteriul Popov este necesar să se clarifice de ce  $G(s)$  nu poate avea poli în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ . Dacă  $G(s)$  ar avea poli în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ , atunci, pentru (2.4) locul rădăcinilor sistemului cu structura din fig.VII.27 ar avea ramuri în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ , care pentru  $e > 0$ , arbitrar de mic, ar implica faptul că acest sistem ar avea poli în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ . Ca urmare, în cazul că  $G(s)$  are poli în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$  și pentru  $f \in C_{[e,K]}$  nu se poate pune problema stabilității absolute a sistemului cu structura din fig.VII.25.

### Teorema 3 (Popov)

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care  $G(s)$  este de forma (2.5),  $f \in C_{[0,K]}$  – în cazul principal ( $0 < K \leq +\infty$ ), sau  $f \in C_{[e,K]}$  – în cazul critic (în care sistemul este  $e$ -stabil), și  $0 < K < +\infty$ .

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există  $q \in \mathbf{R}$  astfel încât are loc inegalitatea:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)G(j\omega)] > -\frac{1}{K}, \quad \omega \geq 0. \quad \square \quad (2.7)$$

În cazul critic pentru  $K = +\infty$  se poate utiliza următorul rezultat.

### Teorema 4

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care  $G(s)$  este de forma (2.5) cu  $a = 1$ ,  $a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$  hurwitzian și  $f \in C_{(0,+\infty)}$ .

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există  $q \in \mathbf{R}$  astfel încât are loc inegalitatea:

$$\operatorname{Re}[(1 + jq\omega)G(j\omega)] \geq 0, \quad \omega \geq 0. \quad \square \quad (2.8)$$

Criteriul Popov a fost extins și pentru cazul în care partea liniară a sistemului automat neliniar conține și un element cu timp mort.

### Teorema 5

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care partea liniară este descrisă de  $G(s)e^{-Ts}$ ,  $T > 0$ , cu  $G(s)$  de forma (2.5), în cazul principal, și  $f$  este continuă cu  $f \in C_{(0,K)}$

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există  $q > 0$  astfel încât are loc inegalitatea (2.7) (*mutatis mutandis*).  $\square$

### Exemplul 2.1 (analiza stabilității absolute)

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig.VII.25 cu  $f \in C_{(0,+\infty)}$  și  $G(s) = (b_1s + 1) / [s(a_1s + 1)]$ ,  $a_1 > 0$ ,  $b_1 > 0$ . Să se studieze dacă sistemul este absolut stabil.

În acest caz se poate aplica teorema 4. În conformitate cu (2.8) se poate scrie:

$$(qa_1b_1w^2 + q + b_1 - a_1) / (a_1^2w^2 + 1) \geq 0, \quad w \geq 0.$$

Alegând  $q \geq \max(0, a_1 - b_1)$  inegalitatea de mai sus are loc pentru orice  $w \geq 0$ , ceea ce înseamnă că sistemul considerat este absolut stabil pentru  $f \in C_{(0,+\infty)}$ .  $\square$

Forma inegalităților (2.7) și (2.8) a readus în actualitate noțiunea de *funcție real pozitivă* (utilizată inițial în teoria circuitelor electrice).

### Definiția 3

Fracția rațională cu coeficienți reali  $F(s)$  se numește *real pozitivă* dacă:

- 1° nu are nici un pol în  $\{\operatorname{Re} s > 0\}$ ;
- 2° polii din  $\{\operatorname{Re} s = 0\}$ , dacă astfel de poli există, sunt simpli și reziduurile corespunzătoare sunt reale și pozitive;
- 3°  $\operatorname{Re} F(jw) \geq 0$  pentru toți  $w \geq 0$ .  $\square$

### Teorema 6

Fie sistemul automat cu structura din fig.VII.25 în care  $f$  este continuă și  $f \in C_{(0,K)}$ .

Atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil dacă există  $q \in \mathbf{R}$  astfel încât funcția:

$$F(s) = (1 + qs)G(s) + 1/K \quad (2.9)$$

este real pozitivă.  $\square$

În aplicații este necesar să se verifice condițiile 1°, 2° și 3° din definiția 2. Condiția 3° este asemănătoare cu (2.7) și (2.8). Se poate demonstra că 1° și 2° sunt echivalente cu condiția ca polinomul  $P(s) + Q(s)$  să fie hurwitzian, în care  $P$  și  $Q$  se identifică din  $F(s) = Q(s) / P(s)$ . Pentru  $F(s)$  de forma (2.9) această condiție trebuie să aibă loc pentru același  $q$  pentru care este satisfăcută condiția 3°.

### 2.3. Forma grafică a criteriului Popov

Efectuând calculele în membrul stâng al inegalității (2.7) pentru  $G(jw) = \operatorname{Re} G(jw) + j \operatorname{Im} G(jw)$  se obține:

$$\operatorname{Re} G(jw) - qw \operatorname{Im} G(jw) > 1/K. \quad (2.10)$$

Introducând variabilele:

$$v = \operatorname{Re} G(j\omega), w = \omega \operatorname{Im} G(j\omega), \quad \omega \geq 0, \quad (2.11)$$

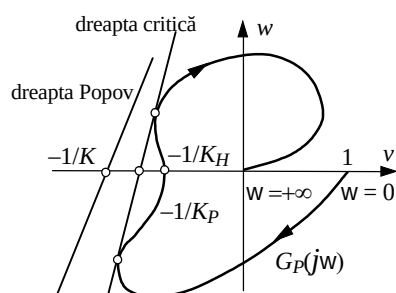


Fig. VII.28. Verificarea grafică a condiției (2.7)

se definesc: 1<sup>o</sup> funcția

$$G_P(j\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j\omega \operatorname{Im} G(j\omega), \quad \omega \geq 0, \quad (2.12)$$

al cărui hodograf se numește **locul Popov**, și 2<sup>o</sup> dreapta:

$$v - qw + \frac{1}{K} = 0, \quad (2.13)$$

numită **dreapta Popov**.

Dacă inegalitatea (2.10) are loc, atunci cu (2.11) ea devine:

$$v - qw + \frac{1}{K} > 0. \quad (2.14)$$

Dreapta Popov are panta  $1/q$  și tăieturile  $(-1/K, 0)$  și  $(0, 1/Kq)$ , fig. VII.28. Punctele din planul  $(v, w)$  situate la dreapta dreptei Popov satisfac inegalitatea (2.14).

Pentru verificarea grafică a condiției (2.10) se procedează în modul următor: se trasează în planul  $(v, w)$  locul Popov (conform cu (2.12)) și în punctul  $(-1/K, 0)$  se trasează o dreaptă Popov de panta  $1/q$  astfel aleasă încât locul Popov să rămână în întregime la dreapta acesteia, fig. VII.28; dacă și celelalte ipoteze din teorema 3 sunt satisfăcute, atunci sistemul automat neliniar este absolut stabil.

Evident, punctul  $(-1/K, 0)$  fiind dat, pot exista o infinitate de drepte Popov pentru care locul Popov rămâne complet la dreapta acestora. Dacă nu există o dreaptă Popov, (nu există  $q \in \mathbf{R}$ ) astfel încât locul Popov să rămână în întregime la dreapta, atunci teorema 4 nu se poate aplica. Aceasta nu implică concluzia că sistemul automat neliniar studiat nu poate fi absolut stabil, deoarece teorema 4 este doar o condiție suficientă de stabilitate absolută.

### Exemplul 2.2 (analiza grafică a stabilității absolute)

Se consideră sistemul automat neliniar cu structura din fig. VII.25 cu  $f \in C_{[1,5]}$  și  $G(s) = 1/[s(s^2 + s + 2)]$ . Se cere să se afle dacă sistemul este absolut stabil.

În conformitate cu (2.11) și (2.12) locul Popov este descris de ecuațiile parametrice:

$$v = 1/[(w^2 - 2)^2 + w^2], \quad w = (w^2 - 2)/[(w^2 - 2)^2 + w^2], \quad w \geq 0.$$

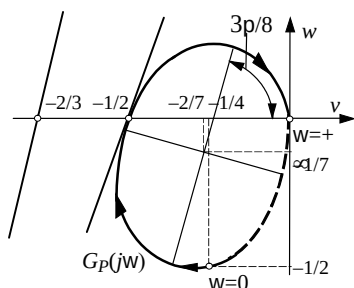


Fig. VII.29. Verificarea grafică a criteriului Popov la exemplul 2.2

Eliminând  $w^2 = 2 - w/v$  între aceste ecuații se obține:  $2v^2 + w^2 - vw + v = 0$ , care reprezintă ecuația unei elipse cu centrul în punctul  $(-2/7, -1/7)$ , cu axa mare rotită cu  $3\pi/8$  și care trece prin punctele  $(0, 0)$  și  $(-1/2, 0)$ , fig. VII.29. În aceste condiții, pentru  $-1/K = -2/3$ , prin punctul  $(-2/3, 0)$  se pot duce o infinitate de drepte Popov. Întrucât sistemul este e-stabil, conform teoremei 3 acesta este absolut stabil.  $\square$

Cu ajutorul inegalității (2.7) sau pe cale grafică se poate determina valoarea maximă  $K_P$  a lui  $K$  pentru care dreapta Popov este tangentă la locul Popov, fig. VII.28. Acesta se numește **dreapta critică**. Întrucât pentru dreapta critică condiția (2.10) nu are loc pentru toți  $w \geq 0$  rezultă că neliniaritatea se poate situa în sectorul

$[0, K_P)$  sau  $[e, K_P)$ , numit *sectorul Popov*. În cazul critic sectorul Popov poate fi și  $[e, K_P]$ , dar numai dacă locul Popov nu trece prin punctul  $(-1/K_P, 0)$ . În cazul exemplului 2.2 sectorul Popov este  $[e, 2)$ , fig.VII.29.

Procedeul de verificare grafică expus mai sus se poate aplica (*mutatis mutandis*) și în cazul teoremelor 4 – 6. În cazul teoremei 4 dreapta Popov trece prin originea planului  $(v, w)$ . În cazul teoremei 6 trebuie să se verifice condițiile  $1^\circ - 3^\circ$  din definiția 2. Condiția  $3^\circ$  fiind asemănătoare cu (2.7), procedura de verificare grafică rămâne în fond aceeași, cu deosebirea că dreapta Popov poate fi și tangentă la locul Popov.

## 2.4. Conjectura Aizerman

Pentru sistemul automat cu structura din fig.VII.25 se consideră  $f(y) = ky$ ,  $k \geq 0$ ,  $u = ky$ . Sistemul automat fiind liniar, pentru studiul stabilității se poate aplica criteriul Hurwitz (teorema 7 de la II.6.4) sau criteriul Nyquist (teorema 7 de la VI.4.2). Tăietura hodografului  $kG(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$ , cu semi-axa reală negativă (care se obține pentru  $\text{Im} G(j\omega) = 0$ ) este  $kG(j\omega_0) = k \text{Re} G(j\omega_0) = -k / K_H$ , unde  $K_H = -1 / \text{Re} G(j\omega_0)$ . Având în vedere ipotezele pe care le satisface  $G(s)$ , aplicând criteriul Nyquist, rezultă că pentru stabilitatea asimptotică globală, în cazul  $f(y) = ky$ , este necesar și suficient ca  $-1 < -k/K_H$ . Evident constanta  $K_H$  definește sectorul  $[0, K_H)$ , respectiv  $[e, K_H)$ , numit, în virtutea proprietăților sale, *sectorul Hurwitz*. Conform modului în care a fost definit  $K_H$  rezultă că acesta poate fi pus în evidență și cu ajutorul locului lui Popov. Într-adevăr, pentru  $\text{Im} G(j\omega_0) = 0$  în (2.12) se obține:  $G_P(j\omega_0) = \text{Re} G(j\omega_0) = -1/K_H$ , ceea ce înseamnă că tăietura locului Popov cu semi-axa reală negativă are abscisa  $-1/K_H$ , fig.VII.28.

Dacă sistemul automat neliniar trebuie să fie absolut stabil, atunci, în mod evident, el trebuie să fie absolut stabil și în cazul particular  $f(y) = ky$ . Rezultă că inegalitatea  $k < K_H$  este o condiție necesară de stabilitate absolută sau, cu alte cuvinte, sectorul  $[0, K]$  (respectiv  $[e, K]$ ) nu poate fi în nici un caz mai mare ca sectorul Hurwitz  $[0, K_H]$  (respectiv  $[e, K_H]$ ).

Pornind de la faptul că unele sisteme automate neliniare cu  $G(s)$  de ordin redus sectorul maxim de stabilitate absolută coincide cu sectorul Hurwitz (în sensul  $\sup[0, K] = K_H$ , respectiv  $\sup[e, K] = K_H$ ), Aizerman a enunțat următoarea conjectură:

*Sectorul maximal de stabilitate absolută coincide întotdeauna cu sectorul Hurwitz.*

S-a demonstrat că această afirmație este adevărată numai în unele cazuri cum ar fi:

a)  $G(s)$  este de ordinul doi, b) de ordinul trei cu cel mult un zero finit, c) de ordinul patru fără zerouri finite și cu poli complex conjugați suficient de îndepărtați de axa imaginară, d) de ordin oarecare cu toți polii reali negativi și fără zerouri finite. În toate aceste cazuri se poate utiliza criteriul Nyquist și anume în sensul determinării sectorului Hurwitz. Dacă  $[0, K] \subset [0, K_H]$ , respectiv  $[e, K] \subset [e, K_H]$ , atunci sistemul automat neliniar considerat este absolut stabil.

### Exemplul 2.3 (verificarea conjecturii Aizerman)

Se cere să se verifice conjectura Aizerman în cazul sistemului de la exemplul 2.2.

Conform fig.VII.29, tăietura locului Popov  $G_P(j\omega)$ , respectiv a locului de transfer  $G(j\omega)$ , cu semi-axa reală negativă are loc în punctul  $(-1/2, 0)$ , ceea ce înseamnă  $K_H = 2$ . Întrucât prin acest punct trece și dreapta critică, rezultă  $K_P = 2$ . Sectorul Popov coincide cu

sectorul Hurwitz; se trage concluzia că sectorul Hurwitz este sectorul maxim de stabilitate absolută, fapt care implică valabilitatea conjecturii Aizerman.  $\square$

## 2.5. Cazul sectorului $[K_1, K_2]$

O extensie a criteriului Popov s-a realizat prin considerarea clasei de funcții:

$$C_{[K_1, K_2]} = \left\{ f \in \overline{C}^0; K_1 \leq \frac{f(y)}{y} \leq K_2, y \in \mathbf{R}, y \neq 0 \right\}, \quad (2.15)$$

în care  $K_1 < K_2$  sunt două constante reale, clasă pentru care se poate formula o definiție asemănătoare cu definiția 1.

Pentru clasa de funcții (2.15), cu referire la structura din fig.VII.25, se definește:

$$\tilde{u} = u - K_1 y \quad (2.16)$$

și neliniaritatea:

$$\tilde{f}(y) = f(y) - K_1 y, \quad (2.17)$$

care satisface condiția  $\tilde{f} \in C_{[0, K_2 - K_1]}$  în cazul principal, sau  $\tilde{f} \in C_{[e, K_2 - K_1]}$  în cazul critic. Întrucât

$$Y(s) = -G(s)U(s), \quad (2.18)$$

prin înlocuirea relației (2.16), luată în transformate Laplace, în (2.18) se obține:

$$Y(s) = -\tilde{G}(s)\tilde{U}(s), \quad (2.19)$$

$$\tilde{G}(s) = \frac{G(s)}{1 + K_1 G(s)}. \quad (2.20)$$

În acest fel s-a obținut un nou sistem automat neliniar cu schema bloc structurală de forma aceleia din fig.VII.25, dar în care partea liniară este (2.20) și partea neliniară este (2.17), cu condiția de sector  $[0, K_2 - K_1]$ , respectiv  $[e, K_2 - K_1]$ . În aceste circumstanțe se pot aplica în mod adecvat definiția 1 și teoremele 1 – 6.

## 2.6. Compensarea serie a părții liniare

Din forma grafică a criteriului Popov (fig.VII.28) rezultă că dacă nu există o dreaptă Popov (respectiv nu există o valoare  $q$  astfel încât să aibă loc teorema 3 sau după caz teoremele 4 – 6), atunci se poate proceda în următoarele moduri:

- se reduce valoarea lui  $K$  (se reduce condiția de sector – fig.VII.26), respectiv se deplasează tăietura  $(-1/K, 0)$  – fig.VII.28 – spre stânga până când este posibilă trasarea unei drepte Popov;

- se compensează partea liniară, descrisă de  $G(s)$  – fig.VII.25, prin introducerea unui compensator în serie, în paralel sau în circuit cu reacție, respectiv se deformează și se deplasează locul Popov – fig.VII.28 – până când este posibilă trasarea unei drepte Popov;

Primul procedeu este echivalent cu reducerea posibilităților de alegere a neliniarității, fapt ce, evident, nu este în concordanță cu motivația introducerii definiției 1. De regulă demersul sugerat de definiția 1 constă în a determina valoarea maximă a lui  $K$  (în sensul sectorului Hurwitz, dar pentru a se putea trasa o dreaptă Popov), respectiv a unei condiții de sector – fig.VII.26 – cât mai cuprinzătoare posibil.

În cazul obișnuit se utilizează compensarea serie a părții liniare conform schemei bloc structurale din fig.VII.30. Compensatorul serie  $G_S(s)$  se alege astfel încât să se asigure:

- satisfacerea criteriului Popov;

- îmbunătățirea calităților impuse sistemului automat neliniar.

Pentru satisfacerea criteriului Popov o soluție simplă, sugerată de inegalitatea (2.7) și de corecția în domeniul frecvențelor a sistemelor automate liniare (a se vedea VI.4.3), constă în utilizarea unui compensator PD:

$$G_S(s) = k_S (s + 1).$$

(2.21)

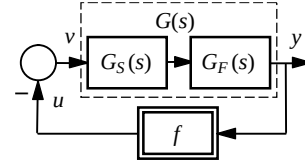


Fig.VII.30. Compensarea serie a părții liniare

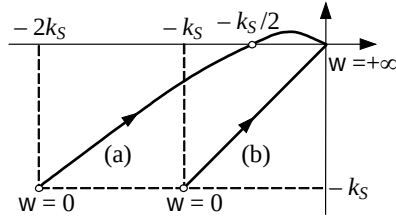
Efectul acestuia constă în rotirea locului lui Popov, pe măsura creșterii frecvenței, în sens antiorar, cu unghiuri de la  $0^\circ$  la  $90^\circ$ . În acest fel locul lui Popov suferă o deplasare spre dreapta la frecvențe medii și înalte (în cadranele 3 și/sau 2 ale planului locului lui Popov) ceea ce facilitează trasarea unei drepte Popov prin  $(-1/K, 0)$  cu condiția ca acest punct să rămână suficient de departe la stânga noului loc Popov.

Pentru realizarea calităților impuse sistemului automat se utilizează în primul rând neliniaritatea  $f$ . În același timp, pentru unele corecții ale acestor calități compensatorul serie poate conține factori suplimentari adecvați de tipul PID ai căror parametri se aleg de regulă ca în cazul corecției sistemelor automate liniare (a se vedea VI.4.3).

#### Exemplul 2.4 (sinteza regulatorului)

Se consideră sistemul automat cu structura din fig.VII.30 în care  $G_F(s) = 1/[s(s+1)^2]$ . Se cere să se determine  $G_S(s)$  astfel încât sistemul să fie absolut stabil pentru clasa  $C_{(0,4)}$ .

Pentru  $G(s) = G_S(s)G_F(s)$  și  $G_S(s) = k_S$ ,  $k_S > 0$ , ecuațiile parametrice (2.11) ale locului lui Popov sunt:  $v = -2k_S/[4w^2 + (1-w^2)^2] < 0$ ,  $w = -k_S(1-w^2)/[4w^2 + (1-w^2)^2] < 0$ . Eliminând  $w^2$  între aceste ecuații se obține:  $w = v - \sqrt{-k_S v / 2}$ ,  $v < 0$ ; locul Popov este reprezentat în fig.VII.31(a). Tăietura acestui loc cu axa  $w = 0$  este  $(-k_S/2, 0)$ . Pentru a fi posibilă trasarea unei drepte Popov prin  $(-1/4, 0)$  este necesar ca  $-1/4 < -k_S/2$ , respectiv  $k_S < 1/2$ . Această condiție constituie de fapt o reducere, prin partea liniară, a sectorului  $(0, 4]$  la sectorul  $(0, 4k_S] \subset (0, 2)$ .

Fig.VII.31. Compensarea serie la exemplul 2.4: (a)  $G_S(s) = k_S$ ; (b)  $G_S(s) = k_S(s+1)$ 

Pentru  $G(s) = G_S(s)G_F(s)$  și  $G_S(s) = k_S(s+1)$ ,  $k_S > 0$ , ecuațiile parametrice ale locului lui Popov

sunt:  $v = -k_S/(w^2+1) < 0$ ,  $w = -k_S/(w^2+1) < 0$ . Eliminând  $w^2 + 1$  între aceste ecuații se obține ecuația locului lui Popov:  $w = v$ ,  $v < 0$ , a cărei imagine este dată în fig.VII.31(b). Tăietura acestui loc cu axa  $w = 0$  este acum  $(0, 0)$ . Conform teoremei 4 se poate trasa o dreaptă Popov de pantă  $1/q \leq 1$  în orice punct  $(v, 0)$  cu  $v < 0$ . În consecință sistemul este absolut stabil pentru clasa  $C_{(0,+\infty)}$  și  $k_S > 0$ .  $\square$

#### 2.7. Criteriul cercului

Criteriul Popov generalizează criteriul Nyquist (VI.4.2) și anume în sensul că în cazul sistemului automat neliniar *locul de transfer* al sistemului în circuit deschis se înlocuiește cu *locul Popov* și *punctul critic* se înlocuiește cu *dreapta critică* (fig.VII.28). Totodată se asigură o libertate destul de mare în alegerea neliniarității (clasa de funcții (2.1) cu variantele ei și extensia (2.15)) cu o restrângere corespunzătoare a posibilităților de alegere

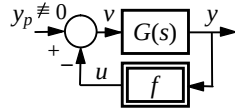


Fig. VII.32. Schema bloc structurală la criteriul cercului

a părții liniare (conform teoremelor 3 – 6).

O altă extindere a criteriului lui Popov, și anume în cazul schemei bloc structurale din fig. VII.32, în care  $y_p(t)$  este neidentic nulă și  $f$  este o funcție de tip sector Lipschitz, îl constituie și următorul rezultat, cunoscut și sub numele de criteriul cercului.

### Teorema 7

Fie sistemul automat cu structura din fig. VII.32 în care  $G(s)$  este de forma (2.5) și  $f$  satisface condițiile:

$$f(0) = 0, \quad (2.22)$$

$$K_1 \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2} \leq K_2, \quad y_1, y_2 \in \mathbf{R}, y_1 \neq y_2, \quad (2.23)$$

cu  $K_1, K_2 \in \mathbf{R}, K_1 \leq K_2$ .

Atunci punctul de echilibru  $y = 0$  este global asimptotic stabil dacă, după caz, are loc una din următoarele trei condiții:

1° Pentru  $K_1 = 0$  locul de transfer  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , este situat la dreapta unei drepte care trece prin  $(-1/K_2 + e, 0)$ , cu  $e > 0$ .

2° Pentru  $K_1 > 0$  locul de transfer  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , este situat în exteriorul unui cerc care trece prin punctele  $(-1/K_2 + e, 0)$  și  $(-1/K_1 - e, 0)$ , cu  $e > 0$ .

3° Pentru  $K_1 < 0$  locul de transfer  $G(j\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ , este situat în interiorul unui cerc care trece prin punctele  $(-1/K_2 + e, 0)$  și  $(-1/K_1 - e, 0)$ , cu  $e > 0$ . □

Situațiile corespunzătoare celor trei condiții din teorema 7 sunt ilustrate în fig. VII.33.

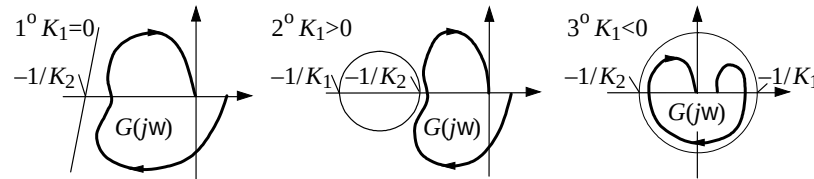


Fig. VII.33. Ilustrarea celor trei condiții din teorema 7

Condiția (2.23) este de tip Lipschitz și este mai tare decât condiția de tip sector ((2.1) sau (2.15)). Într-adevăr, pentru  $f(y)$  continuă și derivabilă, conform formulei lui Lagrange, există  $y \in (y_1, y_2)$  astfel încât:

$$f(y_1) - f(y_2) = (y_1 - y_2) f'(y). \quad (2.24)$$

Înlocuind (2.24) în (2.23) se obține:

$$K_1 \leq f'(y) \leq K_2, \quad y \in (y_1, y_2), \quad (2.25)$$

care în mod evident este mai tare decât aceea de tip sector (2.15).

Condiția mai tare (2.23) are ca efect, conform teoremei 7 și fig. VII.33, o relaxare a condițiilor pe care trebuie să le satisfacă partea liniară a sistemului automat neliniar. Cu referire la (2.5), în care  $a_n s^n + \dots + a_1 s + 1$ ,  $b_m s^m + \dots + b_1 s + 1$  sunt hurwitziene și  $n + a > m$ , conform teoremei 7 și pentru  $K_1$  și  $K_2$  adecvat aleși, este suficient ca:  $a = 0, 1$  (pentru 1°),  $a = 0, 1, 2$  (pentru 2°) și  $a = 0$  (pentru 3°).



## TRANSFORMĂRI INTEGRALE

Prin *transformare funcțională* se înțelege o corespondență între două mulțimi de funcții. Se scrie  $F = \mathcal{T}\{f\}$ . Transformarea  $\mathcal{T}$  aplicată funcției  $f$  este funcția  $F$ .  $\mathcal{T}^{-1}$  este transformarea inversă și  $f = \mathcal{T}^{-1}\{F\}$ .  $f$  și  $F$  se mai numesc *original* și respectiv *image*.

Transformările funcționale au avantajul că, în mulțimea imaginilor, anumite relații dintre originale se exprimă în forme mai simple. Se pot obține astfel, în mulțimea funcțiilor image, rezultate care în mulțimea funcțiilor original sunt mai dificil de demonstrat.

O clasă specială de transformări funcționale o constituie *transformările liniare*. Ele au proprietatea că pentru orice funcții original  $f_1$  și  $f_2$  și pentru orice constante  $c_1, c_2$  are loc:

$$\mathcal{T}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathcal{T}\{f_1\} + c_2 \mathcal{T}\{f_2\}.$$

De acest tip sunt și *transformările integrale*:  $F(s) = \int_a^b K(t, s) f(t) dt = \mathcal{T}\{f(t)\}$ ,

în care  $K(t, s)$  este *nucleul* și  $(a, b)$  este *domeniul de integrare*. De regulă  $f$  aparține unui spațiu de funcții, de exemplu:  $L^1(a, b)$  – spațiul funcțiilor absolut integrabile pe  $(a, b)$  sau  $L^2(a, b)$  – spațiul funcțiilor de pătrat integrabil pe  $(a, b)$ , ceea ce este echivalent respectiv cu:

$$\int_a^b |f(t)|^k dt < +\infty, \quad k = 1, 2.$$

### 1. Transformarea Laplace

#### 1.1. Transformarea directă

**Definiția 1.** Fie  $f(t)$  o funcție original, de variabila reală  $t$ , care satisface condițiile:

- 1°  $f(t) = 0, \quad t < 0$ ;
- 2°  $f(t)$  este continuă pe porțiuni; pe orice interval finit are cel mult un număr finit de discontinuități în care există limitele laterale finite  $f(t-0), f(t+0)$ ;
- 3° există constantele  $M > 0$  și  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât:  $|f(t)| \leq M e^{at}, \quad t \geq 0$ .

Funcția image:  $F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s \in \mathbf{C},$

(de variabila complexă  $s = \sigma + j\omega$ ) este *transformata Laplace* a funcției  $f(t)$ .  $\square$

##### a. Observații

1° Transformarea conform definiției 1 se mai numește și *Laplace directă unilaterală*, deoarece domeniul de integrare este  $(0, +\infty)$ ; se face totodată distincție față de transformarea *Laplace directă bilaterală* pentru care domeniul de integrare este  $(-\infty, +\infty)$ .

2° Variabila  $t$  este, de regulă, timpul. În acest caz, din punct de vedere dimensional,  $|s|$  este

o pulsație (sau o frecvență; a se vedea și textul explicativ care urmează după relația (1.2) de la VI.1.1.). Din acest motiv variabila  $s$  se mai numește „frecvență” complexă.  $\mathcal{L}$  realizează o transformare din mulțimea originalelor dependente de timpul  $t$  în mulțimea imaginilor dependente de „frecvență” complexă  $s$ .

3° Ipoteza 1° din definiția 1 poate fi eventual omisă.  $f(t)$  fiind definită pentru  $t \in \mathbf{R}$ , din integrala din definiția 1 rezultă că  $F(s)$  corespunde numai restricției lui  $f$  la intervalul  $[0, +\infty)$ , inclusiv condițiile inițiale  $f^{(i)}(-0)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , cum este cazul transformatei derivatei generalizate a originalului (a se vedea b.3° și Anexa B.2.2.b.2°); evident, toate aceste valori inițiale sunt nule dacă ipoteza 1° (din definiția 1) este îndeplinită.

4° Dacă integrala Laplace din definiția 1 converge într-un punct  $s_0 \in \mathbf{C}$ , atunci ea converge în întreg semiplanul  $\{\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0\}$ . Domeniul de convergență este  $\{\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0\}$ ;  $s_0 \in \mathbf{R}$  este abscisa de convergență (valoarea cea mai mică pentru care integrala este convergentă).

Dreapta de convergență  $\{\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} s_0\}$  poate să fie inclusă (parțial sau total) sau nu în domeniul de convergență.

Dacă integrala converge absolut într-un punct, atunci există un semiplan de absolută convergență  $\{\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_a\}$ , cu  $s_a \leq s_0$ . În situațiile care apar în aplicații există aproape întotdeauna un astfel de semiplan, ceea ce înlesnește foarte mult manipularea integralei din definiția 1. În plus se poate presupune că există și transformarea Laplace inversă.

5° Transformarea Laplace a distribuțiilor este prezentată în B.2.2.

#### b. Teoreme

1° Transformarea Laplace directă este liniară.

2° Imaginea derivatei originalului:

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - f(+0)s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(+0), \quad k = \overline{1, n}.$$

3° Imaginea derivatei generalizate (în sens distribuții) a originalului:

$$\mathcal{L}\{D^k f(t)\} = s^k F(s) - f(-0)s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(-0), \quad k = \overline{1, n}.$$

Detalii se prezintă în anexa B, la 1.2.b.7° – 9° și la 2.2.b.1° – 2°.

4° Imaginea derivată:

$$\mathcal{L}\{(-t)^k f(t)\} = F^{(k)}(s), \quad k = \overline{1, n}.$$

5° Imaginea integralei originalului:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^k\right\} = \frac{1}{s^k} F(s), \quad k = \overline{1, n}.$$

6° Imaginea translatei originalului:

$$\mathcal{L}\{f(t-t)\} = e^{-st} F(s); \quad t \in \mathbf{R}.$$

7° Imaginea translată:

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{zt}\} = F(s-z); \quad z \in \mathbf{C}.$$

8° Scalarea timpului:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = a^{-1} F(a^{-1}s); \quad a > 0.$$

9° Scalarea „frecvenței” complexe:

$$\mathcal{L}\{a^{-1} f(a^{-1}t)\} = F(as); \quad a > 0.$$

10° Imaginea produsului a două originale (produsul de convoluție a două imagini):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1(t)f_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-z)F_2(z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} (F_1 * F_2)(s) = \frac{1}{2\pi j} (F_2 * F_1)(s). \end{aligned}$$

Detalii privind alegerea constantei  $c$  se prezintă la 1.2.a.3°.

11° Teorema lui Borel (imaginea produsului de convoluție – produsul imaginilor):

$$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-q) f_2(q) dq\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(q) f_2(t-q) dq\right\} = F_1(s) F_2(s).$$

c. Transformatele Laplace ale unor funcții

1° Pentru funcția Heaviside (treapta unitară) se obține:

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \int_0^{+\infty} s(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

2° Pentru funcția exponențială  $e^{at}$ , cu  $a \in \mathbf{R}$ , se obține:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-a}.$$

3° Pentru funcția  $\sin w_0 t$ , cu  $w_0 > 0$ , se obține:

$$\mathcal{L}\{\sin w_0 t\} = \int_0^{+\infty} \sin w_0 t e^{-st} dt = \frac{e^{-st} (-\sin w_0 t - w_0 \cos w_0 t)}{s^2 + w_0^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}.$$

Transformările altor funcții uzuale sunt cuprinse în tabelul din Anexa C.1.

## 1.2. Transformarea inversă

**Definiția 2.** Conform definiției 1 funcția  $f$  de variabilă reală  $t$ :

$$\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

se numește transformata Laplace inversă a funcției  $F(s)$ .  $\square$

a. Observații

1° În punctele de continuitate membrul stâng al formulei din definiția 2 este  $f(t)$ . În punctele de discontinuitate aceeași formulă furnizează media aritmetică a limitelor laterale.

2° Integrala din definiția 2 se calculează cu:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{c-jR}^{c+jR} F(s) e^{st} ds = \text{V.P.} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds,$$

adică simultan pentru ambele limite de integrare, respectiv ca *valoare principală* (V.P.).

3° Pentru calculul integralei din definiția 2, în cazul în care  $F(s)e^{st}$  are numai singularități de tip pol, se folosește *teorema reziduurilor*. Constanta  $c$  se alege astfel încât toți polii (distincti)  $p_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , ai lui  $F(s)$  să fie situați în  $\{\text{Re } s < c\}$ . Integrala din definiția 2 nu depinde de  $c$ . Pentru  $t > 0$  se utilizează conturul închis  $C_R$ , format din segmentul de dreaptă  $D_R$  și semicercul  $S_R$  – fig. A.1. Se obține:

$$f(t) = \sum_{i=1}^r \text{Re } z_{p_i} [F(s) e^{st}], \quad t > 0,$$

deoarece, conform teoremei reziduurilor, are loc:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^r \text{Re } z_{p_i} [F(s) e^{st}], \quad t > 0.$$

În același timp, conform fig. A.1, se scrie:

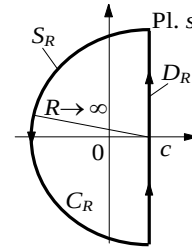


Fig. A.1. Conturul de integrare pentru calculul transformatei inverse

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(s) e^{st} ds &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} F(s) e^{st} ds + \underbrace{\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} F(s) e^{st} ds}_{=0} = \\ &= \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = 2\pi j \sum_{i=1}^r \operatorname{Re} z_{p_i} [F(s) e^{st}], \quad t > 0,\end{aligned}$$

deoarece integrala pe  $S_R$ , cu  $R \rightarrow +\infty$ , este nulă în condițiile rezultatului următor.

**Lema Jordan.** Dacă  $F(s)$  este continuă pe  $S_R$ , cu  $R \rightarrow +\infty$ , și  $|F(s)| \rightarrow 0$  uniform pentru  $R \rightarrow +\infty$  și  $s \in S_R$ , atunci pentru  $t > 0$  are loc:  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} F(s) e^{st} ds = 0$ . ■

Reziduul unei funcții  $G(s)$  într-un pol  $p$ , de multiplicitate  $q \geq 1$ , se calculează cu:

$$\operatorname{Rez}_p[G(s)] = a_{-1} = \frac{1}{(q-1)!} \left\{ \frac{d^{q-1}}{ds^{q-1}} [(s-p)^q G(s)] \right\}_{s=p},$$

în care  $a_{-1}$  este coeficientul termenului de putere  $-1$  din *seria Laurent*:

$$G(s) = a_{-q}(s-p)^{-q} + \dots + a_{-1}(s-p)^{-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(s-p)^k.$$

4° Pentru orice  $t < 0$  are loc:  $\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds = 0$ .

5° Dacă există  $t_0 > 0$  astfel încât  $F(s) e^{t_0 s} \rightarrow 0$  pentru  $s \rightarrow +\infty$ , cu  $\operatorname{Re} s \geq \sigma_a$ , uniform pentru  $|\arg(s - \sigma_a)| \leq \pi/2$ , atunci  $f(t) = 0$  pentru  $t < t_0$ .

#### b. Teoreme

1° Originalul unei funcții raționale (teorema dezvoltării). Pentru  $F(s) = Q(s)/P(s)$ , în care  $P(s)$  și  $Q(s)$  sunt două polinoame, cu  $\operatorname{grad} P = n > \operatorname{grad} Q = m$ , având polii distincți  $p_i$ ,

fiecare de multiplicitate  $q_i$ ,  $i = \overline{1, r}$ , cu  $\sum_{i=1}^r q_i = n$ , originalul se obține cu:

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{q_i} \frac{K_{ij}}{(q_i - j)!} t^{q_i - j} e^{p_i t}, \quad t \geq 0, \\ K_{ij} &= \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} [(s - p_i)^{q_i} F(s)] \right\}_{s=p_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, q_i}.\end{aligned}$$

2° Valoarea inițială a originalului și a derivatelor sale (teorema valorii inițiale):

$$f^{(k)}(+0) = \lim_{t \downarrow 0} f^{(k)}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s \left[ s^k F(s) - f(+0)s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(+0) \right], \quad k = \overline{1, n},$$

cu condiția ca ambele limite să existe și să fie finite.

3° Valorile finale ale originalului și derivatelor sale (teorema valorii finale):

$$f^{(k)}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{(k)}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[ s^k F(s) - f(+\infty)s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(+\infty) \right], \quad k = \overline{1, n},$$

cu condiția ca ambele limite să existe și să fie finite.

## 2. Transformarea Fourier

### 2.1. Transformarea directă

**Definiția 1.** Transformata Fourier a unei funcții (reală sau complexă), de variabila reală  $t \in \mathbf{R}$ , are expresia:  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\}$ ,  $\omega \in \mathbf{R}$ .  $\square$

a. Condiții de existență și observații

1° O condiție suficientă de existență a transformatei Fourier este  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ . În acest caz  $F(j\omega)$  este uniform continuă, mărginită și  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(j\omega) = 0$ . Transformata Fourier directă este univocă.

2° Dacă originalele  $f_1, f_2 \in L^1(-\infty, +\infty)$  au aceeași transformată  $F(j\omega)$ , atunci:

$$\int_0^t [f_1(\tau) - f_2(\tau)] d\tau \equiv 0, \quad t \in \mathbf{R}. \text{ În punctele de continuitate } f_1 \equiv f_2.$$

3° Variabila  $t$  este de regulă timpul. În acest caz  $\omega$  este pulsația.  $\mathcal{F}$  realizează o transformare din mulțimea originalelor dependente de timpul  $t$  în mulțimea imaginilor dependente de pulsația (frecvența)  $\omega$ . Dacă  $f(t)$  este un semnal, atunci  $F(j\omega)$  se numește densitatea spectrală și  $|F(j\omega)|$  – densitatea spectrală de amplitudine. Acestea oferă informații asupra spectrului de frecvențe al semnalului  $f(t)$ .

4° Cazurile  $f \in L^2(-\infty, +\infty)$  și al distribuțiilor sunt prezentate la 3 și respectiv în B.2.1.

5° Cazul transformării Fourier unilaterale (cu domeniul de integrare  $[0, +\infty)$ ) și legătura cu transformarea Laplace (unilaterală) sunt prezentate în B.2.3.

b. Teoreme

1° Transformarea Fourier directă este liniară.

2° Imaginea derivatei originalului:  $\mathcal{F}\{f^{(k)}(t)\} = (j\omega)^k F(j\omega)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,

în condițiile:  $f^{(i)} \in L^1(-\infty, +\infty)$  sau  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(i)}(t) = 0$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ .

3° Imaginea integralei originalului:  $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega) + p F(0) \delta(\omega)$ . (vezi B.2.1.b.7°)

Dacă  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$  și  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ ,  $g \in L^1(-\infty, +\infty)$ , atunci  $F(j\omega) = j\omega G(j\omega)$ ,

$F(0) = 0$  (deoarece  $G(0)$  este finit) și  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) d\tau = 0$ . Se scrie:  $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$ .

4° Imaginea conjugatei originalului:  $\mathcal{F}\{\bar{f}(t)\} = \bar{F}(-j\omega)$ .

5° Simetria:  $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-j\omega)$ .

6° Inversarea sensului evoluției timpului:  $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$ .

7° Imaginea originalului funcție pară ( $f(-t) = f(t)$ ):  $F(-j\omega) = F(j\omega)$ .

8° Imaginea originalului funcție impară ( $f(-t) = -f(t)$ ):  $F(-j\omega) = -F(j\omega)$ .

9° Imaginea  $F(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$  a originalului  $f(t)$ , funcție reală, are proprietățile:

$$F(j\omega) = \bar{F}(-j\omega), \quad \bar{F}(j\omega) = F(-j\omega);$$

$$R(w) = \operatorname{Re} F(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos wt \, dt \quad \text{este funcție pară};$$

$$I(w) = \operatorname{Im} F(jw) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin wt \, dt \quad \text{este funcție impară}.$$

10° Imaginea originalului  $f(t)$ , funcție reală pară, are proprietatea:

$$F(jw) = \bar{F}(jw) = R(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos wt \, dt, \quad I(w) \equiv 0.$$

11° Imaginea originalului  $f(t)$ , funcție reală impară, are proprietatea:

$$F(jw) = -\bar{F}(jw) = jI(w) = -2j \int_0^{+\infty} f(t) \sin wt \, dt, \quad R(w) \equiv 0.$$

12° Pentru originalul  $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$ , în care  $f_p(t) = [f(t) + f(-t)]/2$  și

$$f_i(t) = [f(t) - f(-t)]/2 \text{ sunt părțile pară și respectiv impară ale lui } f(t), \text{ rezultă:}$$

$$R(w) = \mathcal{F}\{f_p(t)\} = 2 \int_0^{+\infty} f_p(t) \cos wt \, dt, \quad jI(w) = \mathcal{F}\{f_i(t)\} = -2j \int_0^{+\infty} f_i(t) \sin wt \, dt,$$

$$f_p(t) = \mathcal{F}^{-1}\{R(w)\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} R(w) \cos wt \, dw, \quad f_i(t) = \mathcal{F}^{-1}\{jI(w)\} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} I(w) \sin wt \, dw.$$

13° Dacă  $f(t) \geq 0, t \in \mathbf{R}$ , atunci  $|F(jw)| \leq F(0), w \in \mathbf{R}$ .

14° Imaginea translatei originalului:  $\mathcal{F}\{f(t-t)\} = e^{-jtw} F(jw); t \in \mathbf{R}$ .

15° Imaginea translată:  $\mathcal{F}\{f(t)e^{ht}\} = F(j(w-h)); h \in \mathbf{R}$ .

16° Scalarea timpului:  $\mathcal{F}\{f(at)\} = |a|^{-1} F(ja^{-1}w); a \neq 0$ .

17° Scalarea frecvenței:  $\mathcal{F}\{|a|^{-1} f(a^{-1}t)\} = F(jaw); a \neq 0$ .

18° Imaginea produsului de convoluție:

$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_2 * f_1(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-q) f_2(q) dq\right\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(q) f_2(t-q) dq\right\} = F_1(jw) F_2(jw),$$

cu condiția ca una din funcțiile original să fie mărginită pe  $\mathbf{R}$ .

### c. Transformatele Fourier ale unor funcții

1° Pentru funcția exponențială  $e^{-a|t|}$  cu  $a > 0$ , se obține (fig.A.2.a):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-jw t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-a|t|} e^{-jw t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-jw t} dt = \\ &= -\frac{1}{jw-a} e^{-(jw-a)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{jw+a} e^{-(jw+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{-1}{jw-a} + \frac{1}{jw+a} = \frac{2a}{w^2 + a^2}. \end{aligned}$$

2° Pentru funcția exponențială  $e^{-at} s(t)$ , cu  $a > 0$ , se obține (fig.A.2.b):

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at} s(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} s(t) e^{-jw t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(jw+a)t} dt = -\frac{1}{jw+a} e^{-(jw+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{jw+a}.$$

3° Pentru funcția impuls dreptunghiular  $r_T(t) = s(t+T) - s(t-T), T > 0$ , (fig.A.2.c):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{r_T(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} [s(t+T) - s(t-T)] e^{-jw t} dt = \int_{-T}^T e^{-jw t} dt = \\ &= -(jw)^{-1} (e^{-jw T} - e^{jw T}) = 2w^{-1} \sin Tw. \end{aligned}$$

4° Pentru funcția  $\frac{\sin w_0 t}{t}$ , cu  $w_0 > 0$ , pe baza simetriei (b.5°), din rezultatul precedent se obține (fig.A.2.d):  $\mathcal{F}\left\{\frac{\sin w_0 t}{t}\right\} = p r_{w_0}(-w) = p r_{w_0}(w) = p[s(w + w_0) - s(w - w_0)]$ .

Transformatele altor funcții și distribuții (funcții generalizate) uzuale sunt prezentate la B.2.1.c, B.2.3.b și în tabelul din Anexa C.2.

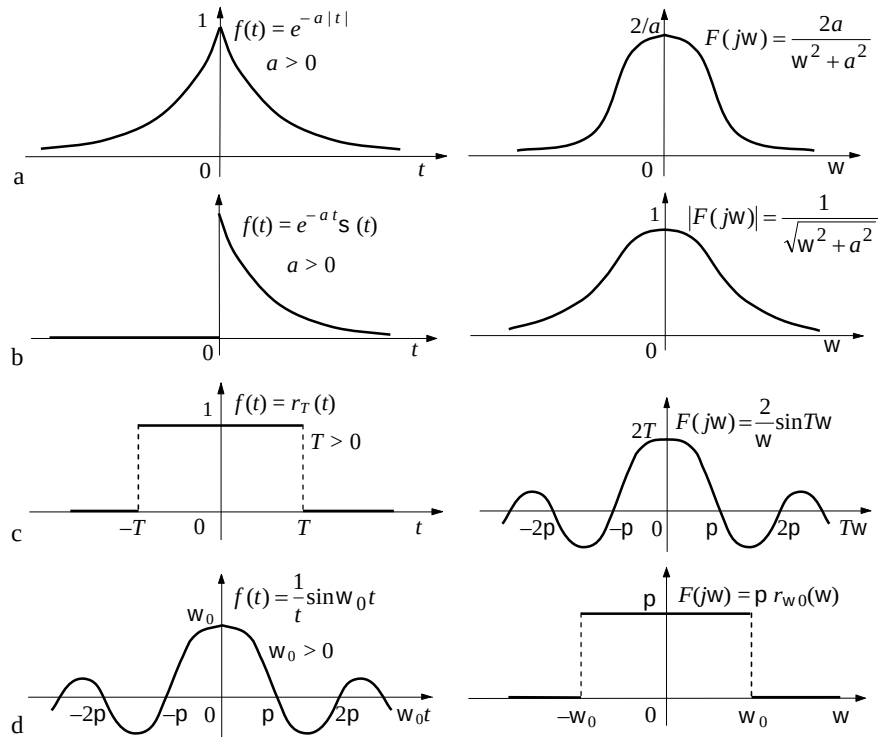


Fig. A.2. Semnale (funcții original) și densitățile lor spectrale

## 2.2. Transformarea inversă

**Definiția 2.** Conform definiției 1, funcția:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jw) e^{jw t} dw = \mathcal{F}^{-1}\{f(jw)\},$$

de variabila reală  $t$  se numește *transformata Fourier inversă* a funcției  $F(jw)$ .  $\square$

### a. Observații

1° Având în vedere analogiile formale dintre integrala transformării Laplace inverse și aceea a transformării Fourier inverse (se obține din prima pentru  $t \in \mathbf{R}$ ,  $s = jw$  și  $c = 0$ ), urmează că 1.2.a.1°, 2° și 3° rămân valabile și în cazul transformării Fourier inverse.

2° Este posibil ca pentru  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$  prin utilizarea transformării Fourier directe să se obțină  $F \notin L^1(-\infty, +\infty)$ . În acest caz nu este posibilă utilizarea transformării Fourier inverse.

### 3. Transformarea Fourier - Plancherel

#### a. Definiție și condiții de existență

1° Transformarea Fourier definită pentru  $f \in L^2(-\infty, +\infty)$  se numește *Fourier - Plancherel* și se simbolizează cu  $\mathcal{F}^2$ . Principala deosebire față de  $\mathcal{F}$  constă în faptul că se înlocuiește convergența punctuală pentru  $w \in \mathbf{R}$  prin *convergența în medie pătratică* (limes in medio - prescurtat l.i.m.):

$$F(jw) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}^2\{f(t)\}, \quad w \in \mathbf{R}.$$

În formă explicită aceasta înseamnă:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F(jw) - \int_{-a}^a f(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 dw = 0.$$

Formula de inversiune are forma:

$$f(t) = \text{l.i.m.}_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a F(jw) e^{j\omega t} dw = \mathcal{F}^{-2}\{F(jw)\}.$$

2° Dacă  $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ , atunci  $F \in L^2(-\infty, +\infty)$ . Fiecare  $F \in L^2(-\infty, +\infty)$  este transformata unei  $f \in L^2(-\infty, +\infty)$ . Dacă există  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  (nefiind necesar ca  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$ ), atunci există și  $\mathcal{F}^2\{f(t)\}$  aproape pentru toți  $w \in \mathbf{R}$ .  $L^1(-\infty, +\infty) \not\subset L^2(-\infty, +\infty)$  și  $L^2(-\infty, +\infty) \not\subset L^1(-\infty, +\infty)$ . În schimb  $L^{1,2}(-\infty, +\infty) = L^1(-\infty, +\infty) \cap L^2(-\infty, +\infty) \neq \emptyset$ . De exemplu pentru:  $f_1(t) = e^{-|t|}$ ,  $f_2(t) = 1/(1+|t|)$  și  $f_3(t) = |t|^{-3/2} e^{-|t|}$  sunt valabile:  $f_1 \in L^{1,2}(-\infty, +\infty)$ ,  $f_2 \notin L^1(-\infty, +\infty)$ ,  $f_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$  și  $f_3 \in L^1(-\infty, +\infty)$ ,  $f_3 \notin L^2(-\infty, +\infty)$ . Ca urmare 2.1.b se aplică și pentru  $\mathcal{F}^2$ .

#### b. Teoreme

1° Imaginea produsului de convoluție. Dacă  $f_1, f_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$ ,  $F_1, F_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$ , atunci  $f_1 * f_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$  și:  $\mathcal{F}^2\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(jw)F_2(jw) = \mathcal{F}^2\{f_1(t)\}\mathcal{F}^2\{f_2(t)\}$ .

Dacă  $f_1, f_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$ , atunci  $F_1, F_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$  și  $F_1 F_2 \in L^1(-\infty, +\infty)$  (conform inegalității Cauchy - Schwarz), dar nu în mod necesar  $F_1 F_2 \in L^2(-\infty, +\infty)$ .

2° Imaginea produsului a două originale (produsul de convoluție a două imagini):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2\{f_1(t)f_2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j(w-h))F_2(jh)dh = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(jh)F_2(j(w-h))dh = \\ &= \frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(jw) = \frac{1}{2\pi} (F_2 * F_1)(jw), \quad f_i \in L^2(-\infty, +\infty), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

3° Formula lui Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\bar{f}_2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(jw)\bar{F}_2(jw)dw, \quad f_i \in L^2(-\infty, +\infty), \quad i = 1, 2.$$

Pentru  $f_1 = f_2 = f$  se obține:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(jw)|^2 dw.$$



## NOȚIUNI DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR

Anexa

B

### 1. Distribuții (funcții generalizate)

#### 1.1. Premise pentru generalizarea noțiunii de funcție

##### a. Funcția Heaviside și impulsul Dirac

Acestea reprezintă cazuri limită ideale ale unor fenomene frecvent întâlnite în aplicații. De exemplu, funcția Heaviside (treapta unitară) se poate obține la limită din (fig.B.1.a):

$$s_e(t) = \begin{cases} 0 & , t < -e/2, \\ (t + e/2)/e & , -e/2 < t < e/2, \\ 1 & , e/2 < t, \end{cases} = D_e; e > 0.$$

Într-adevăr, trecând la limită pentru  $e \downarrow 0$  rezultă:

$$\tilde{S}(t) = \lim_{e \downarrow 0} (D_e) s_e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Aceasta este una dintre definițiile posibile ale funcției Heaviside. În mod obișnuit se utilizează definiția (4.1) de la II.4.1, care va fi avută în vedere în continuare (în 1.2 și 2).

Aplicând  $s_e(t)$  la intrarea unui derivator, la ieșirea acestuia se obține (fig.B.1.b):

$$d_e(t) = \frac{ds_e(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & , t < -e/2, \\ 1/e & , -e/2 < t < e/2, \\ 0 & , e/2 < t, \end{cases}$$

$$\text{cu } \int_{-\infty}^{+\infty} d_e(t) dt = \int_{-e/2}^{e/2} \frac{1}{e} dt = 1.$$

Trecând la limită se obține impulsul Dirac:

$$d(t) = \lim_{e \downarrow 0} d_e(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0, \\ +\infty & , t = 0, \end{cases} \text{ cu } \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = 1.$$

##### b. Observații

Această manieră de introducere a impulsului Dirac conduce la următoarele constatări:

- 1° Conform definiției noțiunii de funcție, impulsul Dirac nu este o funcție.
- 2° Urmează că aplicarea metodelor analizei clasice nu este posibilă. De exemplu, privitor la operația de derivare (în sensul analizei clasice), este evident că:

$$d(t) = \lim_{e \downarrow 0} \frac{ds_e(t)}{dt} \neq \frac{d}{dt} \lim_{e \downarrow 0} (D_e) s_e(t) = \frac{d\tilde{S}(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \text{nedefinit pentru } t = 0, \end{cases}$$

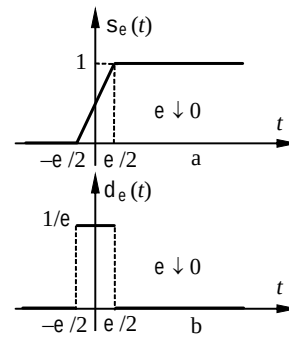


Fig. B.1. O posibilitate de obținere, la limită – pentru  $\varepsilon \downarrow 0$ , (a) a funcției Heaviside și (b) a impulsului Dirac

deoarece  $\tilde{S}(t)$  nu este derivabilă în  $t = 0$ .

3° Pentru tratarea fenomenelor de tipul impulsului Dirac s-a introdus noțiunea de *distribuție* sau *funcție generalizată*.

## 1.2. Noțiunea de distribuție

### a. Distribuția Dirac

1° O funcție este o corespondență, astfel încât fiecărui element dintr-o anumită mulțime îi corespunde exact un element dintr-o altă mulțime. Ca exemplu se poate avea în vedere dependența unei tensiuni electrice  $x$  de timpul  $t$ , respectiv  $x = f(t)$ , în sensul că fiecărui  $t$  îi corespunde un  $x$ . Tensiunea  $x$  este o mărime fizică măsurabilă. Numai că mărimea care se măsoară nu este în realitate tensiunea  $x$ , ci *efectul* ei asupra unui dispozitiv adecvat. Acest efect poate fi reprezentat cu ajutorul unei funcții continue  $j(t)$ , numită *funcție-test*. O calitate esențială a unei măsurători o constituie repetabilitatea cu dispozitive diferite. Aceasta conduce la afirmația că există arbitrar de multe funcții-test.

2° Pentru a caracteriza matematic simultan fenomenul  $x = f(t)$  și mulțimea efectelor sale se poate utiliza *funcționala*:

$$\langle f(t), j(t) \rangle = \int_a^b f(t) j(t) dt,$$

în care  $\langle, \rangle$  este notația uzuală pentru funcționale de acest tip. Se realizează astfel o caracterizare *globală* a funcției  $f(t)$ , respectiv a *distribuției* funcției  $f(t)$  pentru toți  $t$  din intervalul considerat, prin aceea că lui  $f(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , i se asociază un număr real.

3° Această abordare se extinde și pentru impulsului Dirac:

$$\langle d(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) j(t) dt,$$

în care operația este formal de tipul integralei definite (cu regulile aferente). Prin alegerea funcțiilor-test (după cum se va arăta în continuare la b.1°), intervalul de integrare infinit se reduce efectiv la un interval finit.

### b. Distribuții cu suport compact

1° Clasa funcțiilor-test  $j(t)$  este formată din mulțimea funcțiilor reale, infinit derivabile pe  $\mathbf{R}$ , cu *suport compact*. *Suportul* unei funcții  $j(t)$  este cea mai mică mulțime închisă care conține punctele  $t$  pentru care  $j(t) \neq 0$ . Complementara suportului este cea mai mare dintre mulțimile deschise în care  $j(t) = 0$ . O mulțime este *compactă* dacă este închisă și mărginită.

Un exemplu de funcție-test este următorul: 
$$j(t) = \begin{cases} e^{1/(t^2-1)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Spațiul funcțiilor-test se notează cu  $\mathcal{D}$ .  $\mathcal{D}$  este un spațiu liniar peste  $\mathbf{R}$  în raport cu operațiile de adunare a funcțiilor și de înmulțire a unei funcții cu un număr real. În plus, pentru orice  $j \in \mathcal{D}$  și orice funcție reală  $m(t)$  infinit derivabilă pe  $\mathbf{R}$ , are loc  $mj \in \mathcal{D}$ .

Un șir  $j_k \in \mathcal{D}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , este convergent în  $\mathcal{D}$  la  $j \in \mathcal{D}$  dacă există un interval  $[a, b]$  astfel încât suportul lui  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , este inclus în  $[a, b]$  și  $j_k^{(i)} \rightarrow j^{(i)}(t)$  pentru  $k \rightarrow +\infty$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , uniform pentru  $t \in [a, b]$ . Se notează toate acestea prin:  $j_k \xrightarrow{\mathcal{D}} j$ .

2° O distribuție este o funcțională liniară și continuă  $x: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ , adică o funcție care satisface condițiile:

- $x(c_1 j_1 + c_2 j_2) = c_1 x(j_1) + c_2 x(j_2)$  pentru orice  $j_1, j_2 \in \mathcal{D}$  și orice  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ ;
- dacă  $j_k \xrightarrow{\mathcal{D}} j$ , atunci  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(j_k) = x(j)$ .

O aplicație liniară  $x: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$  este o distribuție dacă și numai dacă este continuă în  $j = 0$ , adică dacă și numai dacă din  $j_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$  rezultă  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(j_k) = 0$ .

Mulțimea tuturor distribuțiilor definite pe  $\mathcal{D}$  se notează cu  $\mathcal{D}'$ .

$\mathcal{D}'$  este un spațiu liniar peste  $\mathbf{R}$  în raport cu operațiile uzuale de adunare a funcțiilor și de înmulțire a unei funcții cu un număr real.

3° Orice funcție reală  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , continuă și mărginită pe porțiuni este în același timp și distribuție de tip funcție. În acest caz este posibilă utilizarea funcționalei:

$$\langle f(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) j(t) dt, \quad j \in \mathcal{D},$$

în care integrala are sensul uzual.

În cazul funcției Heaviside (treapta unitară, definită la II.4.1) se scrie:

$$\langle S(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) j(t) dt = \int_0^{+\infty} j(t) dt, \quad j \in \mathcal{D}.$$

Urmează că distribuția  $S$  este procesul prin care fiecărei funcții-test  $j(t)$  i se asociază integrala ei de la 0 la  $+\infty$ , a cărei valoare este finită deoarece  $j(t)$  are suport compact.

4° Prin analogie cu 3°, pentru o distribuție  $x$  se scrie:

$$\langle x(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) j(t) dt, \quad j \in \mathcal{D}.$$

Aceasta înseamnă că distribuția  $x$  este procesul prin care fiecărei funcții-test  $j(t)$  i se asociază un număr real. Explicarea de tip integrală definită are avantajul că se pot utiliza unele reguli proprii acestor integrale cum sunt: schimbarea variabilei de integrare și integrarea prin părți.

Notăția  $x(t)$  este oarecum improprie deoarece  $x$  nu este definită pe  $\mathbf{R}$ , ci pe  $\mathcal{D}$ . Se utilizează totuși notația  $x(t)$  pentru a sublinia faptul că  $j$  este definită pe  $\mathbf{R}$ .

În cazul distribuției Dirac se scrie:

$$\langle d(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) j(t) dt = j(0), \quad j \in \mathcal{D}.$$

Aceasta înseamnă că distribuția  $d(t)$  este procesul prin care fiecărei funcții-test  $j$  se asociază  $j(0)$  adică valoarea funcției-test la  $t = 0$ .

5° Scalarea timpului:

$$\langle x(at), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) j(t) dt = |a|^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) j(a^{-1}t) dt = |a|^{-1} \langle x(t), j(a^{-1}t) \rangle, \quad a \neq 0.$$

6° Translata temporală:

$$\langle x(t-t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t) j(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) j(t+t) dt = \langle x(t), j((t+t)) \rangle, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pentru  $d(t-t)$  se scrie:  $\langle d(t-t), j(t) \rangle = \langle d(t), j(t+t) \rangle = j(t)$ .

Pentru  $S(t-t)$  se scrie:  $\langle S(t-t), j(t) \rangle = \langle S(t), j(t+t) \rangle = \int_0^{+\infty} j(t+t) dt$ .

7° Derivarea generalizată (în sens distribuții), simbolizată prin  $D^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , constă în:

$$\begin{aligned} \langle D^k x(t), j(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} [D^k x(t)] j(t) dt = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) j^{(k)}(t) dt = \\ &= (-1)^k \langle x(t), j^{(k)}(t) \rangle, \quad j^{(k)} \in \mathcal{D}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Acest rezultat se obține prin integrarea prin părți repetată.

Pentru  $s(t-t)$  și  $k = 1$  se obține:

$$Ds(t-t) = d(t-t), \text{ deoarece}$$

$$\begin{aligned} \langle Ds(t-t), j(t) \rangle &= - \langle s(t-t), j'(t) \rangle = \langle s(t), j'(t+t) \rangle = \\ &= - \int_0^{+\infty} j'(t+t) dt = j(t) = \langle d(t), j(t+t) \rangle = \langle d(t+t), j(t) \rangle. \end{aligned}$$

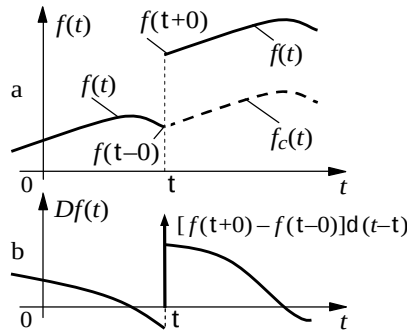


Fig.B.2. (a) Funcția discontinuă  $f(t)$  (  $f_c(t)$  - partea continuă) și (b) derivata generalizată  $Df(t)$

8° Pentru o funcție reală  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , discontinuă în  $t = t$ , pentru care există limitele laterale finite  $f(t-0)$  și  $f(t+0)$ , se poate scrie (fig.B.2.a):

$$f(t) = f_c(t) + [f(t+0) - f(t-0)]\mathfrak{E}(t),$$

în care  $f_c(t)$  este partea continuă a funcției  $f(t)$ .

Derivata generalizată (în sens distribuții) are expresia (fig.B.2.b):

$$Df(t) = f'(t) + [f(t+0) - f(t-0)]\delta(t),$$

în care  $f'(t) = f'_c(t)$ ,  $t \neq t$ , în sensul clasic. Pentru derivata generalizată (în sens distribuții) de ordinul  $k$  se scrie:

$$\begin{aligned} D^k f(t) &= f^{(k)}(t) + [f^{(k-1)}(t+0) - f^{(k-1)}(t-0)]\delta(t-t) + \\ &+ [f^{(k-2)}(t+0) - f^{(k-2)}(t-0)]D\delta(t-t) + \dots + [f(t+0) - f(t-0)]D^k \delta(t-t), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

în care  $f^{(i)}(t-0)$ ,  $f^{(i)}(t+0)$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ , sunt limitele laterale finite ale funcțiilor  $f^{(i)}(t)$  (derivatele de ordinul  $i$ ) în  $t = t$ ,  $i = \overline{0, k-1}$ .

9° Pentru produsul unei distribuții  $x(t)$  cu o funcție  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , infinit derivabilă se scrie:

$$\langle x(t) f(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) f(t) j(t) dt = \langle x(t), f(t) j(t) \rangle.$$

$$\text{Pentru } x(t) = d(t) \text{ rezultă: } f(t)d(t) = f(0)d(t),$$

$$\text{Deoarece } \langle f(t)d(t), j(t) \rangle = \langle d(t), f(t)j(t) \rangle = f(0)j(0) = f(0)\langle d(t), j(t) \rangle = \langle f(0)d(t), j(t) \rangle.$$

$$\text{Pentru } x(t) = Dd(t) \text{ se obține: } f(t)Dd(t) = f(0)Dd(t) - f'(0)d(t), \text{ deoarece}$$

$$\begin{aligned} \langle f(t)Dd(t), j(t) \rangle &= \langle Dd(t), f(t)j(t) \rangle = - \langle d(t), [f(t)j(t)]' \rangle = \\ &= - \langle d(t), f'(t)j(t) + f(t)j'(t) \rangle = - f(0)j'(0) - f'(0)j(0) = \\ &= - f(0)\langle d(t), j'(t) \rangle - f'(0)\langle d(t), j(t) \rangle = \\ &= f(0)\langle Dd(t), j(t) \rangle - f'(0)\langle d(t), j(t) \rangle = \\ &= \langle f(0)Dd(t) - f'(0)d(t), j(t) \rangle. \end{aligned}$$

Pentru  $f(t) = t$  se obțin următoarele rezultate:  $t\delta(t) = 0$ ,  $tD\delta(t) = -\delta(t)$ .

10° O distribuție  $x(t)$  se numește *pară* dacă  $x(-t) = x(t)$ .

Impulsul Dirac este o distribuție pară deoarece din 5° pentru  $x(t) = \delta(t)$  și  $a = -1$  rezultă:  $\delta(-t) = \delta(t)$ .

O distribuție  $x(t)$  se numește *impară* dacă  $x(-t) = -x(t)$ .

Derivata impulsului Dirac este o distribuție impară, deoarece din 5° pentru  $x(t) = D\delta(t)$  și  $a = -1$  rezultă:  $D\delta(-t) = -D\delta(t)$ , în conformitate cu

$$\begin{aligned} \langle D\delta(-t), j(t) \rangle &= \langle D\delta(t), j(-t) \rangle = -\langle \delta(t), -j'(-t) \rangle = j'(0) = \\ &= \langle \delta(-t), j'(t) \rangle = -\langle D\delta(t), j(t) \rangle = \langle -D\delta(-t), j(t) \rangle. \end{aligned}$$

11° O distribuție  $x(t)$  este nulă pe  $\mathbf{R} \setminus [a, b]$  dacă pentru orice funcție-test  $j(t)$ , care este nulă pe  $[a, b]$ , are loc:  $\langle x(t), j(t) \rangle = 0$ .

În ipoteza că cel puțin una din distribuțiile  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}'$  este nulă în afara unui interval finit din  $\mathbf{R}$ , pentru produsul de convoluție se scrie:

$$\langle (x_1 * x_2)(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(q) j(t+q) dq \right] dt = \langle x_1(t), \langle x_2(q), j(t+q) \rangle \rangle,$$

$$\langle (x_2 * x_1)(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(q) j(t+q) dq \right] dt = \langle x_2(t), \langle x_1(q), j(t+q) \rangle \rangle,$$

după cum  $x_1(t)$  sau  $x_2(t)$  se anulează în afara unui interval finit din  $\mathbf{R}$ .

Fie  $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{D}'$ . Produsul de convoluție are proprietățile:

$$(x_1 * x_2)(t) = (x_2 * x_1)(t),$$

$$[x_1 * (x_2 + x_3)](t) = (x_1 * x_2)(t) + (x_1 * x_3)(t),$$

$$[(x_1 * x_2) * x_3](t) = [x_1 * (x_2 * x_3)](t).$$

În cazul în care  $x_1(t) = x(t)$  și  $x_2(t) = D^k \delta(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se scrie:

$$(x * D^k \delta)(t) = D^k x(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ deoarece}$$

$$\begin{aligned} \langle (x * D^k \delta)(t), j(t) \rangle &= \langle x(t), \langle D^k \delta(q), j(t+q) \rangle \rangle = (-1)^k \langle x(t), \langle \delta(q), j^{(k)}(t+q) \rangle \rangle = \\ &= (-1)^k \langle x(t), j^{(k)}(t) \rangle = \langle D^k x(t), j(t) \rangle. \end{aligned}$$

Pentru  $k = 0$  rezultă:  $(x * \delta)(t) = x(t)$ , ceea ce înseamnă că impulsul Dirac este elementul unitate în cadrul produsului de convoluție.

12° Pentru  $x_1(t) = x(t)$  și  $x_2(t) = s(t)$  cu ajutorul produsului de convoluție se obține

$$\text{integrala distribuției } x(t): \int_{-\infty}^t x(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} x(q) s(t-q) dq = (x * s)(t).$$

### c. Pseudofuncții

1° Funcțiile  $t^{-1}, t^{-2}, \dots, t^{-3/2}, t^{-5/2}, \dots$ , nu determină distribuții deoarece nu sunt (local) integrabile. Pentru astfel de funcții se utilizează noțiunea de parte finită (*pars finita*, prescurtat Pf) a unei funcționale.

De exemplu, pentru  $t^{-3/2} s(t)$  funcționala:

$$\langle t^{-3/2} s(t), j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-3/2} s(t) j(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{-3/2} j(t) dt$$

este divergentă dacă  $j(0) \neq 0$ . Totuși ultima integrală are și o parte finită. Pentru limita de integrare inferioară  $e > 0$ , prin integrare prin părți se obține:

$$\int_e^{+\infty} t^{-3/2} j(t) dt = 2e^{-1/2} j(e) + 2 \int_e^{+\infty} t^{-1/2} j'(t) dt, \quad e > 0.$$

Întrucât  $j(e) = j(0) + e j'(qe)$ ,  $0 < q < 1$ , rezultă că:

$$I(e) = \int_e^{+\infty} t^{3/2} j(t) dt - 2j(0)e^{-1/2} = 2j'(qe)e^{1/2} + \int_e^{+\infty} t^{-1/2} j'(t) dt,$$

$$\lim_{e \downarrow 0} I(e) = 2 \int_0^{+\infty} t^{-1/2} j'(t) dt.$$

Această integrală este convergentă deoarece  $t^{-1/2}$  este (local) integrabilă. Urmează că partea finită a funcționalei este:

$$\text{Pf} \langle t^{-3/2} S(t), j(t) \rangle = \langle 2t^{-1/2}, j(t) \rangle = 2 \int_0^{+\infty} t^{-1/2} j'(t) dt.$$

2° Dacă funcționala  $\langle f(t), j(t) \rangle$ , în care funcția  $f(t)$  nu este (local) integrabilă, este divergentă și posedă o parte finită care coincide cu o funcțională determinată de o distribuție  $x(t)$ , adică  $\text{Pf} \langle f(t), j(t) \rangle = \langle x(t), j(t) \rangle$ , se spune că funcția  $f(t)$  definește o distribuție  $x(t)$  și se scrie  $\text{Pf} f(t) = x(t)$ .  $\text{Pf} f(t)$  se numește *pseudofuncția* asociată lui  $f(t)$ .

$$\text{Pentru } f(t) = t^{-3/2} S(t) \text{ rezultă } \text{Pf} \left[ t^{-3/2} S(t) \right] = 2t^{-1/2} S(t).$$

3° Dacă  $\text{Pf} f(t) = x(t)$ , atunci

$$D^k (\text{Pf} f(t)) = D^k x(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

#### d. Distribuții temperate

1° Funcțiile-test  $j(t)$  fac parte din spațiul  $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}$  al funcțiilor rapid descrescătoare. Aceste funcții au proprietatea că pentru  $t \rightarrow +\infty$  are loc  $t^m j^{(n)}(t) \rightarrow 0$  pentru  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ .

2° O distribuție  $x(t)$  definită prin funcționala  $\langle x(t), j(t) \rangle$  este liniară și continuă pe  $\mathcal{D}$ .

Spațiul tuturor distribuțiilor temperate se notează cu  $\mathcal{O}'$ . Întrucât  $\mathcal{D} \subset \mathcal{O}$ , urmează că are loc  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{D}'$ .

3° O distribuție  $x \in \mathcal{D}'$  cu suport mărginit este temperată.

Conform acestei propoziții, distribuțiile  $D^k \delta(t - t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , sunt temperate.

4° Dacă  $x \in \mathcal{O}'$ , atunci  $D^k x \in \mathcal{O}'$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

5° O funcție  $f \in L^1(-\infty, +\infty)$  determină o distribuție temperată.

O funcție  $f(t)$  (local) integrabilă și mărginită pe  $\mathbf{R}$  determină o distribuție temperată.

6° Dacă  $f(t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , este o funcție mărginită și infinit derivabilă și  $x \in \mathcal{O}'$ , atunci pentru  $\tilde{x}(t) = f(t)x(t)$  are loc  $\tilde{x} \in \mathcal{O}'$ .

## 2. Transformările Fourier și Laplace ale distribuțiilor

### 2.1. Transformarea Fourier a distribuțiilor

#### a. Definiție

Transformata Fourier a unei distribuții  $x(t)$ , exprimată formal prin:  $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ , se definește prin funcționala:

$$\langle \mathcal{F}\{x(t)\}, j(t) \rangle = \langle x(t), \mathcal{F}\{j(t)\} \rangle = \langle x(t), \Phi(j\omega) \rangle, \quad j \in \mathcal{O}', x \in \mathcal{O}',$$

în care  $X \in \mathcal{O}'$  și  $\Phi(j\omega) = \mathcal{F}\{j(t)\}$  este transformata Fourier în sensul din Anexa A.2.1.

#### b. Teoreme

1° Transformarea Fourier directă a distribuțiilor este liniară.

2° Dacă  $x_1, x_2 \in \mathcal{O}'$  și  $X_1(j\omega) = X_2(j\omega)$ , atunci  $x_1(t) = x_2(t)$ .

3° Imaginea derivatei originalului:  $\mathcal{F}\{D^k x(t)\} = (j\omega)^k X(j\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

4° Simetria:  $\mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-j\omega)$ .

5° Imaginea translatei originalului:  $\mathcal{F}\{x(t-t)\} = e^{-j\omega t} X(j\omega), \quad t \in \mathbf{R}$ .

6° Imaginea produsului de convoluție:  $\mathcal{F}\{(x_1 * x_2)(t)\} = X_1(j\omega) X_2(j\omega)$

este o distribuție temperată cu condiția ca  $x_1(t)$  să fie distribuție temperată și  $x_2(t)$  să fie distribuție cu suport mărginit sau viceversa.

7° Imaginea integralei originalului:  $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(q) dq\right\} = \left(\text{Pf} \frac{1}{j\omega}\right) X(j\omega) + p X(0) d(\omega),$

deoarece, conform cu 1.2.b.12°, se scrie:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(q) dq\right\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(q) s(t-q) dq\right\} = X(j\omega) \mathcal{F}\{s(t)\} = X(j\omega) \left[\text{Pf} \frac{1}{j\omega} + p d(\omega)\right],$$

în care pentru  $\mathcal{F}\{s(t)\}$  se utilizează rezultatul b.8° (din secțiunea următoare).

8° Imaginea produsului  $x(t)f(t)$ :  $\mathcal{F}\{x(t)f(t)\} = \frac{1}{2\pi} (X * F)(j\omega),$

în care produsul de convoluție  $X * F$  se realizează în conformitate cu 1.2.b.11°.

9° Formula lui Parseval:  $\langle x(t), j(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{x(t)\}, \mathcal{F}\{j(-t)\} \rangle.$

10° O categorie importantă de pseudofuncții o formează cele definite ca derivate ale distribuțiilor determinate de funcții (local) integrabile:  $\text{Pf} f(t) = D^k f_0(t)$ . Dacă distribuția determinată de  $f_0(t)$  este temperată, atunci  $\mathcal{F}\{\text{Pf} f(t)\}$  există și, conform cu 3°, se scrie:

$$\mathcal{F}\{\text{Pf} f(t)\} = (j\omega)^k \mathcal{F}\{f_0(t)\}.$$

#### c. Transformatele Fourier ale unor distribuții

1° Pentru  $x(t) = d(t-t)$  din a.1° se obține:

$$\langle \mathcal{F}\{d(t-t)\}, j(t) \rangle = \langle \delta(t-t), \mathcal{F}\{j(q)\} \rangle = \langle d(t-t), F(j\omega) \rangle =$$

$$= F(jt) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} j(\omega) d\omega = \langle e^{-j\omega t}, j(\omega) \rangle,$$

ceea ce înseamnă că  $\mathcal{F}\{d(t-t)\} = e^{-j\omega t}$ .

Pentru  $t = 0$  rezultă:

$$\mathcal{F}\{d(t)\} = 1,$$

graficele corespunzătoare fiind reprezentate în fig.B.3.a.

2° Pentru  $x(t) = e^{j\omega_0 t}$  din a.1° rezultă:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\}, j(t) \rangle &= \langle e^{j\omega_0 t}, \mathcal{F}\{j(t)\} \rangle = \langle e^{j\omega_0 t}, F(jq) \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} F(jq) dq = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi F(jq) e^{j\omega_0 t} = 2\pi j(\omega_0) = \langle 2\pi d(\omega - \omega_0), j(\omega) \rangle. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi d(\omega - \omega_0).$$

Pentru  $\omega_0 = 0$  se obține:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi d(\omega),$$

graficele corespunzătoare fiind reprezentate în fig.B.3.b.

3° Pentru funcțiile trigonometrice  $f(t) = \sin\omega_0 t$  și  $f(t) = \cos\omega_0 t$ , pe baza formulelor lui Euler și în conformitate cu rezultatul de la 2°, se scrie:

$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = -j\pi(d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0)),$$

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \pi(d(\omega - \omega_0) + d(\omega + \omega_0)).$$

Pentru  $\sin\omega_0 t$  graficele corespunzătoare sunt reprezentate în fig.B.3.c.

4° Pentru  $f(t) = t^k$  din a.1° rezultă:

$$\mathcal{F}\{t^k\} = 2\pi j^k D^k d(\omega).$$

5° Pentru  $x(t) = D^k d(t-t)$  din a.3° se obține:

$$\mathcal{F}\{D^k d(t-t)\} = (j\omega)^k e^{-j\omega t}.$$

Pentru  $t = 0$  rezultă:

$$\mathcal{F}\{D^k d(t)\} = (j\omega)^k.$$

6° Pentru  $f(t) = \text{Pf}(1/t)$  se poate scrie:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\text{Pf}\frac{1}{t}\right\} &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-j\omega t} \frac{1}{t} dt + \int_{\epsilon}^{+\infty} e^{-j\omega t} \frac{1}{t} dt \right) = -\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \frac{dt}{t} = \\ &= -\lim_{\epsilon \downarrow 0} 2j \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t} dt = -2j \int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{t} dt = -\pi j \text{sgn}\omega, \end{aligned}$$

graficele corespunzătoare fiind reprezentate în fig.B.3.d.

7° Pentru  $f(t) = \text{sgn } t$ , din rezultatul precedent, conform proprietății de simetrie a transformării Fourier (a.4°), se poate scrie:



$$\mathcal{F}\{\text{sgnt}\} = \frac{2}{j} \text{Pf} \frac{1}{w},$$

graficele corespunzătoare fiind reprezentate în fig.B.3.e.

8° Funcția treaptă unitară,  $s(t)$ , poate fi exprimată cu ajutorul funcției signum sub forma:

$$s(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgnt}).$$

Conform rezultatului de la 7° se obține:

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = \text{pd}(w) + \frac{1}{j} \text{Pf} \frac{1}{w},$$

graficele corespunzătoare fiind reprezentate în fig.B.3.f.

## 2.2. Transformarea Laplace a distribuțiilor

### a. Definiție

1° Domeniul de integrare al transformării Laplace directe unilaterale este  $[0, +\infty)$ . Ca urmare se consideră distribuții pe  $\mathbf{R}$  cu suport în  $\mathbf{R}_+$ . Mulțimea acestor distribuții se notează cu  $\mathcal{D}'_+$ , iar mulțimea distribuțiilor temperate corespunzătoare cu  $\mathcal{O}'_+$ . Evident,  $\mathcal{O}'_+ \subset \mathcal{D}'_+$ .

2° Dacă pentru  $x \in \mathcal{D}'_+$  există un  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât  $\tilde{x}(t) = e^{-at} x(t)$  satisface  $\tilde{x} \in \mathcal{O}'_+$ , atunci pentru  $\text{Res} = s > a$  se definește transformata Laplace a distribuției  $x(t)$  prin:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \langle x(t), e^{-st} \rangle = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

### b. Teoreme

1° Distribuția Dirac și derivatele sale sunt distribuții temperate. Se scrie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^k d(t-t)\} &= \langle D^k d(t-t), e^{-st} \rangle = (-1)^k \langle d(t-t), (-1)^k s^k e^{-st} \rangle = \\ &= \langle d(t-t), s^k e^{-s(t+t)} \rangle = s^k e^{-st}, \quad t \in \mathbf{R}_+, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pentru  $t = 0$  și  $k = 0$  se obține:  $\mathcal{L}\{d(t)\} = 1$ .

2° În cazul derivatei generalizate a unei distribuții determinată de o funcție  $f(t)$ , discontinuă în  $t = 0$ , conform cu 1.2.b.8° și A.1.1.b.2°, se poate scrie:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{D^k f(t)\} &= s^k F(s) + \left[ f^{(k-1)}(+0) - f^{(k-1)}(-0) \right] + \dots + \left[ f(+0) - f(-0) \right] s^{k-1} - \\ &- f(+0) s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(+0) = s^k F(s) - f(-0) s^{k-1} - \dots - f^{(k-1)}(-0). \end{aligned}$$

3° Imaginea integralei originalului:  $\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(q) dq \right\} = \frac{1}{s^k} F(s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$

4° Imaginea produsului de convoluție:  $\mathcal{L}\{(f_1 * f_2)(t)\} = F_1(s) F_2(s).$

### 2.3. Transformarea Fourier directă unilaterală

#### a. Definiții și observații

1° Este un caz particular al transformării Fourier (directe bilaterale, cf. A.2.1 și B.2.1) în situații în care originalul  $f(t)$  satisface condiția:  $f(t) = f(t)S(t)$ , adică  $f(t) = 0, t < 0$ .

2° Transformarea Fourier directă unilaterală se definește după cum urmează:

- în cazul funcțiilor:  $F_1(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}_1\{f(t)\},$
- în cazul distribuțiilor:  $X_1(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\},$

conform cu  $\langle X_1(j\omega), j(t) \rangle = \langle x(t)S(t), \Phi(j\omega) \rangle$ , în care transformata produsului  $x(t)S(t)$  se exprimă prin produsul de convoluție al transformatelor  $\mathcal{F}\{x(t)\}, \mathcal{F}\{S(t)\}$  (cf. 2.1.a.8°).

Indicele I din relațiile de mai sus individualizează transformata directă unilaterală.

3° Trunchierea originalului, prin anularea părții corespunzătoare semiaxei temporale negative, are consecințe importante pentru transformata Fourier directă unilaterală.

S-a arătat la teorema 3 de la VI.3.2 că o condiție necesară și suficientă ca  $G_1 \in L^2(0, +\infty)$ , cu  $G_1(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ , să fie transformata Fourier – Plancherel a unei funcții  $g \in L^2(0, +\infty)$  este ca  $R(\omega)$  și  $I(\omega)$  să fie *funcții conjugate* (legate prin transformarea Hilbert – relațiile (VI.3.39), (VI.3.40))

#### b. Transformatele Fourier unilaterale ale unor funcții

Pentru  $x(t) = S(t) \sin \omega_0 t$ ,  $x(t) = S(t) \cos \omega_0 t$  și  $x(t) = t^k S(t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se obțin următoarele rezultate:

$$1^\circ \mathcal{F}_1\{\sin \omega_0 t\} = \mathcal{F}\{S(t) \sin \omega_0 t\} = \frac{p}{2j} [d(\omega - \omega_0) - d(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$2^\circ \mathcal{F}_1\{\cos \omega_0 t\} = \mathcal{F}\{S(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{p}{2} [d(\omega - \omega_0) + d(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$3^\circ \mathcal{F}_1\{t^k\} = \mathcal{F}\{t^k S(t)\} = \frac{k!}{j^{k+1}} \text{Pf} \frac{1}{\omega^{k+1}} + pj^k D^k d(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

În cazul 1° reprezentările grafice sunt date în fig.B.3.g.

#### c. Transformata Fourier directă unilaterală ca funcție marginală a transformatei Laplace directe

1° În legătură cu  $F(s)$  (definiția 1 de la A.1.1) și  $F_1(j\omega)$  (de la a.2°) este cunoscut că în general:

$$F_1(j\omega) \neq F(s) \Big|_{s=j\omega}, \quad \omega \in \mathbf{R}.$$

Aceasta deoarece pentru  $s = z + j\omega$  are loc:

$$\lim_{z \downarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(z+j\omega)t} dt \neq \int_0^{+\infty} f(t) \lim_{z \downarrow 0} e^{-(z+j\omega)t} dt, \quad \omega \in \mathbf{R},$$

excepând cazurile care urmează.

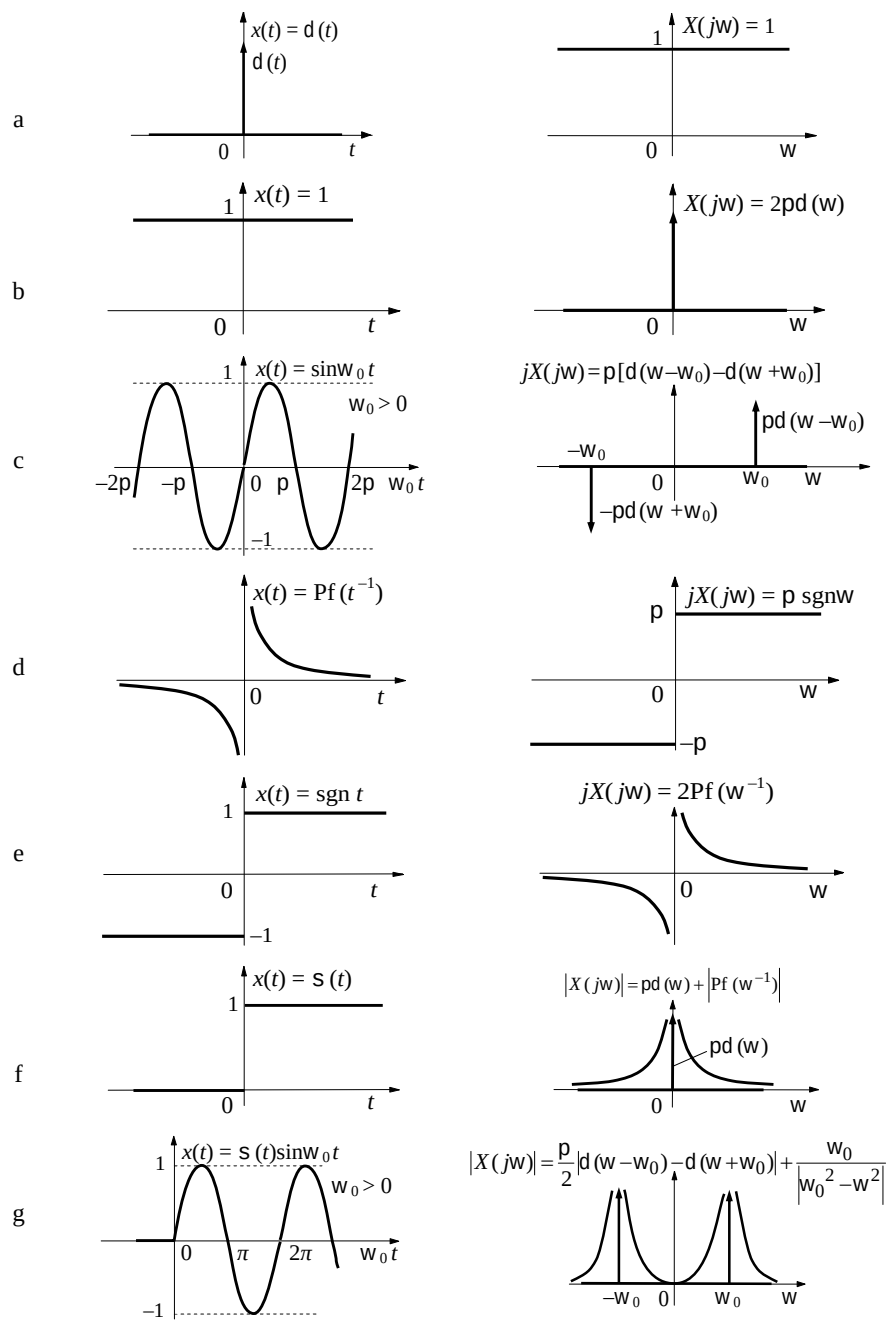


Fig. B.3. Semnale (distribuții) și densitățile lor spectrale

2° Dacă abscisa de convergență a integralei Laplace (A.1.1.a.4°) este negativă ( $z_0 < 0$ ), atunci pe  $s = jw$  are loc:

$$F_I(jw) = F(s)|_{s=jw}, \quad w \in \mathbf{R}.$$

$F_I(jw)$  este funcția marginală a lui  $F(s)$ .

3° Dacă  $z_0 > 0$ , atunci este posibil ca pentru  $s = jw$  integrala Laplace să nu convergă. În acest caz este posibil ca transformata Fourier să nu existe în sensul obișnuit, dar este posibil să existe în sens distribuții.

4° Dacă  $z_0 = 0$ , atunci pe  $s = jw$  există puncte de convergență și de divergență ale integralei Laplace. În punctele de convergență are loc relația de la 2°. Dacă această relație are loc pentru toți  $s = jw$ ,  $w \in \mathbf{R}$ , atunci  $F_I(jw)$  este funcția marginală a lui  $F(s)$ .

5° În cazul  $f \in L^2(-\infty, +\infty)$  se utilizează transformarea Fourier – Plancherel directă unilaterală (Anexa A.3), situație în care are loc:

$$F_I(jw) = \mathcal{F}_1^2\{f(t)\} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(t) e^{-jw t} dt = F(s)|_{s=jw},$$

aproape pentru toți  $w \in \mathbf{R}$ .

## Tabele de transformate Laplace și Fourier

Anexa

C

### 1. Transformate Laplace

| $f(t), t \in \mathbf{R}_+$                            | $F(s), s \in \mathbf{C}$                                                    | $f(t), t \in \mathbf{R}_+$                            | $F(s), s \in \mathbf{C}$                                                 |
|-------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$                                           | 1                                                                           | $\delta(t)$                                           | $\frac{1}{s}$                                                            |
| $D^k \delta(t),$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$              | $s^k$                                                                       | $t^k \delta(t),$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$              | $\frac{k!}{s^{k+1}}$                                                     |
| $\delta(t - \tau); \tau \geq 0$                       | $e^{-\tau s}$                                                               | $\delta(t - \tau); \tau \geq 0$                       | $\frac{1}{s} e^{-\tau s}$                                                |
| $e^{-at}$                                             | $\frac{1}{s + a}$                                                           | $\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$                        | $\frac{1}{Ts + 1}$                                                       |
| $\sin \omega_0 t$                                     | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$                                         | $\cos \omega_0 t$                                     | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$                                             |
| $\operatorname{sh} \omega_0 t$                        | $\frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$                                         | $\operatorname{ch} \omega_0 t$                        | $\frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$                                             |
| $e^{-at} \sin \omega_0 t$                             | $\frac{\omega_0}{s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2}$                             | $e^{-at} \cos \omega_0 t$                             | $\frac{s + a}{s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2}$                             |
| $t^k e^{-at} \sin \omega_0 t$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$ | $(-1)^k \left( \frac{\omega_0}{s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2} \right)^{(k)}$ | $t^k e^{-at} \cos \omega_0 t$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$ | $(-1)^k \left( \frac{s + a}{s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2} \right)^{(k)}$ |

## 2. Transformate Fourier

| $f(t), t \in \mathbf{R}$                 | $F(j\omega), \omega \in \mathbf{R}$                                                                               | $f(t), t \in \mathbf{R}$                | $F(j\omega), \omega \in \mathbf{R}$                                                                                                    |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\delta(t)$                              | 1                                                                                                                 | 1                                       | $2\pi \delta(\omega)$                                                                                                                  |
| $D^k \delta(t),$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$ | $(j\omega)^k$                                                                                                     | $t^k, k = 0, 1, 2, \dots$               | $2\pi j^k D^k \delta(\omega)$                                                                                                          |
| $\operatorname{sgn} t$                   | $\frac{2}{j\omega}$                                                                                               | $\frac{1}{t}$                           | $\frac{\pi}{j} \operatorname{sgn} \omega$                                                                                              |
| $s(t)$                                   | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$                                                                          | $e^{-at^2}; a > 0$                      | $\sqrt{\pi/a} e^{-\omega^2/4a}$                                                                                                        |
| $t^k s(t),$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$      | $\frac{k!}{(j\omega)^{k+1}} + \pi j^k D^k \delta(\omega)$                                                         | $e^{-a t } \operatorname{sgn} t; a > 0$ | $-\frac{2j\omega}{\omega^2 + a^2}$                                                                                                     |
| $\sin \omega_0 t$                        | $\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$                                           | $\frac{a}{t^2 + a^2}; a > 0$            | $\pi e^{-a \omega }$                                                                                                                   |
| $\cos \omega_0 t$                        | $\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$                                                     | $r_T(t) = s(t+T) - s(t-T)$              | $2 \frac{\sin T\omega}{\omega}$                                                                                                        |
| $s(t) \sin \omega_0 t$                   | $\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ | $\frac{\sin \omega_0 t}{t}$             | $\pi r_{\omega_0}(\omega) = \pi [s(\omega + \omega_0) - s(\omega - \omega_0)]$                                                         |
| $s(t) \cos \omega_0 t$                   | $\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$   | $r_T(t-T) - r_T(t+T)$                   | $-4j \frac{\sin^2 T\omega}{\omega}$                                                                                                    |
| $e^{-a t };$<br>$a > 0$                  | $\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$                                                                                       | $r_T(t) \sin \omega_0 t$                | $\frac{1}{j} \left[ \frac{\sin T(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin T(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0} \right]$ |
| $e^{-at} s(t);$<br>$a > 0$               | $\frac{1}{j\omega + a}$                                                                                           | $r_T(t) \cos \omega_0 t$                | $\frac{\sin T(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin T(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0}$                            |

## Bibliografie

---

1. Banks, P.S., *Control Systems Engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1986
2. Barbu, V., *Ecuatii diferențiale*. Editura „Junimea”, Iași, 1985
3. Belea, C., *Teoria sistemelor; sisteme neliniare*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985
4. Bernstein, S.D., Bushnell, G.L., The History of Control. IEEE CS Magazine, 22, 2, 2002
5. Călin, S., *Regulatoare automate*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
6. Coloși, T., Ignat, I., *Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat*. Inst. Politehnic, Cluj, 1981
7. Corduneanu, C., *Ecuatii diferențiale și integrale*. Universitatea „Al.I. Cuza”, Iași, 1971
8. Corduneanu, A., Pletea, A. L., *Noțiuni de teoria ecuațiilor diferențiale*. Matrixrom, București 1999
9. D'Azzo, J.J., Houpis, H.C., *Linear Control System Analysis and Design*. McGraw, New York, 1988
10. Dobra, P., *Teoria sistemelor*. Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2002
11. Doetsch, G., *Funktional Transformationen. Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs*. R. Sauer, I. Szabo (Ed.), Springer, Berlin, 1967
12. Dorf, C.R., *Modern Control Systems*. Addison-Wesley, 1989
13. Dragomir, T.L., Preitl, Șt., *Elemente de teoria sistemelor și reglaj automat*. Inst. Politehnic, Timișoara, 1979
14. Dranfield, P., Haber, F.D., *Instruire programată în metoda locului rădăcinilor*. Editura Tehnică, București, 1980
15. Dumitrache, I., *Tehnica reglării automate*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980
16. Föllinger, O., *Laplace- und Fourier-Transformationen*. Hüthling-Buch-Verlg, 1993
17. Föllinger, O., *Regelungstechnik*. Hüthling-Buch-Verlg, 1994
18. Föllinger, O., *Nichtlineare Regelungen*. Oldenbourg, München, 1993, 1998
19. Franklin, F.G. et al., *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley, 1986
20. Houpis, C.H., Rasmussen, S.J., *Quantitative Feedback Theory*. M. Dekker, Basel, 1999
21. Ionescu, V.I., *Teoria sistemelor; sisteme liniare*. Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1985
22. Kraniuska, P., *Transforms in Signals and Systems*. Addison-Wesley, 1992
23. Lazăr, C., *Ingineria reglării automate*. Universitatea Tehnică “Gh. Asachi”, Iași, 1995
24. Marin, C., *Structuri și legi de reglare automată*. Editura Universitaria, Craiova, 2000
25. Mayr, O., *Zur Frühgeschichte der technischen Regelungen*. Oldenbourg, München, 1969
26. Păstrăvanu O., Ibănescu, R., *Limbajul bond-graph în modelarea și simularea sistemelor fizico-tehnice*. Editura “Gh. Asachi”, Iași, 2001
27. Popov, V.M., *Hiperstabilitatea sistemelor automate*. Editura Academiei., București, 1966
28. Preitl, Șt., Precup, R.E., *Elementele de bază ale reglajului automat*. Ed. Politehnica, Timișoara, 2001
29. Răsvan, V.I., *Teoria stabilității*. Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987
30. Truxal, J.G., *Automatic Feedback Control System Synthesis*. McGraw, New York, 1955
31. Tzafestas, S.G. (Ed.), *Applied Control; Trends and Modern Methodologies*. M. Dekker, Basel, 1993
32. Unbehauen, R. *Systemtheorie*. Oldenbourg, München, 1997
33. Voicu, M., Identification complète des processus dynamiques linéaires. *Revue Française d'Automatique, Informatique et de Recherche opérationnelle*, nr. J-2, 1972, pp. 87-95
34. Voicu M., Identificarea sistemelor dinamice. SAEA, *Academia Română*, Filiala Iași, 1977
35. Voicu M., Teoria sistemelor, stadiul actual și perspective. SAEA, *Academia Română*, Filiala Iași, 1979
36. Voicu M., Interconexiuni ale sistemelor dinamice liniare multivariabile. SAEA, *Academia Română*, Filiala Iași, 1979
37. Voicu M., Metodă și dispozitiv de identificare completă a proceselor automatizate liniare. *Brevet nr. 73 715/1980*
38. Voicu M., Cât de practică este teoria modernă a sistemelor. SAEA, *Academia Română*, Filiala Iași, 1980

39. Voicu M., Kirchhoff interconnectability of linear constant dynamical systems. *International Journal of Systems Science*, 1980, no. 8, pp. 907-919
40. Voicu M., Interconectabilitatea Kirchhoff a generatoarelor sincrone. Simp. Național de Teoria Sistemelor, *Universitatea din Craiova*, 14-15.11.1980, vol. II, pp. 76-81.
41. Voicu, M., *Teoria sistemelor*. Institutul Politehnic „Gh. Asachi”, Iași, 1980
42. Voicu M., Proprietățile fundamentale ale sistemelor și reacția inversă. Simp. „Cibernetica în perspectiva revoluției științifico-tehnice contemporane”. *Academia Română*, Filiala Iași, 1983
43. Voicu M., Pathological phenomena in the Kirchhoff interconnected hypersystems. *Bul. Inst. Politehnic din Iași*, secția III, XXX (XXXIV), 1984, 1-4, pp.47-49
44. Voicu M., Pentru o teorie a modelării matematice. Simp. Național de Teoria Sistemelor, *Universitatea din Craiova*, 14-15.12.1984, vol. I, pp. 76-80
45. Voicu M., Teoria sistemelor și cibernetica tehnică – conexiuni și perspective în domeniul învățământului tehnic superior. Simp. „Contribuții românești la dezvoltarea științei”, *Academia Română*, Filiala Iași, 1986
46. Voicu, M., *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*. Ed. Tehnică, București, 1986
47. Voicu M., De la legea lui Ohm la teoria sistemelor. Simp. Național de Teoria Sistemelor, *Universitatea din Craiova*, 26-27.05.1988, vol. II, pp. 47-60
48. Voicu M., Indici de sensibilitate în sisteza sistemelor automate liniare multivariabile. Zilele academice ieșene, *Academia Română*, Filiala Iași, 1990
49. Voicu M., Unele estimări privind evoluția automatizării în anii '90. Zilele academice ieșene, *Academia Română*, Filiala Iași, 1992
50. Voicu, M., *Sisteme automate multivariabile*. Editura "Gh. Asachi", Iași, 1993
51. Voicu M., Sufficient conditions for Hurwitz and Schur polynomials. *Bul. Inst. Politehnic din Iași*, IV, XLIV (XLVII), 1998, pp. 1-6
52. Voicu M., *Introducere în automatică*. Editura Dosoitei, Iași, 1998
53. Voicu M., Sinuous ways of knowledge. 3rd Int. Conf. on Romania and Romanians in contemporary science, *Academia Română*, *Fundația Culturală Română*, Sinaia, 13-17.06.2001
54. Voicu, M., *Teoria sistemelor cu aplicații în bioingineria medicală*, I. Ed. „Gh. Asachi”, Iași, 2001
55. Voicu M., Moroșan B.-I., Teaching fundamentals of automatic control and system theory. Europ. Sem. on Aut. & Contr. Techn. Educ., *Technische Univ.*, Dresden, 11-12.05.1994; Proc. *SEFI*, Bruxelles, pp. 44-50
56. Voicu M., Păstrăvanu O., Stabilizarea sistemelor automate cu obiect instabil IMEM; studiu de caz. Ses. Șt. Facultatea de Electrotehnică, *Institutul Politehnic din Iași*, 16-17.05.1986, secția III, pp. 127-134
57. Voicu M., Păstrăvanu O., Păvăluc L., Numerical aspects of d.c. electric motor parameters and state estimation via adaptive observer simulation. Int. Conf. on El. Drives, *University of Brasov*, 20-22.09.1988; Proc., 4, D.2-2, pp. 1-8
58. Voicu M., Păstrăvanu O., Transferring knowledge from mathematics to systems and control theory; a metatheoretic and didactic viewpoint. Workshop on Aut. and Control Technol. Educ. 2001, *University of Technology*, Vienna, 25-27.01.1993; Proc. *SEFI*, Bruxelles, 2/1993
59. Voicu M., Păstrăvanu O., Lazăr C., A didactic approach to the hyperstability of automatic control systems. Int. Workshop on Adv. Educ. in Autom. & Control Techn., *Czech Technical University*, Prague, 16-18.05.1994; Proc., pp.14-17
60. Voicu M., Pastravanu O., Schönberger F., Ferariu L., *Introducere în automatică, culegere de probleme*. Editura Matrixrom, București, 2000
61. Voicu M., Păstrăvanu O., Time-domain and parametric properties corresponding to Popov inequality. 1st IFAC Symp. on Syst. Struct. & Control, 29-31.08.2001, *Czech Technical University*, Prague; Proc. *IFAC*, CD-ROM, 108
62. Voicu M., Țițariu I., Asandei D., Procedeu și dispozitiv de comandă a servomotoarelor asincrone. *Brevet nr. 72 589/1979*
63. Vrabie, I., *Ecuatii diferențiale*. Matrixrom, București, 1999





MIHAIL VOICU

# INTRODUCERE ÎN AUTOMATICĂ

I se mai spune tehnologia invizibilă. Este invizibilă pentru că, deși face uz de obiecte, ea rezidă în primul rând în relațiile dintre obiectele implicate. Nu este în mod voit invizibilă și nu are nimic în comun cu magia. Cu toate acestea, i s-ar putea spune și tehnomagie. Pentru că tehnologia invizibilă a făcut posibilă, de exemplu, levitația obiectelor, fără pase magice, sub forma sustentației electromagnetice, care deschide noi orizonturi în transporturile terestre... fără roți. A făcut posibilă utilizarea în condiții de stabilitate a reacției de fisiune nucleară, conducerea în condiții de flexibilitate a liniilor de fabricație robotizate sau realizarea de echipamente medicale pentru circulația și oxigenarea sângelui pe durata unor intervenții chirurgicale. Și exemplele ar putea continua, pentru că automatizarea – aceasta este tehnologia invizibilă – a produs rezultate cât se poate de vizibile. Ea este deschisă tuturor azimuturilor. Este matematică aplicată prin metodele care o generează și este inginerie prin aplicații. Baza ei științifică este înalt teoretică din necesități cât se poate de practice, fiind încă o ilustrare a adagiului, aparent paradoxal, dar de mare profunzime și simplitate, conform căruia „nimic nu este mai practic decât o teorie bună”.

Această carte prezintă elementele introductive de bază ale automatizării, centrate pe conceptul fundamental de structură cu reacție negativă și pe principiul abaterii. Aceste cunoștințe asigură competențe în ingineria sistemelor automate monovariabile. Două metode de analiză și sinteză a sistemelor automate – metoda locului rădăcinilor și metoda frecvențială – oferă procedee eficiente de proiectare a sistemelor automate monovariabile, care sunt cel mai frecvent utilizate în industrie și în alte sectoare de activitate.

EDITURA POLIROM

ISBN 973-681-111-5



[www.polirom.ro](http://www.polirom.ro)